BURHAN

Géométrie analytique de l'espace : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/geometrie-analytique-de-l-espace/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Géométrie analytique de l'espace	Application	10

Exercice 1

Coordonnées de vecteurs et de milieux

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on donne les points $A(2, -1, 4)$, $B(-4, 3, 0)$ et $C(1, 5, -2)$.

1.

Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

INDICE

On soustrait les coordonnées de l'origine du vecteur à celles de son extrémité. Écris la soustraction avant de la calculer : les coordonnées négatives demandent des parenthèses.

CORRIGÉ

D'après la règle des coordonnées d'un vecteur défini par deux points, on soustrait les coordonnées de A à celles de B :

$$\begin{aligned} x_B - x_A &= -4 - 2 = -6, \\ y_B - y_A &= 3 - (-1) = 4, \\ z_B - z_A &= 0 - 4 = -4. \end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{AB}(-6, 4, -4)$.

De même, $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(1 - 2, 5 - (-1), -2 - 4)$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AC}(-1, 6, -6)$.

Conclusion. Les vecteurs ont pour coordonnées $\overrightarrow{AB}(-6, 4, -4)$ et $\overrightarrow{AC}(-1, 6, -6)$.

2.

Calcule les coordonnées du milieu I de $[AB]$ et du milieu J de $[BC]$.

INDICE

Chaque coordonnée du milieu est la demi-somme des coordonnées correspondantes des extrémités. Pour J, une demi-somme n'est pas forcément entière : garde la fraction.

CORRIGÉ

D'après la règle des coordonnées du milieu, chaque coordonnée de I est la demi-somme des coordonnées correspondantes de A et de B :

$$\begin{aligned} x_I &= \frac{2+(-4)}{2} = -1, \\ y_I &= \frac{-1+3}{2} = 1, \\ z_I &= \frac{4+0}{2} = 2. \end{aligned}$$

De même, avec B et C :

$$\begin{aligned} x_J &= \frac{-4+1}{2} = -\frac{3}{2}, \\ y_J &= \frac{3+5}{2} = 4, \\ z_J &= \frac{0+(-2)}{2} = -1. \end{aligned}$$

Conclusion. Les milieux ont pour coordonnées $I(-1,1,2)$ et $J\left(-\frac{3}{2},4,-1\right)$.

3.

Calcule les coordonnées du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.

INDICE

Calcule d'abord les coordonnées de $-2\overrightarrow{AC}$, en multipliant chaque coordonnée par -2. Ajoute ensuite celles de $\overrightarrow{AB}$, coordonnée par coordonnée.

CORRIGÉ

Produit par un réel. D'après la règle des coordonnées d'un produit par un réel, on multiplie chaque coordonnée de $\overrightarrow{AC}(-1,6,-6)$ par -2 : $-2\overrightarrow{AC}(2,-12,12)$.

Somme. D'après la règle des coordonnées d'une somme, on ajoute coordonnée par coordonnée celles de $\overrightarrow{AB}(-6,4,-4)$ et de $-2\overrightarrow{AC}$:

$$\begin{aligned} -6+2 &= -4, \\ 4-12 &= -8, \\ -4+12 &= 8. \end{aligned}$$

Conclusion. Le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $\vec{u}\,(-4,-8,8)$.

Exercice 2

Placer un point par une égalité vectorielle

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $A(1, 2, -3)$, $B(3, -2, 1)$ et $C(0, 4, 5)$.

1.

Détermine les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

INDICE

Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Écris les coordonnées de $\overrightarrow{AD}$ avec les inconnues x_D, y_D, z_D, puis identifie.

CORRIGÉ

Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ (tronc commun).

On a $\overrightarrow{BC}(-3, 6, 4)$ et $\overrightarrow{AD}(x_D - 1, y_D - 2, z_D + 3)$. Deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs coordonnées sont égales : $x_D - 1 = -3$, $y_D - 2 = 6$ et $z_D + 3 = 4$.

Conclusion. Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme pour $D(-2, 8, 1)$.

2.

Détermine les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

INDICE

Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$, puis celles du vecteur $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$. Il reste à les ajouter à celles de A.

CORRIGÉ

Coordonnées du vecteur. On a $\overrightarrow{AB}(2, -4, 4)$ et $\overrightarrow{AC}(-1, 2, 8)$. Par les règles de calcul en coordonnées, $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(4 + 1, -8 - 2, 8 - 8)$, soit $(5, -10, 0)$.

Identification. Le vecteur $\overrightarrow{AE}$ a pour coordonnées $(x_E - 1, y_E - 2, z_E + 3)$. L'égalité des coordonnées donne $x_E - 1 = 5$, $y_E - 2 = -10$ et $z_E + 3 = 0$.

Conclusion. Le point cherché est $E(6, -8, -3)$.

3.

Détermine les coordonnées du point G tel que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

INDICE

Fais apparaître l'origine par la relation de Chasles : $\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OG}$. Tu obtiens une égalité qui donne $\overrightarrow{OG}$.

CORRIGÉ

Réduction de l'égalité. Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OG}$, et de même pour B et C. L'égalité devient $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-3\overrightarrow{OG}=\vec{0}$, donc :

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right).$$

Coordonnées. Les coordonnées de G sont celles de $\overrightarrow{OG}$, c'est-à-dire le tiers de la somme des coordonnées de A, B, C :

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1+3+0}{3}=\frac{4}{3},\\ y_G &= \frac{2-2+4}{3}=\frac{4}{3},\\ z_G &= \frac{-3+1+5}{3}=1. \end{aligned}$$

Conclusion. Le point cherché est $G\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},1\right)$.

Exercice 3

Colinéaires ou non : trois déterminants extraits

Les coordonnées sont données dans une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, puis dans un repère d'origine O.

1.

Montre que les vecteurs $\vec{u}(2, -3, 1)$ et $\vec{v}(-6, 9, -3)$ sont colinéaires, et donne le réel λ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

INDICE

Compare les premières coordonnées pour proposer un réel λ. Vérifie ensuite qu'il convient aussi pour la deuxième et la troisième coordonnée.

CORRIGÉ

Recherche de λ. On cherche λ avec $-6 = 2\lambda$: seul $\lambda = -3$ convient.

Vérification. Pour les deux autres coordonnées, $-3 \times (-3) = 9$ et $-3 \times 1 = -3$. Donc $\vec{v} = -3\vec{u}$.

Contrôle par les déterminants extraits. Ils sont tous nuls : $2 \times 9 - (-6) \times (-3) = 0$, $2 \times (-3) - (-6) \times 1 = 0$ et $(-3) \times (-3) - 9 \times 1 = 0$.

Conclusion. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, avec $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ pour $\lambda = -3$.

2.

Les vecteurs $\vec{a}(1, 2, -1)$ et $\vec{b}(3, 6, -2)$ sont-ils colinéaires ?

INDICE

Calcule les déterminants extraits un par un. Un premier déterminant nul ne permet pas encore de conclure.

CORRIGÉ

Le premier déterminant extrait est nul :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0.$$

Cela ne suffit pas pour conclure. Le deuxième vaut :

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times (-2) - 3 \times (-1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Il n'est pas nul. D'après la colinéarité de deux vecteurs en coordonnées, un seul déterminant extrait non nul suffit.

Conclusion. Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas colinéaires.

3.

Dans le repère, les points $P(0, 1, -2)$, $Q(1, 3, -3)$ et $S(3, 7, -5)$ sont-ils alignés ?

INDICE

Trois points sont alignés si et seulement si deux vecteurs qu'ils forment sont colinéaires. Calcule $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PS}$.

CORRIGÉ

Les points P, Q, S sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PS}$ sont colinéaires.

On a $\overrightarrow{PQ}(1, 2, -1)$ et $\overrightarrow{PS}(3, 6, -3)$. Chaque coordonnée de $\overrightarrow{PS}$ est le triple de celle de $\overrightarrow{PQ}$: $\overrightarrow{PS} = 3\overrightarrow{PQ}$, avec $\lambda = 3$. Les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PS}$ sont donc colinéaires.

Conclusion. Les points P, Q, S sont alignés.

Exercice 4

Calculer un déterminant de trois vecteurs

Dans une base de l'espace, on considère $\vec{u}(2,1,0)$, $\vec{v}(-1,3,2)$ et $\vec{w}(1,0,4)$.

1.

Calcule $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

INDICE

Écris les trois vecteurs en colonnes, dans l'ordre. Développe suivant la première colonne avec les signes $+$, $-$, $+$, puis calcule chaque déterminant 2×2 par la règle $ad-bc$.

CORRIGÉ

On range $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ en colonnes et on développe suivant la première colonne (définition du déterminant) :

$$\begin{aligned}
&\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\\
&=\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & 2 & 4\end{vmatrix}\\
&=2\begin{vmatrix}3 & 0\\ 2 & 4\end{vmatrix}\\
&\quad -1\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix}\\
&\quad +0\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 3 & 0\end{vmatrix}\\
&=2\times 12-1\times(-6)\\
&\quad +0\times(-3)\\
&=24+6+0\\
&=30.
\end{aligned}$$

Conclusion. $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=30$.

2.

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ forment-ils une base de l'espace ?

INDICE

Un résultat du cours relie la base et le signe du déterminant : nul ou non nul.

CORRIGÉ

D'après la question 1, $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=30\neq 0$.

D'après la propriété « base, points coplanaires et déterminant », trois vecteurs dont le déterminant n'est pas nul forment une base.

Conclusion. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ forment une base de l'espace.

3.

Sans nouveau calcul, donne $\det(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$ et $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u})$.

INDICE

Repère ce qui change d'un déterminant à l'autre : un échange de deux vecteurs, ou deux vecteurs égaux. Les propriétés du déterminant disent ce qui en résulte.

CORRIGÉ

Échange de deux vecteurs. Le déterminant $\det(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$ s'obtient en échangeant $\vec{u}$ et $\vec{v}$. D'après l'alternance du déterminant, il change de signe : il vaut -30.

Deux vecteurs égaux. Le déterminant $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u})$ a deux vecteurs égaux : d'après la même propriété, il est nul.

Conclusion. $\det(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = -30$ et $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}) = 0$.

Exercice 5

Trois vecteurs : coplanaires ou base ?

Dans une base de l'espace, on donne $\vec{u}(1,-1,2)$, $\vec{v}(2,1,-1)$, $\vec{w}(4,-1,3)$ et $\vec{w}'(4,-1,4)$.

1.

Calcule $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$. Que peut-on en déduire ?

INDICE

Range $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ en colonnes et développe suivant la première colonne. Prends garde au signe $-$ devant le deuxième terme, alors que la deuxième coordonnée de $\vec{u}$ est déjà négative.

CORRIGÉ

Calcul. On développe suivant la première colonne :

$$\begin{aligned}
&\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} \\
&= 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\
&\quad -(-1)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\
&\quad +2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= 1\times 2-(-1)\times 10 \\
&\quad +2\times(-6) \\
&= 2+10-12 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Déduction. Le déterminant est nul. D'après le théorème « déterminant et coplanarité », les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires.

Conclusion. $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=0$: les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires, et ils ne forment pas une base.

2.

Vérifie que $\vec{w}=2\vec{u}+\vec{v}$.

INDICE

Calcule les coordonnées de $2\vec{u}+\vec{v}$ et compare-les à celles de $\vec{w}$.

CORRIGÉ

Par les règles de calcul en coordonnées, $2\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $(2+2,-2+1,4-1)$, soit $(4,-1,3)$. Ce sont les coordonnées de $\vec{w}$.

Conclusion. $\vec{w}=2\vec{u}+\vec{v}$, ce qui confirme la coplanarité trouvée à la question 1.

3.

Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}'$ forment-ils une base ?

INDICE

Seule la troisième colonne change. Recalcule les trois déterminants 2×2 qui en dépendent.

CORRIGÉ

Seule la troisième colonne change. On développe suivant la première colonne :

$$\begin{aligned}
&\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}') \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} \\
&= 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \\
&\quad - (-1) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \\
&\quad + 2 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= 1 \times 3 - (-1) \times 12 \\
&\quad + 2 \times (-6) \\
&= 3 + 12 - 12 \\
&= 3.
\end{aligned}$$

Ce déterminant n'est pas nul. D'après la propriété « base, points coplanaires et déterminant », les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}'$ forment une base.

Conclusion. Oui : $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}')$ est une base de l'espace.

Exercice 6

Une droite et ses points

Dans un repère de l'espace, soit $A(3, 0, -1)$ et $B(1, 2, 0)$.

1.

Donne une représentation paramétrique de la droite (AB).

INDICE

Prends le point A, et le vecteur $\overrightarrow{AB}$ comme vecteur directeur : vérifie qu'il n'est pas nul.

CORRIGÉ

On a $\overrightarrow{AB}(-2, 2, 1)$, vecteur non nul. La droite (AB) est donc la droite $D(A, \overrightarrow{AB})$.

D'après la représentation paramétrique d'une droite, elle admet la représentation :

$$(AB) : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2t \\ z = -1 + t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Conclusion. Le système ci-dessus est une représentation paramétrique de la droite (AB).

2.

Le point $M(-1, 4, 1)$ appartient-il à (AB) ?

INDICE

Remplace x, y, z par les coordonnées de M et tire t de chaque équation.

CORRIGÉ

On remplace x, y, z par les coordonnées de M. Les équations deviennent $-1 = 3 - 2t$, $4 = 2t$ et $1 = -1 + t$. Chacune donne $t = 2$.

La même valeur de t convient pour les trois équations : M est le point de paramètre 2.

Conclusion. Le point M appartient à la droite : $M \in (AB)$.

3.

Le point $N(5, -2, 0)$ appartient-il à (AB) ?

INDICE

Même démarche. Ne conclus qu'après la troisième équation.

CORRIGÉ

On remplace x, y, z par les coordonnées de N. Les équations deviennent $5 = 3 - 2t$, $-2 = 2t$ et $0 = -1 + t$. Les deux premières donnent $t = -1$, mais la troisième donne $t = 1$.

Aucune valeur de t ne vérifie les trois équations à la fois.

Conclusion. Le point N n'appartient pas à la droite : $N \notin (AB)$.

4.

Détermine le point de (AB) dont la cote est égale à 3.

INDICE

La cote est la troisième coordonnée : écris $-1+t=3$, puis remplace la valeur de t dans les deux autres équations.

CORRIGÉ

La cote d'un point de (AB) est $-1+t$. On résout $-1+t=3$: $t=4$.

Le point de paramètre 4 a pour coordonnées $(3-8,8,3)$, soit $(-5,8,3)$.

Conclusion. Le seul point de (AB) de cote 3 est le point de coordonnées $(-5,8,3)$.

Exercice 7

L'équation d'un plan défini par trois points

Dans un repère, on considère les points $A(1,1,0)$, $B(2,0,1)$ et $C(0,2,2)$.

1.

Montre que les points A, B, C ne sont pas alignés.

INDICE

Calcule $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Calcule les déterminants extraits un par un ; un seul non nul suffit.

CORRIGÉ

On a $\overrightarrow{AB}(1,-1,1)$ et $\overrightarrow{AC}(-1,1,2)$. Le premier déterminant extrait vaut $1\times 1-(-1)\times(-1)=0$. Le deuxième vaut :

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\\ &= 1\times 2-(-1)\times 1\\ &= 3\neq 0.\end{aligned}$$

D'après la colinéarité en coordonnées, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Conclusion. Les points A, B, C ne sont pas alignés : ils définissent le plan (ABC).

2.

Détermine une équation cartésienne du plan (ABC).

INDICE

Pose $M(x,y,z)$: $M \in (ABC)$ si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$. La première colonne contient $x-1, y-1, z$: garde les parenthèses en développant.

CORRIGÉ

Caractérisation. Soit $M(x,y,z)$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires (question 1). D'après la caractérisation vectorielle d'un plan et le critère de coplanarité (chapitre précédent), $M \in (ABC)$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

D'après le théorème « déterminant et coplanarité », c'est le cas si et seulement si :

$$\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0.$$

Développement. Suivant la première colonne :

$$\begin{aligned}
&\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \\
&= \begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ y-1 & -1 & 1 \\ z & 1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= (x-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\
&\quad - (y-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\
&\quad + z\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (x-1)\times(-3) \\
&\quad - (y-1)\times 3 + z \times 0 \\
&= -3x - 3y + 6.
\end{aligned}$$

Simplification. L'équation $-3x-3y+6=0$ équivaut, en divisant par -3, à $x+y-2=0$. Contrôle avec les trois points : $1+1-2=0$, $2+0-2=0$ et $0+2-2=0$.

Conclusion. Le plan (ABC) a pour équation cartésienne $x+y-2=0$.

3.

Les points $D(5,-3,7)$ et $E(1,0,4)$ appartiennent-ils au plan (ABC) ?

INDICE

Remplace les coordonnées de chaque point dans l'équation trouvée.

CORRIGÉ

On remplace les coordonnées de chaque point dans l'équation $x+y-2=0$.

- Pour D : $5+(-3)-2=0$, donc $D \in (ABC)$.
- Pour E : $1+0-2=-1 \neq 0$, donc $E \notin (ABC)$.

Conclusion. Le point D appartient au plan (ABC), le point E n'y appartient pas.

Exercice 8

Reconnaître les vecteurs de direction d'un plan

Dans un repère, soit P le plan d'équation $3x - 2y + z - 6 = 0$, et les vecteurs $\vec{u}(1, 1, -1)$, $\vec{v}(2, 3, 0)$, $\vec{w}(1, 0, 3)$.

1.

Lesquels de ces trois vecteurs sont des vecteurs de direction du plan P ?

INDICE

Un vecteur de coordonnées (α, β, γ) dirige le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ lorsque $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$. Le réel d n'intervient pas.

CORRIGÉ

D'après la propriété des vecteurs de direction d'un plan donné par une équation, un vecteur (α, β, γ) dirige P si et seulement si $3\alpha - 2\beta + \gamma = 0$. On calcule cette quantité pour chaque vecteur :

- pour $\vec{u}$: $3 - 2 - 1 = 0$;
- pour $\vec{v}$: $6 - 6 + 0 = 0$;
- pour $\vec{w}$: $3 - 0 + 3 = 6 \neq 0$.

Conclusion. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs de direction de P ; le vecteur $\vec{w}$ n'en est pas un.

2.

Vérifie que le point $A(2, 0, 0)$ appartient à P, et donne deux vecteurs de direction non colinéaires de P .

INDICE

Remplace les coordonnées de A dans l'équation. Parmi les vecteurs de la question 1, teste la colinéarité de deux vecteurs de direction.

CORRIGÉ

Le point A. On a $3 \times 2 - 0 + 0 - 6 = 0$, donc $A \in P$.

Deux vecteurs non colinéaires. D'après la question 1, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs de direction de P. Leur premier déterminant extrait vaut :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1.$$

Il n'est pas nul : d'après la colinéarité en coordonnées, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Conclusion. Le point A appartient à P, et $\vec{u}$, $\vec{v}$ sont deux vecteurs de direction non colinéaires de P.

3.

Déduis-en une représentation paramétrique de P.

INDICE

Écris la représentation du plan $P(A, \vec{u}, \vec{v})$. Pour justifier que ce plan est bien P, remplace la représentation dans l'équation de P.

CORRIGÉ

Le plan $P(A, \vec{u}, \vec{v})$. D'après la représentation paramétrique d'un plan, il admet la représentation :

$$\begin{cases} x = 2 + s + 2t \\ y = s + 3t \\ z = -s \end{cases}$$

avec $s \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$.

Inclusion dans P. Pour tous réels s et t, on remplace dans le premier membre de l'équation de P :

$$\begin{aligned} &3(2 + s + 2t) - 2(s + 3t) \\ &\quad + (-s) - 6 \\ &= 6 + 3s + 6t - 2s \\ &\quad - 6t - s - 6 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Le plan $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ est donc contenu dans P. Deux plans dont l'un contient l'autre sont égaux (tronc commun).

Conclusion. Le système ci-dessus est une représentation paramétrique du plan P.

Exercice 9

Trois droites face à un plan

Dans un repère, soit P le plan d'équation $x - y + 2z + 1 = 0$. Pour chaque droite, précise sa position relative par rapport à P et, s'il existe un seul point commun, donne-le.

1.

La droite D_1 de représentation paramétrique $x = 1 + 2t, y = 3 + t, z = -1 + t, t \in \mathbb{R}$.

INDICE

Substitue les trois expressions en t dans l'équation de P, puis réduis le résultat.

CORRIGÉ

On remplace x, y, z dans le premier membre de l'équation de P :

$$\begin{aligned}&(1 + 2t) - (3 + t)\\&\quad + 2(-1 + t) + 1\\&= 3t - 3.\end{aligned}$$

L'équation $3t - 3 = 0$ a une seule solution, $t = 1$. D'après la position relative d'une droite et d'un plan, D_1 coupe P en un seul point : le point de paramètre 1, de coordonnées $(3, 4, 0)$. Contrôle : $3 - 4 + 0 + 1 = 0$.

Conclusion. La droite D_1 est sécante au plan P, en l'unique point de coordonnées $(3, 4, 0)$.

2.

La droite D_2 de représentation paramétrique $x = 2 + t, y = 1 + 3t, z = t, t \in \mathbb{R}$.

INDICE

Même démarche. Regarde le coefficient de t avant de conclure ; selon sa valeur, le terme constant décide.

CORRIGÉ

Substitution. On remplace x, y, z dans le premier membre de l'équation de P :

$$\begin{aligned}&(2 + t) - (1 + 3t)\\&\quad + 2t + 1\\&= 2.\end{aligned}$$

L'équation devient $2 = 0$: aucun réel t ne convient.

Interprétation. Le coefficient de t est nul : pour le vecteur directeur $\vec{w}_2(1, 3, 1)$, $\delta = 1 - 3 + 2 \times 1 = 0$. De plus, le point $(2, 1, 0)$ de D_2 n'est pas dans P, car $2 - 1 + 0 + 1 = 2 \neq 0$.

Conclusion. D'après la position relative d'une droite et d'un plan, D_2 est strictement parallèle à P.

3.

La droite D_3 passant par $C(-1,0,0)$ et de vecteur directeur $\vec{w}(1,1,0)$.

INDICE

Écris d'abord une représentation paramétrique de D_3, puis procède comme aux questions précédentes.

CORRIGÉ

La droite $D_3 = D(C,\vec{w})$ a pour représentation paramétrique $x = -1+t$, $y = t$, $z = 0$, avec $t \in \mathbb{R}$. On remplace dans le premier membre de l'équation de P :

$$(-1+t) - t + 2\times 0 + 1 = 0.$$

L'égalité est vraie pour tout réel t : tous les points de D_3 appartiennent à P.

Conclusion. La droite D_3 est contenue dans P.

Exercice 10

Plans parallèles, confondus ou sécants

Dans un repère, soit P le plan d'équation $2x - y + 3z - 1 = 0$. Précise la position relative de P et de chacun des plans suivants.

1.

Le plan P_1 d'équation $-4x + 2y - 6z + 2 = 0$.

INDICE

Cherche un réel λ tel que $(-4, 2, -6) = \lambda(2, -1, 3)$. Compare ensuite le terme constant de P_1 à λ fois celui de P.

CORRIGÉ

On a $(-4, 2, -6) = -2(2, -1, 3)$, et les termes constants vérifient $2 = -2 \times (-1)$. Ainsi $(-4, 2, -6, 2) = -2(2, -1, 3, -1)$.

Conclusion. D'après la propriété des plans confondus, les plans P_1 et P sont confondus.

2.

Le plan P_2 d'équation $6x - 3y + 9z + 5 = 0$.

INDICE

Même démarche : trouve λ, puis compare les termes constants.

CORRIGÉ

On a $(6, -3, 9) = 3(2, -1, 3)$: les triplets sont proportionnels, donc les plans sont parallèles (plans parallèles en coordonnées).

Pour les termes constants, $3 \times (-1) = -3 \neq 5$: les quadruplets ne sont pas proportionnels, et les plans ne sont pas confondus.

Conclusion. Les plans P_2 et P sont strictement parallèles : ils n'ont aucun point commun.

3.

Le plan P_3 d'équation $x + y + z = 0$.

INDICE

Pour montrer que deux triplets ne sont pas proportionnels, il suffit d'un déterminant extrait qui ne s'annule pas. Calcule-les un par un.

CORRIGÉ

Le premier déterminant extrait des triplets $(2, -1, 3)$ et $(1, 1, 1)$ vaut :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 1 - 1 \times (-1) \\ = 3.$$

Il n'est pas nul : les triplets ne sont pas proportionnels.

Conclusion. D'après la propriété des plans sécants, P et P_3 sont sécants : leur intersection est une droite.