BURHAN

Géométrie analytique de l'espace

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/geometrie-analytique-de-l-espace/cours

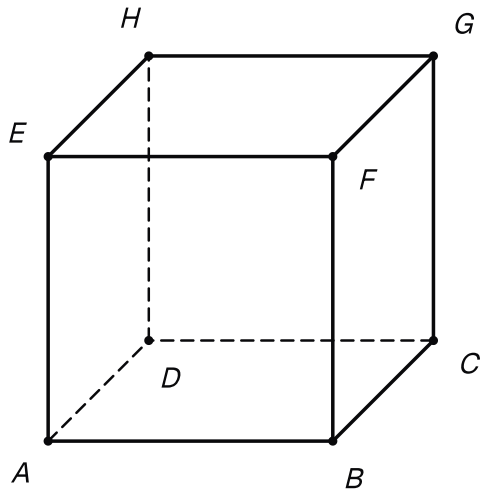
Chapitre	Semestre
Géométrie analytique de l'espace	Semestre 2

Mettre l'espace en nombres

Pose un **cube** $ABCDEFGH$ sur ta table. La face $ABCD$ touche la table, la face $EFGH$ est au-dessus. Les arêtes verticales sont $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$ et $[DH]$.

Trace ce cube à main levée : il t'aide à suivre, mais il ne prouvera rien.

Au chapitre précédent, tu as calculé avec les vecteurs de ce cube. Voici une question nouvelle. Comment dire, avec trois nombres seulement, où se trouve un sommet ? Et comment décider, par un calcul, si quatre sommets sont dans un même plan ?



Le cube ABCDEFGH posé sur la table : la face ABCD contre le plateau, la face EFGH au-dessus.

Devine : Trois nombres pour un sommet

Depuis A, on se déplace avec trois vecteurs : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$. Pour aller en G, on avance une fois selon chacun. À ton avis, quel triplet décrit le sommet G ?

A. $(1, 0, 1)$

Faux.

Faux. C'est F : il manque le déplacement selon $\overrightarrow{AD}$.

B. $(1, 1, 1)$

Juste.
C'est juste. On avance une fois selon chacun des trois vecteurs.

C. $(1, 1, 0)$
Faux.
Faux. Ce triplet décrit C : on avance selon $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, sans monter.

D. $(0, 1, 1)$
Faux.
Faux. C'est H : il manque le déplacement selon $\overrightarrow{AB}$.

Indice 1
Écris le chemin de A à G en passant par B puis C.

Correction
Par la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}.$$

Or $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE}$: ce sont des arêtes parallèles et de même sens du cube. Donc :

$$\overrightarrow{AG} = 1\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AD} + 1\overrightarrow{AE}.$$

Les trois coefficients $(1, 1, 1)$ s'appelleront bientôt les **coordonnées** de G.

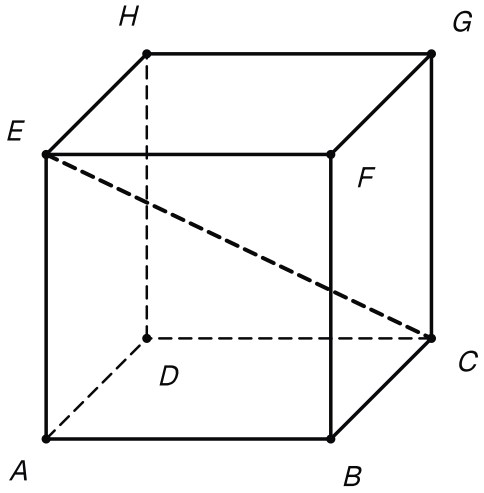
Dans ce chapitre, tu vas coder chaque point et chaque vecteur par trois nombres. Avec eux, tu décideras d'un alignement ou d'une coplanarité par un calcul.

Tu écriras une droite ou un plan par des équations. Tu sauras enfin dire si deux droites, une droite et un plan, ou deux plans se coupent, et où.

Chaque conclusion sera un calcul écrit, jamais une lecture de dessin.

Base, repère et coordonnées

Décomposer un vecteur du cube



Le vecteur EC à décomposer : il part d'un sommet du dessus et rejoint le sommet opposé de la face du dessous.

À toi : Un vecteur qui descend

Dans le cube $ABCDEFGH$, écris $\overrightarrow{EC}$ à l'aide de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

A. $\overrightarrow{EC} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

Faux.

Faux. Ce vecteur est $\overrightarrow{CE}$, l'opposé de celui qu'on cherche.

B. $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE}$

Faux.

Faux. Ce vecteur est $\overrightarrow{EB}$: il manque le déplacement selon $\overrightarrow{AD}$.

C. $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$

Juste.

C'est juste. On descend de E en A, puis on traverse la face $ABCD$ de A à C.

D. $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

Faux.

Faux. Ce vecteur est $\overrightarrow{AG}$: de E, on descend, donc le coefficient de $\overrightarrow{AE}$ est négatif.

Indice 1

Passe par A : $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC}$.

Correction

Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC}$.

Or $\overrightarrow{EA} = -\overrightarrow{AE}$. Par la règle du parallélogramme dans la face $ABCD$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Donc :

$$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}.$$

Petit rappel du chapitre précédent. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont **non coplanaires** : aucun plan ne les contient tous les trois. Pour des réels a, b, c, l'égalité

$$a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AD} + c\overrightarrow{AE} = \vec{0}$$

impose donc $a = b = c = 0$.

Tu viens d'écrire $\overrightarrow{EC}$ avec ces trois vecteurs. **Pourquoi est-ce vrai** pour n'importe quel vecteur, et pourquoi d'une seule façon ? Le théorème suivant répond, pour trois vecteurs non coplanaires quelconques.

Le théorème de décomposition

Théorème : Décomposition d'un vecteur suivant trois vecteurs non coplanaires

Soit $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs **non coplanaires** de l'espace. Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un **unique** triplet (x, y, z) de réels tel que

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Démonstration

Étape 1 (existence). Fixons un point O et notons M le point tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. Les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ne sont pas colinéaires, sinon $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ seraient coplanaires (chapitre précédent) : le plan $P(O, \vec{i}, \vec{j})$ existe. Comme $\vec{k}$ n'est pas coplanaire avec $\vec{i}$ et $\vec{j}$, la droite $D(M, \vec{k})$ n'est pas parallèle à ce plan (chapitre précédent) : elle le coupe en un point M' (tronc commun).

Étape 2. Comme M' appartient au plan $P(O, \vec{i}, \vec{j})$, il existe des réels x et y tels que $\overrightarrow{OM'} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Comme M' appartient à $D(M, \vec{k})$, il existe un réel z tel que $\overrightarrow{M'M} = z\vec{k}$. Par la relation de Chasles, $\vec{u} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Étape 3 (unicité). Si aussi $\vec{u} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$, alors $(x - x')\vec{i} + (y - y')\vec{j} + (z - z')\vec{k} = \vec{0}$. Les vecteurs étant non coplanaires, les trois coefficients sont nuls (chapitre précédent) : $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Existence. On part de $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$. Depuis M, on avance selon la direction $\vec{k}$. Cette droite n'est pas parallèle au plan $P(O, \vec{i}, \vec{j})$: elle le rencontre en un point M'. Le trajet de O à M', puis de M' à M, donne les trois coefficients.

Unicité. Deux écritures du même vecteur donnent, par différence, une combinaison nulle des trois vecteurs. Ils sont non coplanaires : tous les coefficients sont donc nuls.

Vérifie : L'hypothèse décisive

Dans la preuve, quelle hypothèse garantit que la droite $D(M, \vec{k})$ coupe le plan $P(O, \vec{i}, \vec{j})$?

A. Les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ne sont pas colinéaires.

Faux.

Faux. Cette hypothèse sert à définir le plan $P(O, \vec{i}, \vec{j})$, pas à le faire couper par la droite.

B. Le point M n'appartient pas au plan.

Faux.

Faux. Si M est dans le plan, la droite le coupe quand même, en M lui-même.

C. Le vecteur $\vec{u}$ est non nul.

Faux.

Faux. Pour $\vec{u} = \vec{0}$, le théorème reste vrai avec $x = y = z = 0$.

D. Le vecteur $\vec{k}$ n'est pas coplanaire avec $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Juste.

C'est juste. Sinon la droite serait parallèle au plan, et pourrait ne jamais le rencontrer.

Indice 1

Une droite et un plan sans point commun : c'est le cas d'une droite strictement parallèle au plan.

Correction

La droite $D(M, \vec{k})$ coupe le plan dès qu'elle ne lui est pas parallèle. Elle lui serait parallèle si $\vec{k}$ était coplanaire avec $\vec{i}$ et $\vec{j}$ (chapitre précédent). L'hypothèse « non coplanaires » l'interdit.

Exemple **: Contre-exemple : trois vecteurs coplanaires**

Dans le cube, prends $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$: ils sont coplanaires, car $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

L'existence tombe. Pour tous réels x, y, z :

$$\begin{aligned} & x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD} + z\overrightarrow{AC} \\ & = (x+z)\overrightarrow{AB} + (y+z)\overrightarrow{AD}. \end{aligned}$$

Ce vecteur reste coplanaire avec $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$. Or $\overrightarrow{AE}$ ne l'est pas : il ne s'écrit donc pas ainsi.

L'unicité tombe aussi :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} &= 1\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AD} + 0\overrightarrow{AC} \\ &= 0\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AD} + 1\overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

Sans l'hypothèse « non coplanaires », le théorème est faux.

Base, repère et coordonnées

Définition **: Base, repère et coordonnées**

- Un triplet $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de vecteurs **non coplanaires** est une **base** de l'espace. Les réels x, y, z tels que $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ sont les **coordonnées** du vecteur $\vec{u}$ dans cette base ; on note $\vec{u}(x,y,z)$.
- Un **repère** de l'espace est un quadruplet $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ formé d'un point O, l'**origine**, et d'une base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
- Les **coordonnées** d'un point M dans ce repère sont celles du vecteur $\overrightarrow{OM}$: on note $M(x,y,z)$ lorsque $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$. Le réel x est l'**abscisse**, y l'**ordonnée** et z la **cote** de M.

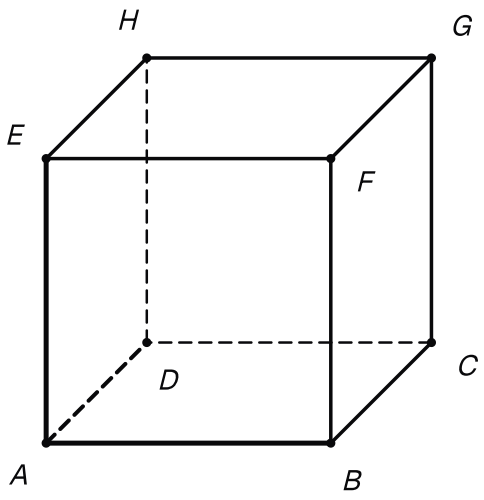
Exemple : Les sommets du cube en coordonnées

Prends le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$: ses trois vecteurs sont non coplanaires.

L'origine A a pour coordonnées $(0,0,0)$. Comme $\overrightarrow{AB}=1\overrightarrow{AB}+0\overrightarrow{AD}+0\overrightarrow{AE}$, on a $B(1,0,0)$. De même, $D(0,1,0)$ et $E(0,0,1)$.

Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$, donc $C(1,1,0)$. De même, $F(1,0,1)$ et $H(0,1,1)$. Enfin $G(1,1,1)$, car $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$.

Ce repère servira dans la suite du chapitre ; il ne sert jamais à mesurer des longueurs.



Le repère (A, AB, AD, AE) : l'origine A et les trois arêtes qui en partent, mises en valeur.

Repère et rédaction

Attention : Les coordonnées dépendent du repère

Un vecteur n'a pas « ses » coordonnées : il en a **dans une base donnée**.

✗ « G a pour coordonnées $(1,1,1)$ », sans dire dans quel repère.

✓ Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on a $G(1,1,1)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ sont aussi non coplanaires : $\overrightarrow{AE}$ sort de la face $ABCD$. Dans le repère $(A, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on a $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$, donc $G(1,0,1)$.

Avant tout calcul, écris le repère choisi, et prends toutes les coordonnées dans ce repère.

À toi : Les coordonnées d'une diagonale

Dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, détermine les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BH}$. Rédige en citant chaque règle. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Décompose le chemin de B à H en passant par A, puis par D.
Indice 2
$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH}$, par la relation de Chasles.
Indice 3
Remplace $\overrightarrow{BA}$ par $-\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DH}$ par $\overrightarrow{AE}$: attention au signe.

Réponse
Par la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH}.$$

Or $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$, et $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AE}$ car $ADHE$ est une face du cube. Donc :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{BH}\\ &= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}.\end{aligned}$$

Conclusion. Par unicité de la décomposition, $\overrightarrow{BH}$ a pour coordonnées $(-1,1,1)$ dans cette base.

Calculer avec les coordonnées

Deviner la règle

Devine : Le vecteur entre deux points

Dans un repère, $A(1,2,0)$ et $B(3,-1,4)$. À ton avis, quelles sont les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$?

A. $(2,-3,4)$
Juste.
C'est juste. On calcule « arrivée moins départ », coordonnée par coordonnée.

B. $(-2,3,-4)$
Faux.
Faux. Ce sont les coordonnées de $\overrightarrow{BA}$: tu as fait départ moins arrivée.

C. $(4, 1, 4)$

Faux.

Faux. Tu as additionné les coordonnées ; on soustrait celles de A à celles de B.

D. $(2, -1, 4)$

Faux.

Faux. La deuxième coordonnée vaut $-1 - 2 = -3$.

Indice 1

Pense à $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

Correction

Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Ses coordonnées sont donc $(3 - 1, -1 - 2, 4 - 0)$, soit $(2, -3, 4)$.

Au tronc commun, tu calculais déjà ainsi dans le plan, avec deux coordonnées. Dans l'espace, la règle reste la même, avec une troisième coordonnée. **Pourquoi est-ce vrai ?** Parce que la décomposition est unique : on calcule sur les vecteurs de la base, puis on lit les coefficients.

Les règles de calcul

Propriété : Coordonnées et opérations

Dans une base, soit $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ deux vecteurs, et λ un réel. Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soit $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points.

- $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si $x = x'$, $y = y'$ et $z = z'$.
- Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x', y + y', z + z')$, et le vecteur $\lambda\vec{u}$ a pour coordonnées $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.
- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$.
- Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}, \dfrac{y_A + y_B}{2}, \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$.

Démonstration

Étape 1. Si les coordonnées sont égales, les deux décompositions coïncident, donc $\vec{u} = \vec{v}$. Réciproquement, si $\vec{u} = \vec{v}$, l'unicité de la décomposition donne $x = x'$, $y = y'$ et $z = z'$.

Étape 2. Par les règles de calcul vectoriel (chapitre précédent), $\vec{u} + \vec{v} = (x + x')\vec{i} + (y + y')\vec{j} + (z + z')\vec{k}$ et $\lambda\vec{u} = (\lambda x)\vec{i} + (\lambda y)\vec{j} + (\lambda z)\vec{k}$. L'unicité de la décomposition donne les coordonnées annoncées.

Étape 3. Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$; on applique l'étape 2.

Étape 4. D'après la caractérisation vectorielle du milieu (chapitre précédent), $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OI}$, donc $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$; on applique l'étape 2.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Toutes les règles viennent d'une seule idée. On écrit chaque vecteur dans la base, on calcule avec les règles du chapitre précédent, puis on **identifie les coefficients**. C'est permis, car la décomposition est unique.

Pour $\overrightarrow{AB}$, on passe par l'origine : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$. Pour le milieu, on part de $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OI}$.

Vérifie : Lire les coordonnées d'une somme

Dans l'étape 2 de la preuve, quel résultat permet de lire les coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$ sur l'écriture obtenue ?

A. La colinéarité de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Faux.

Faux. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont quelconques : aucune colinéarité n'est supposée.

B. L'unicité de la décomposition dans la base.

Juste.

C'est juste. Une seule écriture existe : les coefficients obtenus sont donc les coordonnées.

C. La relation de Chasles.

Faux.

Faux. Elle sert à l'étape 3, pour $\overrightarrow{AB}$, pas ici.

D. La caractérisation vectorielle du milieu.

Faux.

Faux. Elle sert seulement à l'étape 4.

Indice 1

Que faut-il savoir pour affirmer que des coefficients sont « les » coordonnées ?

Correction

L'étape 2 écrit $\vec{u}+\vec{v}$ comme une combinaison de $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$. Comme cette écriture est unique, ses coefficients sont les coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$.

Exemple : Vecteur, milieu, combinaison

Dans un repère, $A(2,-1,3)$, $B(4,3,-1)$ et $\vec{u}(1,0,2)$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(4-2,3-(-1),-1-3)$, soit $(2,4,-4)$.

Le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées

$$\left(\frac{2+4}{2}, \frac{-1+3}{2}, \frac{3+(-1)}{2}\right),$$

soit $I(3, 1, 1)$.

Enfin, $2\vec{u} - \overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(2-2, 0-4, 4-(-4))$, soit $(0, -4, 8)$.

Un point défini par une égalité

Exemple : Trouver un point par ses coordonnées

Dans un repère, $A(3, 0, -3)$ et $B(0, 6, 3)$. Cherchons le point $G(x, y, z)$ tel que $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{GA}$ sont $(3-x, -y, -3-z)$, celles de $\overrightarrow{GB}$ sont $(-x, 6-y, 3-z)$. L'égalité vectorielle équivaut à trois égalités de coordonnées :

$$\begin{cases} (3-x) + 2(-x) = 0 \\ (-y) + 2(6-y) = 0 \\ (-3-z) + 2(3-z) = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire, en développant :

$$\begin{cases} 3 - 3x = 0 \\ 12 - 3y = 0 \\ 3 - 3z = 0 \end{cases}$$

Donc $x = 1$, $y = 4$ et $z = 1$: le seul point qui convient est $G(1, 4, 1)$.

À toi : Un milieu, puis un symétrique

Dans un repère, $A(2, 1, -1)$ et $B(0, 5, 3)$. Calcule les coordonnées du milieu I de $[AB]$, puis celles du point C tel que B soit le milieu de $[AC]$. Rédige chaque calcul. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Pour I : fais la demi-somme des coordonnées de A et de B.
Indice 2
Pour C : « B milieu de $[AC]$ » s'écrit $x_B = \dfrac{x_A + x_C}{2}$, et de même pour y et z.
Indice 3
Donc $x_C = 2x_B - x_A$: attention au signe de z_A.

Réponse
Milieu de $[AB]$. Le milieu I a pour coordonnées

$$\left(\frac{2+0}{2}, \frac{1+5}{2}, \frac{-1+3}{2}\right)$$

soit $I(1,3,1)$.

Point C. Le point B est le milieu de $[AC]$ si et seulement si chaque coordonnée de B est la demi-somme de celles de A et C, c'est-à-dire si $x_C = 2x_B - x_A$, $y_C = 2y_B - y_A$ et $z_C = 2z_B - z_A$. Donc $C(0-2, 10-1, 6-(-1))$, soit $C(-2,9,7)$.

Conclusion. Le milieu de $[AB]$ est $I(1,3,1)$, et le point cherché est $C(-2,9,7)$.

Colinéarité et alignement en coordonnées

Rappel et prédiction

Petit rappel du tronc commun. Dans le plan, $\vec{u}(a,b)$ et $\vec{v}(c,d)$ sont colinéaires si et seulement si leur **déterminant** est nul :

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc = 0.$$

Les coordonnées de chaque vecteur s'écrivent en colonne.

Devine : Proportionnels ou pas ?

Dans une base, $\vec{u}(1,2,3)$ et $\vec{v}(2,4,7)$. Ces vecteurs sont-ils colinéaires ?

A. Oui : le déterminant de leurs deux premières coordonnées est nul.

Faux.

Faux. Ce seul déterminant ignore la troisième coordonnée.

B. On ne peut pas décider sans figure.

Faux.

Faux. Les coordonnées suffisent : un calcul décide.

C. Non : 7 n'est pas le double de 3.

Juste.

C'est juste. Il faudrait un même réel λ pour les trois coordonnées ; $\lambda = 2$ ne marche que pour deux d'entre elles.

D. Oui : $2 = 2 \times 1$ et $4 = 2 \times 2$.

Faux.

Faux. Deux coordonnées sur trois ne suffisent pas : la troisième donne $7 \neq 2 \times 3$.

Indice 1

Cherche un réel λ tel que $\vec{v} = \lambda \vec{u}$, coordonnée par coordonnée.

Correction

Supposons $\vec{v} = \lambda \vec{u}$ pour un réel λ. La première coordonnée impose $\lambda = 2$, et la troisième demanderait $7 = 2 \times 3$: c'est faux.

Supposons $\vec{u} = \lambda\vec{v}$. La première coordonnée impose $\lambda = \dfrac{1}{2}$, et la troisième demanderait $3 = \dfrac{7}{2}$: c'est faux aussi.

Conclusion. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Trois déterminants

Dans l'espace, un seul déterminant ne voit que deux coordonnées. On en prend donc trois, un par couple de coordonnées : ce sont les **déterminants extraits**.

Pourquoi est-ce vrai ? Si $\vec{v} = \lambda\vec{u}$, chaque déterminant extrait s'annule. Réciproquement, deux déterminants bien choisis fabriquent le réel λ.

Propriété : Colinéarité de deux vecteurs en coordonnées

Dans une base, soit $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ deux vecteurs. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si

$$xy' - x'y = 0, \quad xz' - x'z = 0 \quad \text{et} \quad yz' - y'z = 0.$$

Autrement dit, les trois **déterminants extraits** $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}$ sont nuls.

Démonstration

Étape 1. Supposons $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires : il existe un réel λ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ ou $\vec{u} = \lambda\vec{v}$. Dans le premier cas, $x' = \lambda x$, $y' = \lambda y$ et $z' = \lambda z$ (coordonnées et opérations), d'où $xy' - x'y = \lambda xy - \lambda xy = 0$; de même pour les deux autres. Le second cas est identique, les rôles étant échangés.

Étape 2. Réciproquement, supposons les trois déterminants nuls. Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $\vec{u} = 0\vec{v}$: les vecteurs sont colinéaires. Sinon, une coordonnée de $\vec{u}$ est non nulle. Si $x \neq 0$, posons $\lambda = \dfrac{x'}{x}$: alors $x' = \lambda x$, l'égalité $xy' = x'y$ donne $y' = \lambda y$ et l'égalité $xz' = x'z$ donne $z' = \lambda z$. Donc $\vec{v} = \lambda\vec{u}$. Si $y \neq 0$, on pose $\lambda = \dfrac{y'}{y}$ et on emploie la première et la troisième égalité ; si $z \neq 0$, on pose $\lambda = \dfrac{z'}{z}$ et on emploie les deux dernières.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Sens direct : on remplace x', y', z' par λx, λy, λz, et chaque déterminant extrait se simplifie en 0.

Réciproque : on choisit une coordonnée non nulle de $\vec{u}$, par exemple x. Le quotient $\lambda = \dfrac{x'}{x}$ est le candidat. Les deux déterminants qui contiennent x prouvent qu'il convient aussi pour y' et z'. Le cas $\vec{u} = \vec{0}$ se traite à part.

Vérifie : Les bons déterminants

Dans la réciproque, on suppose $x \neq 0$ et on pose $\lambda = \dfrac{x'}{x}$. Quels déterminants nuls donnent $y' = \lambda y$ et $z' = \lambda z$?

A. $yz' - y'z$ seulement

Faux.

Faux. Ce déterminant ne contient pas x : il ne fait pas apparaître λ.

B. $xy' - x'y$ et $yz' - y'z$

Faux.

Faux. Le second ne contient pas x ; il ne donne pas $z' = \lambda z$ lorsque $y = 0$.

C. Aucun : la définition de λ suffit

Faux.

Faux. La définition de λ ne règle que la première coordonnée.

D. $xy' - x'y$ et $xz' - x'z$

Juste.

C'est juste. Chacun contient x, par lequel on peut diviser : $y' = \dfrac{x'y}{x} = \lambda y$, et de même pour z'.

Indice 1

Pour isoler y', il faut diviser par un nombre non nul.

Correction

On sait que $x \neq 0$. L'égalité $xy' = x'y$ donne $y' = \dfrac{x'}{x}y = \lambda y$, et l'égalité $xz' = x'z$ donne $z' = \lambda z$.

Donc $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

Méthode et exemples

Méthode : Calculer des coordonnées et tester une colinéarité

1. **Poser le repère**, puis lire les coordonnées des points de l'énoncé.
2. **Calculer** les vecteurs utiles : « arrivée moins départ », et le milieu par demi-somme.
3. **Tester** la colinéarité : exhiber le réel λ, ou calculer les trois déterminants extraits.
4. **Conclure** en citant la règle : vecteurs colinéaires, donc points alignés ou droites parallèles. Un seul déterminant extrait non nul prouve la non-colinéarité.

Exemple : Alignés, puis non alignés

Dans un repère, $A(1, 0, 2)$, $B(3, 1, -1)$, $C(7, 3, -7)$ et $D(5, 2, -3)$.

Points A, B, C. On calcule $\overrightarrow{AB}(2,1,-3)$ et $\overrightarrow{AC}(6,3,-9)$. On constate que $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}$: les vecteurs sont colinéaires, donc A, B, C sont alignés.

Points A, B, D. On a $\overrightarrow{AD}(4,2,-5)$. Le premier déterminant extrait de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ est nul :

$$\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2\times 2-1\times 4=0.$$

Le deuxième ne l'est pas :

$$\begin{vmatrix}2 & 4\\ -3 & -5\end{vmatrix}=2\times(-5)-(-3)\times 4\\ =2.$$

Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires : A, B, D ne sont pas alignés. Un seul déterminant nul ne suffisait pas.

À toi : Trois points alignés

Dans un repère, $E(0,1,1)$, $F(2,-1,3)$ et $G(-1,2,0)$. Démontre que E, F et G sont alignés. Rédige. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Calcule $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$.
Indice 2
Cherche un réel λ tel que $\overrightarrow{EG}=\lambda\overrightarrow{EF}$, coordonnée par coordonnée.
Indice 3
Le même λ doit convenir pour les trois coordonnées ; ici, il est négatif.

Réponse
On a $\overrightarrow{EF}(2,-2,2)$ et $\overrightarrow{EG}(-1,1,-1)$. Les trois coordonnées donnent le même réel $\lambda=-\dfrac{1}{2}$:

$$\overrightarrow{EG}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{EF}.$$

Conclusion. Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont colinéaires, donc les points E, F, G sont alignés.

Représentation paramétrique d'une droite

Un point qui se déplace

Petit rappel du chapitre précédent. La droite $D(A,\vec{u})$ passe par A et a pour **vecteur directeur** $\vec{u}$, non nul. Un point M lui appartient si et seulement s'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$.

Imagine t comme un temps : à chaque instant, le point M occupe une position sur la droite.

Devine : Où est le point à l'instant trois ?

Dans un repère, $A(1,0,2)$ et $\vec{u}(2,-1,1)$. Où se trouve le point M de $D(A,\vec{u})$ obtenu pour $t=3$?

A. $M(7,-3,5)$

Juste.

C'est juste. Le vecteur $3\vec{u}$ a pour coordonnées $(6,-3,3)$, qu'on ajoute à celles de A.

B. $M(6,-3,3)$

Faux.

Faux. Ce sont les coordonnées de $3\vec{u}$: il faut partir de A.

C. $M(3,-1,3)$

Faux.

Faux. C'est le point obtenu pour $t=1$.

D. $M(7,3,5)$

Faux.

Faux. La deuxième coordonnée vaut $0+3\times(-1)=-3$.

Indice 1

Calcule $x_M = x_A + 3\times 2$, et de même pour y_M et z_M.

Correction

L'égalité $\overrightarrow{AM}=3\vec{u}$ donne $x_M=1+6=7$, $y_M=0-3=-3$ et $z_M=2+3=5$. Donc $M(7,-3,5)$.

La représentation paramétrique

Pour tout réel t, le même calcul donne un point de la droite. **Pourquoi est-ce vrai** qu'on obtient ainsi tous ses points, et seulement eux ? On traduit l'égalité vectorielle en coordonnées.

Propriété : Représentation paramétrique d'une droite

Dans un repère, soit $A(x_A,y_A,z_A)$ un point et $\vec{u}(a,b,c)$ un vecteur **non nul**. Un point $M(x,y,z)$ appartient à la droite $D(A,\vec{u})$ si et seulement s'il existe un réel t tel que

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$$

Ce système, où t parcourt $\mathbb{R}$, est une **représentation paramétrique** de la droite $D(A,\vec{u})$; le réel t est le **paramètre**.

Démonstration

Étape 1. D'après la caractérisation vectorielle d'une droite (chapitre précédent), M appartient à $D(A,\vec{u})$ si et seulement s'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$.

Étape 2. Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $(x - x_A, y - y_A, z - z_A)$ et le vecteur $t\vec{u}$ a pour coordonnées (ta, tb, tc) (coordonnées et opérations). Deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs coordonnées sont égales : l'égalité $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ équivaut donc au système annoncé.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Deux résultats suffisent. La caractérisation vectorielle de la droite fournit l'égalité $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$. Deux vecteurs égaux ont les mêmes coordonnées, et réciproquement : l'égalité devient trois équations, une par coordonnée. Le **même** réel t figure dans les trois.

Vérifie : Un vecteur directeur non nul

Pourquoi l'énoncé exige-t-il un vecteur $\vec{u}$ non nul ?

A. Pour que la représentation soit unique.
Faux.
Faux. Une droite a plusieurs représentations paramétriques, même avec $\vec{u}$ non nul.

B. Si $\vec{u} = \vec{0}$, le système ne décrit que le point A.
Juste.
C'est juste. Pour tout t, on trouve $x = x_A, y = y_A, z = z_A$: un seul point, pas une droite.

C. Pour que le réel t existe toujours.
Faux.
Faux. Le réel t est choisi librement ; c'est l'ensemble des points obtenus qui pose problème.

D. Pour que A appartienne à la droite.
Faux.
Faux. Le point A est obtenu pour $t = 0$, quel que soit $\vec{u}$.

Indice 1
Remplace a, b et c par 0 dans le système.

Correction
Avec $\vec{u} = \vec{0}$, le système devient $x = x_A, y = y_A, z = z_A$ pour tout t : il décrit le seul point A. Une droite exige un vecteur directeur non nul.

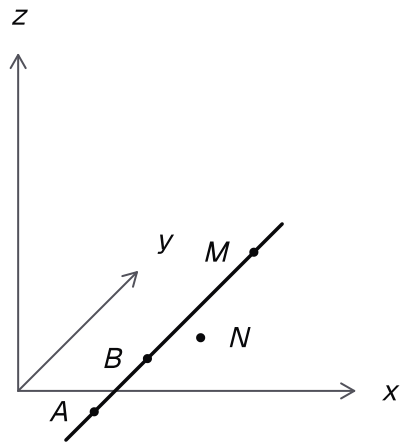
Exemple : La droite (AB) et deux points testés

Dans un repère, $A(2, 1, -1)$ et $B(4, 0, 1)$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}(2, -1, 2)$ est non nul : il dirige la droite (AB). Une représentation paramétrique de (AB) est

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - t \qquad t \in \mathbb{R}. \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

Point $M(8, -2, 5)$. L'équation $8 = 2 + 2t$ donne $t = 3$; $-2 = 1 - t$ donne $t = 3$; $5 = -1 + 2t$ donne $t = 3$. La même valeur convient aux trois : $M \in (AB)$.

Point $N(6, -1, 2)$. Les deux premières équations donnent $t = 2$, la troisième donne $t = \dfrac{3}{2}$. Les valeurs diffèrent : $N \notin (AB)$.



La droite (AB) de l'exemple : M est sur la droite, N à côté.

Méthode et piège

Méthode : Représenter une droite et tester un point

1. **Choisir** un point A de la droite et un vecteur directeur $\vec{u}(a, b, c)$ non nul ; pour la droite (AB), $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
2. **Écrire** le système $x = x_A + ta$, $y = y_A + tb$, $z = z_A + tc$, avec une accolade et la mention $t \in \mathbb{R}$.
3. **Remplacer** les coordonnées du point testé dans les trois équations.
4. **Conclure** : le point est sur la droite si et seulement s'il existe un réel t qui vérifie les trois équations à la fois. Une équation sans t doit être vraie ; les autres doivent donner **la même** valeur de t.

Attention : Une droite, plusieurs représentations

Deux systèmes différents peuvent décrire la même droite.

✗ « Les deux systèmes ne sont pas identiques, donc ils décrivent deux droites distinctes. »

✓ La droite (AB) de l'exemple est aussi représentée par

$$\begin{cases} x = 6 + 4t' \\ y = -1 - 2t' \\ z = 3 + 4t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}.$$

Le vecteur $(4, -2, 4)$ vaut $2\overrightarrow{AB}$, et le point $(6, -1, 3)$ est obtenu pour $t = 2$ dans la première représentation.

Compare d'abord les vecteurs directeurs, puis teste un point de l'une sur l'autre.

À toi : Une droite et un point

Dans un repère, $A(0, 3, 1)$ et $B(1, 1, 4)$. Écris une représentation paramétrique de la droite (AB), puis dis si $C(3, -3, 10)$ lui appartient. Rédige. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Prends $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et calcule ses coordonnées.
Indice 2
Remplace x, y, z par les coordonnées de C, puis résous chaque équation en t.
Indice 3
Conclus seulement après avoir comparé les trois valeurs de t.

Réponse
Le vecteur $\overrightarrow{AB}(1, -2, 3)$ est non nul : il dirige (AB). Une représentation paramétrique de (AB) est

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3 - 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pour C : $3 = t$ donne $t = 3$; $-3 = 3 - 2t$ donne $t = 3$; $10 = 1 + 3t$ donne $t = 3$.

Conclusion. La même valeur convient : $C \in (AB)$.

Déterminant de trois vecteurs

Un nombre pour trois vecteurs

Dans le plan, un déterminant décide si deux vecteurs sont colinéaires. Dans l'espace, la question naturelle porte sur **trois** vecteurs : sont-ils coplanaires ? Un nombre va encore décider. Il se calcule avec trois déterminants de deux vecteurs.

Devine : Trois vecteurs d'une même face

Trace la face $ABCD$ du cube à main levée. Dans le cube $ABCDEFGH$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils coplanaires ?

A. Non : $\overrightarrow{AC}$ est une diagonale.

Faux.

Faux. Une diagonale de la face $ABCD$ reste dans cette face.

B. On ne peut pas le savoir sans mesurer.

Faux.

Faux. Une relation entre vecteurs suffit ; aucune mesure n'est nécessaire.

C. Oui : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Juste.

C'est juste. Le troisième est une combinaison des deux premiers.

D. Non : ils ne sont pas colinéaires deux à deux.

Faux.

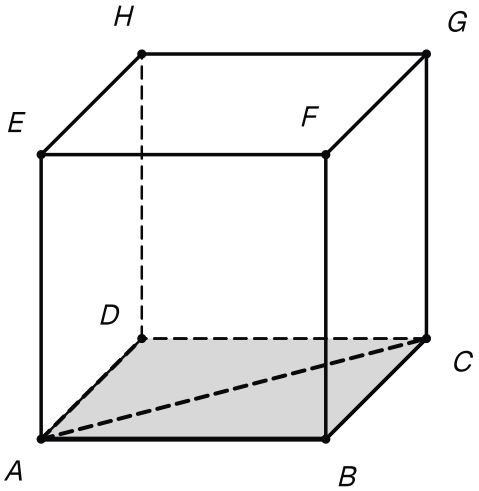
Faux. Trois vecteurs non colinéaires deux à deux peuvent être coplanaires ; c'est le cas ici.

Indice 1

Exprime $\overrightarrow{AC}$ à l'aide de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AD}$.

Correction

Par la règle du parallélogramme dans la face $ABCD$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. D'après le critère de coplanarité du chapitre précédent, les trois vecteurs sont coplanaires.



La face ABCD teintée, avec les vecteurs AB, AD et AC tracés depuis A.

Définition et premier calcul

Définition : Déterminant de trois vecteurs

Soit $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base de l'espace, et $\vec{u}(x,y,z)$, $\vec{v}(x',y',z')$, $\vec{w}(x'',y'',z'')$ trois vecteurs. Le **déterminant** de $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ dans cette base est le réel

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix},$$

où, pour tous réels a,b,c,d, $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$. Ce calcul est le **développement suivant la première colonne**.

Exemple : Un déterminant calculé pas à pas

Dans une base, $\vec{u}(1,2,-1)$, $\vec{v}(3,0,2)$ et $\vec{w}(-1,4,1)$. On écrit les vecteurs en colonnes, puis on développe suivant la première colonne :

$$\begin{aligned} \det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 1\times(-8) - 2\times 5 \\ &\quad + (-1)\times 12 \\ &= -30. \end{aligned}$$

Les signes $+,-,+$ portent sur les coordonnées 1, 2 et -1 de $\vec{u}$.

Vérifie : Le déterminant de trois vecteurs d'une face

Dans la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$, on a $\overrightarrow{AB}(1,0,0)$, $\overrightarrow{AD}(0,1,0)$ et $\overrightarrow{AC}(1,1,0)$. Combien vaut $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC})$?

A. 1

Faux.

Faux. Dans le premier terme, le déterminant de deux vecteurs vaut $1\times 0 - 0\times 1 = 0$, pas 1.

B. 2

Faux.

Faux. On ne somme pas les coordonnées : on développe suivant la première colonne.

C. -1

Faux.

Faux. Les trois termes du développement sont nuls.

D. 0

Juste.
C'est juste. Seul le premier terme peut compter, et son déterminant extrait est nul.

Indice 1
Les troisièmes coordonnées des trois vecteurs sont nulles : regarde chaque déterminant de deux vecteurs.

Correction
Développement suivant la première colonne :

$$\begin{aligned}
&\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}) \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&\quad + 0 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 1 \times 0 - 0 \times 0 + 0 \times (-1) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ces trois vecteurs sont coplanaires, et leur déterminant est nul : ce n'est pas un hasard.

Propriétés du déterminant

Que devient le déterminant si l'on échange deux vecteurs ? Et si l'on ajoute au troisième une combinaison des deux autres ? Trois règles répondent. Elles abrègent les calculs et serviront à démontrer le théorème de la section suivante.

Propriété : Propriétés du déterminant

Dans une base fixée, pour tous vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et tous réels α, β :

1. **Linéarité** : $\det(\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}) = \alpha \det(\vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w}) + \beta \det(\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w})$, et de même par rapport au deuxième et au troisième vecteur.
2. **Alternance** : échanger deux des trois vecteurs change le déterminant en son opposé. En particulier, un déterminant dont deux vecteurs sont égaux est nul.
3. On ne change pas un déterminant en ajoutant au troisième vecteur une combinaison linéaire des deux autres : $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} + \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Démonstration

Idée de la preuve. Chaque propriété se vérifie en écrivant les coordonnées et en développant. Pour la linéarité par rapport au premier vecteur, chaque terme du développement suivant la première colonne contient une seule coordonnée de ce vecteur, au premier degré : la propriété se lit directement. Pour les autres positions et pour l'échange de deux vecteurs, on développe les deux membres et on compare les six produits obtenus. Si deux vecteurs sont égaux, les échanger ne change rien, donc le déterminant est égal à son opposé : il est nul. Le point 3 découle des points 1 et 2, car $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{u}) = \det(\vec{u},\vec{v},\vec{v}) = 0$. Étapes omises : les développements complets.

Remarque : Ce que l'esquisse omet

La preuve ci-dessus est une **esquisse**. Seule la linéarité par rapport au premier vecteur se lit directement sur la définition. Pour les autres positions et pour l'échange de deux vecteurs, les développements complets des deux membres sont **omis**. Tu peux les vérifier toi-même en développant.

Exemple : Échanger deux vecteurs

Reprenons $\vec{u}(1,2,-1)$, $\vec{v}(3,0,2)$ et $\vec{w}(-1,4,1)$, avec $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = -30$.

Échange. Échangeons $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\begin{aligned}
&\det(\vec{v},\vec{u},\vec{w}) \\
&= \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 3\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&\quad - 0\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&\quad + 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\
&= 3 \times 6 - 0 \times 0 \\
&\quad + 2 \times 6 \\
&= 30.
\end{aligned}$$

On trouve l'opposé de -30 : l'échange a changé le signe, comme l'annonce l'alternance.

Troisième règle. Remplaçons $\vec{w}$ par $\vec{w} + \vec{u}$, de coordonnées $(0,6,0)$. On trouve :

$$\begin{aligned}
&\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}+\vec{u}) \\
&= 1 \times (-12) - 2 \times 0 \\
&\quad + (-1) \times 18 \\
&= -30.
\end{aligned}$$

Comme annoncé, le déterminant n'a pas changé.

Méthode et entraînement

Méthode : Calculer un déterminant et conclure

1. **Placer** les trois vecteurs en colonnes, dans l'ordre de l'énoncé.
2. **Développer** suivant la première colonne, avec les signes $+$, $-$, $+$.
3. **Calculer** chacun des trois déterminants de deux vecteurs, puis la somme.
4. **Conclure** avec le théorème « déterminant et coplanarité », énoncé juste après : déterminant nul, vecteurs coplanaires ; non nul, vecteurs non coplanaires, qui forment une base.

À toi : Un déterminant à développer

Dans une base, $\vec{u}(2,0,1)$, $\vec{v}(1,3,-1)$ et $\vec{w}(0,1,2)$. Calcule $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ en écrivant les trois déterminants de deux vecteurs. Rédige. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Écris la matrice avec $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ en colonnes.

Indice 2

Le terme du milieu est multiplié par la deuxième coordonnée de $\vec{u}$, qui vaut 0.

Indice 3

Calcule $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ avec la règle $ad-bc$.

Réponse

Développement suivant la première colonne :

$$\begin{aligned} &\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &\quad - 0\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &\quad + 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2\times 7 - 0\times 2 \\ &\quad + 1\times 1 \\ &= 15. \end{aligned}$$

Conclusion. Le déterminant vaut 15.

Déterminant et coplanarité

Observer

Devine : Un troisième vecteur bien particulier

Dans une base, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques, et $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$. À ton avis, que vaut $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$?

A. 0, quels que soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Juste.

C'est juste. La troisième propriété du déterminant permet d'enlever $\vec{u} + \vec{v}$ au troisième vecteur : il reste $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{0}) = 0$.

B. 1, quels que soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Faux.

Faux. Avec $\vec{u}(1, 0, 0)$ et $\vec{v}(0, 1, 0)$, on a $\vec{w}(1, 1, 0)$, et le déterminant vaut 0.

C. Un nombre non nul, qui dépend de $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Faux.

Faux. Ce déterminant est toujours nul, d'après la troisième propriété du déterminant.

Indice 1

Utilise la troisième propriété du déterminant avec $\alpha = \beta = -1$.

Correction

D'après la troisième propriété du déterminant, appliquée avec $\alpha = \beta = -1$:

$$\begin{aligned} &\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \\ &= \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} - \vec{u} - \vec{v}) \\ &= \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{0}). \end{aligned}$$

Or un déterminant dont un vecteur est nul vaut 0 : chaque déterminant de deux vecteurs du développement a une colonne nulle.

Conclusion. $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$, quels que soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Ici, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, et le déterminant est nul. Est-ce toujours ainsi, et dans les deux sens ? **Pourquoi est-ce vrai ?** Une relation linéaire entre les vecteurs annule le déterminant. La réciproque demande plus de travail.

Le théorème

Théorème : Déterminant et coplanarité

Dans une base de l'espace, trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** si et seulement si

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0.$$

Démonstration

Idée de la preuve. **Sens direct.** Si les trois vecteurs sont coplanaires, il existe des réels a, b, c non tous nuls tels que $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{0}$ (chapitre précédent). Si $c\neq 0$, alors $\vec{w}=-\dfrac{a}{c}\vec{u}-\dfrac{b}{c}\vec{v}$, et la propriété 3 du déterminant donne $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\det(\vec{u},\vec{v},\vec{0})=0$. Si $c=0$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, et la linéarité et l'alternance donnent encore un déterminant nul. **Réciproque.** Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, les trois vecteurs sont coplanaires. Sinon, un déterminant extrait de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est non nul, par exemple $xy'-x'y$. On choisit α et β tels que $\vec{w}'=\vec{w}-\alpha\vec{u}-\beta\vec{v}$ ait pour coordonnées $(0,0,\gamma)$. La propriété 3, puis le développement, donnent $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}')=\gamma(xy'-x'y)$. S'il est nul, $\gamma=0$ et $\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$: les vecteurs sont coplanaires. Étapes omises : le calcul du cas $c=0$, celui de α et β, les autres déterminants extraits.

Remarque : Ce que l'esquisse omet

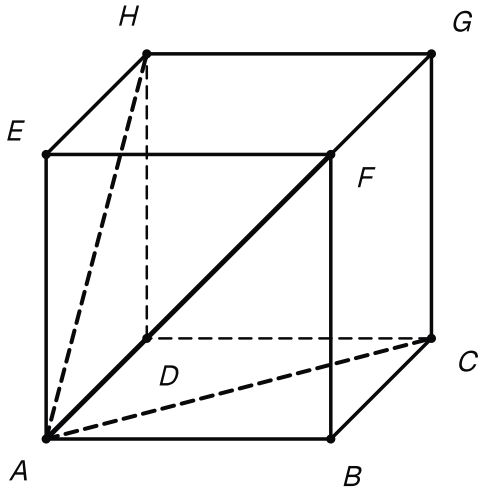
La preuve ci-dessus est une **esquisse**. Dans le sens direct, le cas $c=0$ est seulement indiqué : le calcul par linéarité et alternance est omis. Dans la réciproque, le calcul de α et β est omis : il passe par un système de deux équations. Les cas où un autre déterminant extrait est non nul sont omis aussi.

Exemple : Trois diagonales de faces du cube

Dans le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$, on a $\overrightarrow{AC}(1,1,0)$, $\overrightarrow{AH}(0,1,1)$ et $\overrightarrow{AF}(1,0,1)$. Développons :

$$\begin{aligned}
&\det(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AF})\\
&=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}\\
&=1\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}\\
&\quad+0\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}\\
&=1\times 1-1\times(-1)\\
&\quad+0\times(-1)\\
&=2.
\end{aligned}$$

Le déterminant est non nul : d'après le théorème « déterminant et coplanarité », ces trois vecteurs ne sont pas coplanaires. Aucune face du cube ne les contient tous les trois.



Trois diagonales de faces issues de A : [AC] dessous, [AH] à gauche, [AF] devant ; aucune face ne les contient toutes.

Base et points coplanaires

Deux conséquences suivent aussitôt. Une base, ce sont trois vecteurs non coplanaires. Quatre points sont coplanaires lorsque trois vecteurs issus de l'un d'eux le sont. **Pourquoi est-ce vrai ?** Il suffit de traduire ces deux définitions avec le théorème.

Propriété : Base, points coplanaires et déterminant

- Dans une base de l'espace, trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ forment une **base** si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$.
- Dans un repère, quatre points A, B, C, D sont **coplanaires** si et seulement si $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0$.

Démonstration

Étape 1. Par définition d'une base, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base si et seulement si les trois vecteurs ne sont pas coplanaires, c'est-à-dire, d'après le théorème « déterminant et coplanarité », si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$.

Étape 2. D'après le chapitre précédent, les points A, B, C, D sont coplanaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ sont coplanaires, c'est-à-dire, par le même théorème, si et seulement si $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le théorème « déterminant et coplanarité » remplace la recherche d'une relation par **un seul calcul**. Pour une base, on nie les deux membres : « non coplanaires » devient « déterminant non nul ». Pour quatre points, on passe aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, issus du même point A, puis on applique le théorème.

Vérifie : Le bon déterminant

Pour savoir si quatre points A, B, C, D sont coplanaires, quel déterminant calcules-tu ?

A. $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC})$

Faux.

Faux. Le point D n'y figure pas : ce calcul ne dit rien de lui.

B. $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$

Juste.

C'est juste. Trois vecteurs issus de A, qui font intervenir les quatre points.

C. Le déterminant des coordonnées de A, B et C

Faux.

Faux. Ce nombre dépend de l'origine du repère, et il ignore D.

D. $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$

Faux.

Faux. Ce déterminant est toujours nul, car $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$; de plus, D n'y figure pas.

Indice 1

Le point D doit figurer dans le calcul.

Correction

D'après la propriété « base, points coplanaires et déterminant », A, B, C, D sont coplanaires si et seulement si $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0$.

Exemple : Quatre points coplanaires

Dans un repère, $A(1, 0, 1)$, $B(2, 1, 0)$, $C(0, 2, 3)$ et $D(1, 3, 2)$. On calcule $\overrightarrow{AB}(1, 1, -1)$, $\overrightarrow{AC}(-1, 2, 2)$ et $\overrightarrow{AD}(0, 3, 1)$, puis :

$$\begin{aligned}
&\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \\
&= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&\quad + (-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\
&= 1 \times (-4) - 1 \times (-1) \\
&\quad + (-1) \times (-3) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Le déterminant est nul : les points A, B, C, D sont coplanaires.

Piège et À toi

Attention : Le déterminant se calcule avec des vecteurs

✗ Calculer le déterminant des coordonnées des points A, B, C de l'exemple :

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ z_A & z_B & z_C \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\
&= 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\
&\quad - 0\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\
&\quad + 1\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 1 \times 3 - 0 \times 6 \\
&\quad + 1 \times 4 \\
&= 7.
\end{aligned}$$

Ce nombre ne dit rien sur D, ni sur la coplanarité.

✓ Calculer $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$, avec les coordonnées des **vecteurs** : il vaut 0, et les quatre points sont coplanaires.

À toi : Quatre points et une base

Dans un repère, $P(0,1,1)$, $Q(1,1,0)$, $R(2,0,1)$ et $S(1,2,1)$. Les quatre points sont-ils coplanaires ? Rédige. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Calcule $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{PS}$.

Indice 2

Écris $\det(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS})$ et développe suivant la première colonne.

Indice 3

Conclus avec la propriété « base, points coplanaires et déterminant » : le déterminant est-il nul ?

Réponse

On a $\overrightarrow{PQ}(1, 0, -1)$, $\overrightarrow{PR}(2, -1, 0)$ et $\overrightarrow{PS}(1, 1, 0)$. Développement suivant la première colonne :

$$\begin{aligned}
&\det(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS}) \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&\quad - 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&\quad + (-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 1 \times 0 - 0 \times 0 \\
&\quad + (-1) \times 3 \\
&= -3.
\end{aligned}$$

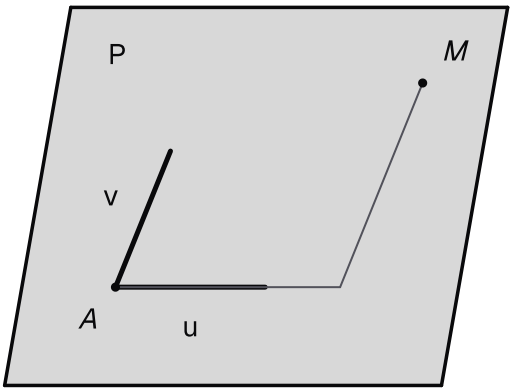
Conclusion. Le déterminant est non nul : les points P, Q, R, S ne sont pas coplanaires. Les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PS}$ forment donc une base.

Représentation paramétrique d'un plan

Deux paramètres

Sur une droite, un seul paramètre suffit : on avance ou on recule selon un vecteur. Un plan est plus large : on se déplace selon **deux** vecteurs non colinéaires, chacun avec son propre paramètre. On note ces paramètres s et t.

Petit rappel du chapitre précédent : un point M est dans le plan $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ si et seulement s'il existe deux réels s et t tels que $\overrightarrow{AM} = s\vec{u} + t\vec{v}$.



Dans le plan P(A, u, v), on atteint M en avançant selon u, puis selon v.

Devine : Un point du plan

Dans un repère, $A(1,0,0)$, $\vec{u}(1,1,0)$ et $\vec{v}(0,0,1)$. Quel point M vérifie $\overrightarrow{AM} = 2\vec{u} - \vec{v}$?

A. $M(3,2,1)$

Faux.

Faux. Le coefficient de $\vec{v}$ est -1 : la cote vaut -1.

B. $M(3,1,-1)$

Faux.

Faux. La deuxième coordonnée de $2\vec{u}$ est 2, pas 1.

C. $M(3,2,-1)$

Juste.

C'est juste. Le vecteur $2\vec{u} - \vec{v}$ a pour coordonnées $(2,2,-1)$, qu'on ajoute à celles de A.

D. $M(2,2,-1)$

Faux.

Faux. Ce sont les coordonnées de $2\vec{u} - \vec{v}$: il faut partir de A.

Indice 1

Calcule d'abord les coordonnées de $2\vec{u} - \vec{v}$.

Correction

Le vecteur $2\vec{u} - \vec{v}$ a pour coordonnées $(2,2,-1)$. Donc $x_M = 1 + 2 = 3$, $y_M = 0 + 2 = 2$ et $z_M = 0 - 1 = -1$: $M(3,2,-1)$. Ce point appartient au plan $P(A, \vec{u}, \vec{v})$.

Représentation paramétrique d'un plan

Chaque couple (s, t) donne un point du plan. **Pourquoi est-ce vrai** que tous ses points s'obtiennent ainsi ? Comme pour la droite, on traduit une égalité vectorielle en coordonnées.

Propriété : Représentation paramétrique d'un plan

Dans un repère, soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point, et $\vec{u}(a, b, c)$, $\vec{v}(a', b', c')$ deux vecteurs **non colinéaires**. Un point $M(x, y, z)$ appartient au plan $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ si et seulement s'il existe deux réels s et t tels que

$$\begin{cases} x = x_A + sa + ta' \\ y = y_A + sb + tb' \\ z = z_A + sc + tc' \end{cases}$$

Ce système, où s et t parcourent $\mathbb{R}$, est une **représentation paramétrique** du plan $P(A, \vec{u}, \vec{v})$.

Démonstration

Étape 1. D'après la caractérisation vectorielle d'un plan (chapitre précédent), M appartient à $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ si et seulement s'il existe deux réels s et t tels que $\overrightarrow{AM} = s\vec{u} + t\vec{v}$.

Étape 2. Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $(x - x_A, y - y_A, z - z_A)$ et le vecteur $s\vec{u} + t\vec{v}$ a pour coordonnées $(sa + ta', sb + tb', sc + tc')$ (coordonnées et opérations). L'égalité des coordonnées équivaut au système annoncé.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve suit le même chemin que pour la droite. La caractérisation vectorielle du plan fournit $\overrightarrow{AM} = s\vec{u} + t\vec{v}$. L'égalité des coordonnées transforme cette égalité en trois équations. Les **deux mêmes** réels s et t figurent dans les trois.

Vérifie : Deux vecteurs non colinéaires

Pourquoi l'énoncé exige-t-il que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne soient pas colinéaires ?

A. Pour que le point A appartienne au plan.
Faux.
Faux. Le point A est obtenu pour $s = t = 0$, dans tous les cas.

B. Pour que les paramètres s et t soient égaux.
Faux.
Faux. Les paramètres s et t varient indépendamment l'un de l'autre.

C. Pour que la représentation obtenue soit unique.
Faux.
Faux. Un plan a plusieurs représentations paramétriques.

D. Sinon, les points obtenus forment une droite, ou le seul point A.

Juste.
C'est juste. Si $\vec{v} = \lambda\vec{u}$, alors $s\vec{u} + t\vec{v} = (s + \lambda t)\vec{u}$: on reste sur une droite, ou en A si $\vec{u} = \vec{0}$.

Indice 1
Que devient $s\vec{u} + t\vec{v}$ si $\vec{v} = \lambda\vec{u}$?

Correction
Si $\vec{v} = \lambda\vec{u}$, alors $\overrightarrow{AM} = (s + \lambda t)\vec{u}$: tous les points obtenus sont sur la droite $D(A, \vec{u})$, ou réduits à A. Deux vecteurs non colinéaires sont nécessaires pour obtenir un plan.

Exemple : Le plan (ABC)

Dans un repère, $A(1, 2, 0)$, $B(3, 1, 1)$ et $C(0, 4, 2)$. On a $\overrightarrow{AB}(2, -1, 1)$ et $\overrightarrow{AC}(-1, 2, 2)$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires, car un de leurs déterminants extraits est non nul :

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0.$$

Une représentation paramétrique du plan (ABC) est

$$\begin{cases} x = 1 + 2s - t \\ y = 2 - s + 2t \\ z = s + 2t \end{cases} \quad s \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}.$$

Point $M(2, 3, 3)$. Les deux premières équations s'écrivent $2s - t = 1$ et $-s + 2t = 1$. La première donne $t = 2s - 1$; dans la seconde, $3s - 2 = 1$, donc $s = 1$ et $t = 1$. La troisième donne alors $z = 1 + 2 = 3$, la cote de M : M est dans le plan.

Point $N(2, 3, 0)$. On trouve encore $s = t = 1$, mais $3 \neq 0$: N n'est pas dans le plan.

Deux paramètres indépendants

Remarque : Deux paramètres, pas un

Les paramètres s et t varient **indépendamment**. Si l'on impose $s = t$, on obtient $\overrightarrow{AM} = t(\vec{u} + \vec{v})$: une seule droite du plan. Pour décrire le plan entier, il faut tous les couples (s, t) de réels.

À toi : Un plan et un point

Dans un repère, $A(0, 1, -1)$, $\vec{u}(1, 0, 2)$ et $\vec{v}(0, 1, 1)$. Écris une représentation paramétrique du plan $P(A, \vec{u}, \vec{v})$, puis dis si $E(2, 3, 5)$ lui appartient. Rédige. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Vérifie d'abord que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
Indice 2

Les deux premières équations donnent directement s et t.

Indice 3

Teste ces valeurs dans la troisième équation.

Réponse

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, car un de leurs déterminants extraits est non nul :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Une représentation paramétrique de $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ est

$$\begin{cases} x = s \\ y = 1 + t \\ z = -1 + 2s + t \end{cases}$$

avec $s \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$.

Pour E : la première équation donne $s = 2$, et la deuxième, $3 = 1 + t$, donne $t = 2$. Alors $-1 + 2 \times 2 + 2 = 5$, qui est la cote de E.

Conclusion. Le point E appartient au plan $P(A, \vec{u}, \vec{v})$.

Équation cartésienne d'un plan

Une face, une équation

Devine : Les sommets de cote nulle

Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ du cube, quels sommets vérifient $z = 0$?

A. Les sommets A, B, C, D de la face du dessous

Juste.

C'est juste. Leurs cotes sont nulles, alors que celles de E, F, G, H valent 1.

B. Les sommets E, F, G, H de la face du dessus

Faux.

Faux. Ces sommets ont pour cote 1 : ils vérifient $z = 1$.

C. Les sommets A, B, F, E de la face $ABFE$

Faux.

Faux. Ces sommets vérifient $y = 0$.

D. Les sommets A, D, H, E de la face $ADHE$

Faux.

Faux. Ces sommets vérifient $x = 0$.

Indice 1

Relis les coordonnées des huit sommets dans ce repère.

Correction
Les sommets $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(1,1,0)$ et $D(0,1,0)$ ont une cote nulle. Les quatre autres ont pour cote 1. Une seule équation, $z=0$, distingue la face $ABCD$.

Une seule équation semble décrire un plan entier. **Pourquoi est-ce vrai ?** Un point M est dans le plan $P(A,\vec{u},\vec{v})$ lorsque $\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires, c'est-à-dire lorsque leur déterminant est nul. Développé, ce déterminant est une expression du premier degré en x, y, z.

Équation d'un plan, et réciproque

Théorème : Équation cartésienne d'un plan

Dans un repère, tout plan P admet une équation de la forme

$$ax+by+cz+d=0, \quad \text{avec } (a,b,c)\neq(0,0,0) :$$

un point $M(x,y,z)$ appartient à P si et seulement si ses coordonnées vérifient cette égalité. Une telle équation est une **équation cartésienne** du plan P.

Démonstration

Étape 1. Écrivons $P=P(A,\vec{u},\vec{v})$, avec $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ et $\vec{v}(\alpha',\beta',\gamma')$ non colinéaires. Par la caractérisation vectorielle d'un plan et le critère de coplanarité (chapitre précédent), $M\in P$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ sont coplanaires, c'est-à-dire si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{v})=0$ (déterminant et coplanarité).

Étape 2. Le développement suivant la première colonne donne

$$\det(\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{v}) = a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A),$$

avec $a=\beta\gamma'-\beta'\gamma$, $b=-(\alpha\gamma'-\alpha'\gamma)$ et $c=\alpha\beta'-\alpha'\beta$. On pose $d=-ax_A-by_A-cz_A$: ainsi $M\in P$ si et seulement si $ax+by+cz+d=0$.

Étape 3. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires : leurs trois déterminants extraits ne sont pas tous nuls (colinéarité en coordonnées), donc $(a,b,c)\neq(0,0,0)$.

Inversement, une équation $ax+by+cz+d=0$ décrit-elle toujours un plan ? **Pourquoi est-ce vrai ?** On fabrique un point et deux vecteurs non colinéaires, puis on retrouve l'équation par un déterminant.

Théorème : Plan défini par une équation cartésienne

Dans un repère, soit a, b, c, d quatre réels, avec $(a,b,c)\neq(0,0,0)$. L'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $ax+by+cz+d=0$ est un **plan**.

Démonstration

Étape 1. Supposons $a \neq 0$. Soit $A\left(-\frac{d}{a}, 0, 0\right)$, $\vec{u}(-b, a, 0)$ et $\vec{v}(-c, 0, a)$. Le déterminant extrait $\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a^2$ est non nul : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires (colinéarité en coordonnées), et le plan $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ existe.

Étape 2. Pour tout point $M(x, y, z)$, le développement suivant la première colonne donne $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = a^2\left(x + \frac{d}{a}\right) + aby + acz = a(ax + by + cz + d)$. Par la caractérisation vectorielle d'un plan, le critère de coplanarité (chapitre précédent) et le théorème « déterminant et coplanarité », $M \in P(A, \vec{u}, \vec{v})$ si et seulement si ce déterminant est nul, c'est-à-dire, comme $a \neq 0$, si et seulement si $ax + by + cz + d = 0$.

Étape 3. Si $a = 0$ et $b \neq 0$, les vecteurs $\vec{j}, \vec{i}, \vec{k}$ restent non coplanaires : dans le repère $(O, \vec{j}, \vec{i}, \vec{k})$, le point M a pour coordonnées $(X, Y, Z) = (y, x, z)$, et l'ensemble a pour équation $bX + aY + cZ + d = 0$. Les étapes 1 et 2 montrent que c'est un plan. Si $a = b = 0$, on emploie de même le repère $(O, \vec{k}, \vec{j}, \vec{i})$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Dans un sens, on **développe** $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v})$: les coefficients a, b, c sont les trois déterminants extraits de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, au signe près. Ils ne sont pas tous nuls, car $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Dans l'autre sens, si $a \neq 0$, on **construit** un point et deux vecteurs qui dirigent le plan. Le déterminant vaut alors $a(ax + by + cz + d)$. Si $a = 0$, on change l'ordre des vecteurs de la base.

Vérifie : Deux vecteurs construits

Dans la preuve de la réciproque, pourquoi $\vec{u}(-b, a, 0)$ et $\vec{v}(-c, 0, a)$ ne sont-ils pas colinéaires ?

A. Parce que le réel d est non nul.

Faux.

Faux. Le réel d n'intervient pas dans $\vec{u}$ et $\vec{v}$; il peut être nul.

B. Un de leurs déterminants extraits vaut a^2, non nul.

Juste.

C'est juste. Avec $a \neq 0$, ce déterminant non nul suffit, d'après la colinéarité en coordonnées.

C. Parce que b et c sont tous deux non nuls.

Faux.

Faux. Les réels b et c peuvent être nuls ; seule l'hypothèse $a \neq 0$ sert.

D. Parce que leurs troisièmes coordonnées diffèrent.

Faux.

Faux. Des coordonnées différentes n'empêchent pas la colinéarité : $(1, 1, 1)$ et $(2, 2, 2)$ sont colinéaires.

Indice 1

Calcule le déterminant extrait formé des deuxièmes et troisièmes coordonnées.

Correction

Le déterminant extrait des deuxièmes et troisièmes coordonnées vaut

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a^2.$$

Comme $a \neq 0$, il est non nul. D'après la colinéarité en coordonnées, les deux vecteurs construits ne sont donc pas colinéaires.

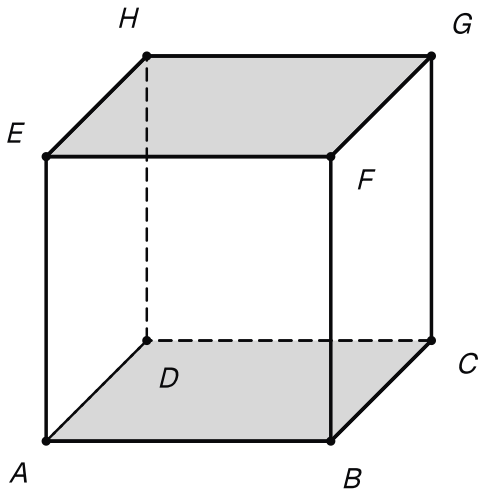
Plans particuliers et méthode

Exemple : Des équations très simples

Dans le repère du cube, l'équation $z = 0$ s'écrit $0x + 0y + 1z + 0 = 0$, avec $(0, 0, 1) \neq (0, 0, 0)$: elle décrit un plan. Il contient A, B, C, D : c'est le plan de la face $ABCD$.

L'équation $x = 2$, soit $1x + 0y + 0z - 2 = 0$, décrit aussi un plan. Il contient par exemple $(2, 0, 0)$, $(2, 1, 0)$ et $(2, 0, 1)$.

Contre-exemple : l'équation $0x + 0y + 0z + 3 = 0$ n'a aucune solution, et un plan n'est jamais vide. L'hypothèse $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ est indispensable.



Deux faces du cube et leurs équations : z = 0 pour la face du dessous, z = 1 pour celle du dessus.

Méthode : Déterminer une équation cartésienne d'un plan

1. **Choisir** un point A du plan, puis deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui le dirigent, non colinéaires ; pour le plan (ABC), on prend $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. **Poser** la condition $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$ pour un point $M(x, y, z)$.
3. **Développer** suivant la première colonne, puis simplifier en $ax + by + cz + d = 0$.
4. **Contrôler** l'équation avec chaque point donné : une erreur de signe se repère tout de suite.

Exemple complet et À toi

Exemple : L'équation du plan (ABC)

Dans un repère, $A(1, 0, 2)$, $B(2, 1, 0)$ et $C(0, 3, 1)$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}(1, 1, -2)$ et $\overrightarrow{AC}(-1, 3, -1)$ ne sont pas colinéaires :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Soit $M(x, y, z)$; on a $\overrightarrow{AM}(x - 1, y, z - 2)$, et

$$\begin{aligned} &\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \\ &= \begin{vmatrix} x - 1 & 1 & -1 \\ y & 1 & 3 \\ z - 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (x - 1) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\ &\quad - y \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\ &\quad + (z - 2) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 5(x - 1) - y \times (-3) \\ &\quad + 4(z - 2) \\ &= 5x + 3y + 4z - 13. \end{aligned}$$

Une équation du plan (ABC) est donc $5x + 3y + 4z - 13 = 0$.

Contrôle : $5 + 0 + 8 - 13 = 0$ pour A, $10 + 3 + 0 - 13 = 0$ pour B, $0 + 9 + 4 - 13 = 0$ pour C.

Attention : Une équation, un plan

✗ « Dans l'espace, l'équation $x + y - 1 = 0$ décrit une droite. »

✓ Dans l'espace, c'est l'équation d'un **plan**, car $(1, 1, 0) \neq (0, 0, 0)$. Il contient par exemple $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(1, 0, 5)$, qui ne sont pas alignés. Au tronc commun, dans le plan, une équation $ax + by + c = 0$ décrivait une droite. Dans l'espace, une droite demande **deux** équations, ou une représentation paramétrique.

À toi : L'équation d'un plan par trois points

Dans un repère, $A(0,1,2)$, $B(1,1,0)$ et $C(2,0,1)$. Détermine une équation cartésienne du plan (ABC). Rédige. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Calcule $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, et vérifie qu'ils ne sont pas colinéaires.
Indice 2
Écris $\det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=0$ avec $\overrightarrow{AM}(x,y-1,z-2)$.
Indice 3
Après le développement, contrôle l'équation avec A, B et C.

Réponse
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}(1,0,-2)$ et $\overrightarrow{AC}(2,-1,-1)$ ne sont pas colinéaires :

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Soit $M(x,y,z)$; on a $\overrightarrow{AM}(x,y-1,z-2)$. Alors

$$\begin{aligned}
&\det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\\
&=\begin{vmatrix} x & 1 & 2\\ y-1 & 0 & -1\\ z-2 & -2 & -1\end{vmatrix}\\
&= x\begin{vmatrix}0 & -1\\ -2 & -1\end{vmatrix}\\
&\quad -(y-1)\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & -1\end{vmatrix}\\
&\quad +(z-2)\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix}\\
&= -2x-3(y-1)\\
&\quad -(z-2)\\
&= -2x-3y-z+5.
\end{aligned}$$

Le point M est dans le plan (ABC) si et seulement si ce déterminant est nul, c'est-à-dire si et seulement si $2x+3y+z-5=0$.

Conclusion. Une équation du plan (ABC) est $2x+3y+z-5=0$. Contrôle : $0+3+2-5=0$, $2+3+0-5=0$ et $4+0+1-5=0$.

Vecteurs de direction d'un plan, équations d'une droite

Rester dans le plan

Devine : Un déplacement qui reste dans le plan

Dans un repère, le plan P a pour équation $x+y+z-1=0$ et contient $A(1,0,0)$. Pour quel vecteur $\vec{w}$ le point M tel que $\overrightarrow{AM}=\vec{w}$ reste-t-il dans P ?

A. $\vec{w}(1,0,0)$

Faux.

Faux. Le point $M(2,0,0)$ donne $2-1=1\neq 0$.

B. $\vec{w}(0,0,1)$

Faux.

Faux. Le point $M(1,0,1)$ donne $1+1-1=1\neq 0$.

C. $\vec{w}(1,-1,0)$

Juste.

C'est juste. Le point $M(2,-1,0)$ vérifie $2-1+0-1=0$.

D. $\vec{w}(1,1,1)$

Faux.

Faux. Le point $M(2,1,1)$ donne $2+1+1-1=3\neq 0$.

Indice 1

Calcule les coordonnées de M, puis remplace-les dans l'équation.

Correction

Avec $\vec{w}(1,-1,0)$, on obtient $M(2,-1,0)$, et $2+(-1)+0-1=0$: $M\in P$. Remarque la somme des coordonnées de $\vec{w}$: $1-1+0=0$.

Rappel du chapitre précédent : un **vecteur de direction** du plan $P(A,\vec{u},\vec{v})$ est un vecteur coplanaire avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Pour $\vec{w}(1,-1,0)$, la somme des coordonnées est nulle, comme les coefficients de l'équation le demandent. **Pourquoi est-ce vrai** en général ? Quand on ajoute $\vec{w}$ à un point du plan, la constante d disparaît du calcul : seule compte l'expression $a\alpha+b\beta+c\gamma$.

Vecteurs de direction, droite par deux équations

Propriété : Vecteurs de direction d'un plan donné par une équation

Dans un repère, soit $P=P(A,\vec{u},\vec{v})$ un plan d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$, et $\vec{w}(\alpha,\beta,\gamma)$ un vecteur. Le vecteur $\vec{w}$ est coplanaire avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si et seulement si

$$a\alpha+b\beta+c\gamma=0.$$

On dit alors que $\vec{w}$ est un **vecteur de direction** du plan P.

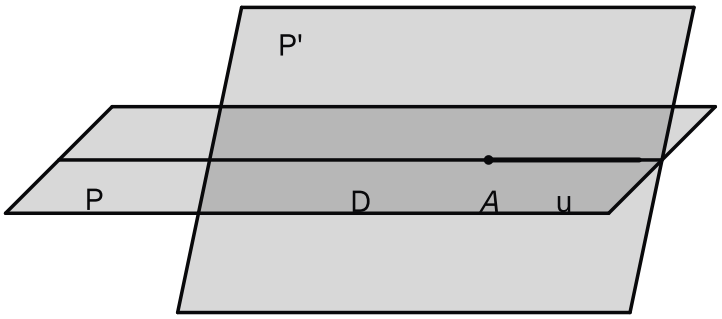
Démonstration

Étape 1. Soit M le point tel que $\overrightarrow{AM}=\vec{w}$. Par la caractérisation vectorielle d'un plan et le critère de coplanarité (chapitre précédent), $\vec{w}$ est coplanaire avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si et seulement si $M\in P$.

Étape 2. Le point M a pour coordonnées $(x_A+\alpha, y_A+\beta, z_A+\gamma)$ (coordonnées et opérations). Il appartient à P si et seulement si $a(x_A+\alpha)+b(y_A+\beta)+c(z_A+\gamma)+d=0$, c'est-à-dire $(a\alpha+b\beta+c\gamma)+(ax_A+by_A+cz_A+d)=0$.

Étape 3. Comme $A\in P$, on a $ax_A+by_A+cz_A+d=0$. Donc $M\in P$ si et seulement si $a\alpha+b\beta+c\gamma=0$.

Une droite de l'espace peut aussi se décrire comme l'intersection de deux plans. Prends un vecteur directeur dont les trois coordonnées sont non nulles. **Pourquoi est-ce vrai** qu'on peut alors éliminer t ? Chaque équation donne t sous la forme d'un quotient : les trois quotients sont égaux.



La droite D, dirigée par u, est la ligne commune de deux plans qui se croisent.

Propriété : Système d'équations cartésiennes d'une droite

Dans un repère, soit $D=D(A,\vec{u})$, avec $A(x_A,y_A,z_A)$ et $\vec{u}(a,b,c)$, où les réels a, b, c sont **tous non nuls**. Un point $M(x,y,z)$ appartient à D si et seulement si

$$\frac{x-x_A}{a}=\frac{y-y_A}{b}=\frac{z-z_A}{c}.$$

Ce système de deux équations est un **système d'équations cartésiennes** de la droite D ; il présente D comme l'intersection de deux plans.

Démonstration

Étape 1. Si $M\in D$, la représentation paramétrique de D donne un réel t tel que $x-x_A=ta$, $y-y_A=tb$ et $z-z_A=tc$. Comme a, b, c sont non nuls, les trois quotients valent t.

Étape 2. Réciproquement, si les trois quotients sont égaux, notons t leur valeur commune : $x=x_A+ta$, $y=y_A+tb$ et $z=z_A+tc$, donc $M\in D$ par la représentation paramétrique.

Étape 3. Comme a, b, c sont non nuls, le système équivaut à $b(x - x_A) - a(y - y_A) = 0$ et $c(y - y_A) - b(z - z_A) = 0$. Les triplets de coefficients $(b, -a, 0)$ et $(0, c, -b)$ sont non nuls : ce sont deux équations cartésiennes de plans (plan défini par une équation), et D est formée des points communs à ces deux plans.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Vecteur de direction. On **part d'un point** A du plan. On teste le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{w}$. Dans le calcul, le terme $ax_A + by_A + cz_A + d$ est nul, car $A \in P$.

Droite par deux équations. La représentation paramétrique donne t trois fois, sous forme de trois quotients. Leur égalité caractérise les points de la droite. Chaque égalité de deux quotients, multipliée par les dénominateurs, est une équation de plan.

Vérifie : Un terme qui disparaît

Dans la preuve sur les vecteurs de direction, pourquoi le terme $ax_A + by_A + cz_A + d$ disparaît-il ?

A. Parce que le réel d est nul.

Faux.

Faux. Le réel d est quelconque ; c'est toute l'expression qui est nulle.

B. Parce que $\vec{w}$ est un vecteur de direction.

Faux.

Faux. C'est justement ce qu'on veut caractériser : on ne peut pas le supposer.

C. Parce que les coordonnées de A sont nulles.

Faux.

Faux. Le point A est un point quelconque du plan, pas l'origine.

D. Parce que le point A appartient au plan P.

Juste.

C'est juste. Les coordonnées de A vérifient l'équation de P : ce terme vaut 0.

Indice 1

Que sait-on du point A par rapport au plan P ?

Correction

Le point A est un point de P, donc $ax_A + by_A + cz_A + d = 0$. Il reste : $M \in P$ si et seulement si $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$.

Un cas à part, une méthode

Exemple : Quand une coordonnée est nulle

Dans un repère, soit $D = D(A, \vec{u})$, avec $A(1, 2, 3)$ et $\vec{u}(2, 0, -1)$. Le quotient $\dfrac{y-2}{0}$ n'a pas de sens : l'hypothèse « coordonnées toutes non nulles » manque. On revient à la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 \\ z = 3 - t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

La deuxième équation donne $y = 2$. La troisième donne $t = 3 - z$; dans la première, $x = 1 + 2(3 - z)$, soit $x + 2z - 7 = 0$.

Un système d'équations cartésiennes de D est donc formé de $y = 2$ et de $x + 2z - 7 = 0$.

Méthode : Passer d'une équation à une représentation paramétrique

1. **Repérer** dans l'équation $ax + by + cz + d = 0$ un coefficient non nul, par exemple celui de x.
2. **Isoler** l'inconnue correspondante ; les deux autres deviennent les paramètres s et t.
3. **Lire** sur le système obtenu un point, pour $s = t = 0$, et deux vecteurs de direction non colinéaires.
4. **En sens inverse**, éliminer s et t entre les trois équations, ou développer $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Exemple et À toi

Exemple : De l'équation à la représentation

Dans un repère, le plan P a pour équation $x - 2y + 3z - 4 = 0$. Le coefficient de x vaut 1 : on isole $x = 4 + 2y - 3z$. On pose $y = s$ et $z = t$:

$$\begin{cases} x = 4 + 2s - 3t \\ y = s \\ z = t \end{cases} \qquad s \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}.$$

On lit le point $(4, 0, 0)$ et les vecteurs $\vec{u}(2, 1, 0)$, $\vec{v}(-3, 0, 1)$.

Contrôle par les vecteurs de direction : $2 - 2 \times 1 + 3 \times 0 = 0$ et $-3 - 2 \times 0 + 3 \times 1 = 0$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires :

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

À toi : Une droite par deux équations

Dans un repère, soit $D = D(A, \vec{u})$, avec $A(1, -1, 2)$ et $\vec{u}(2, 3, -1)$. Écris un système d'équations cartésiennes de D. Rédige. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Les trois coordonnées de $\vec{u}$ sont non nulles : écris l'égalité des trois quotients.

Indice 2

Sépare-la en deux égalités : la première avec x et y, la seconde avec y et z.

Indice 3

Multiplie chaque égalité par ses dénominateurs ; attention au signe de -1.

Réponse

Comme 2, 3 et -1 sont non nuls, $M(x,y,z) \in D$ si et seulement si

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{-1}.$$

Première égalité. Elle donne $3(x-1) = 2(y+1)$, soit $3x - 2y - 5 = 0$.

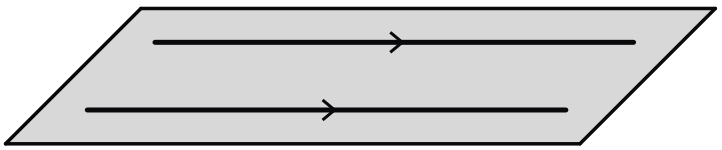
Seconde égalité. Elle donne $-(y+1) = 3(z-2)$, soit $y + 3z - 5 = 0$.

Conclusion. Un système d'équations cartésiennes de D est formé de $3x - 2y - 5 = 0$ et de $y + 3z - 5 = 0$. Contrôle avec A : $3 + 2 - 5 = 0$ et $-1 + 6 - 5 = 0$.

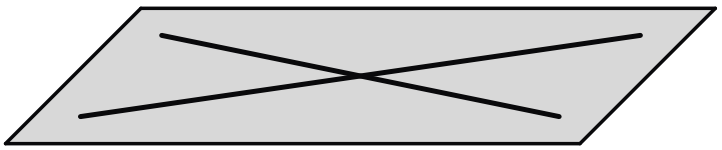
Position relative de deux droites

Rappel et prédiction

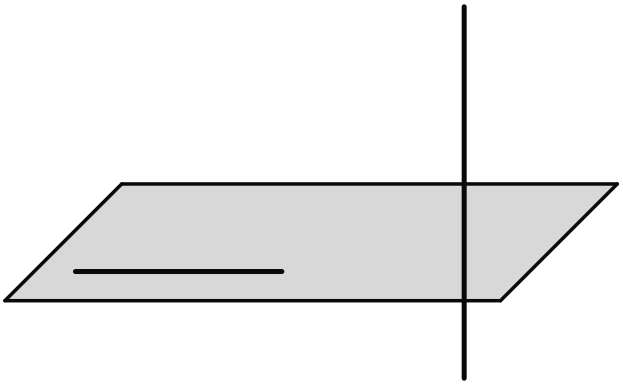
Petit rappel du tronc commun. Deux droites de l'espace sont soit **coplanaires**, soit **non coplanaires**. Coplanaires, elles sont parallèles, strictement ou confondues, ou bien sécantes en un point. Non coplanaires, elles n'ont aucun point commun et ne sont pas parallèles.



Deux droites coplanaires et parallèles : elles ne se croisent jamais dans leur plan.



Deux droites coplanaires et sécantes : un seul point commun.



Deux droites non coplanaires : ni parallèles ni sécantes.

Devine : Deux arêtes du cube

Trace le cube à main levée et repère les arêtes $[AE]$ et $[BC]$. Dans le cube $ABCDEFGH$, quelle est la position relative des droites (AE) et (BC) ?

A. Elles sont non coplanaires.

Juste.

C'est juste. Elles ne sont ni parallèles ni sécantes : tu le prouveras par un calcul juste après.

B. Elles sont sécantes en un point.

Faux.

Faux. Dans le repère du cube, un point de (AE) s'écrit $(0, 0, t)$ et un point de (BC) s'écrit $(1, t', 0)$: l'abscisse empêche toute coïncidence.

C. Elles sont strictement parallèles.

Faux.

Faux. Leurs vecteurs directeurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires.

D. Elles sont confondues.

Faux.

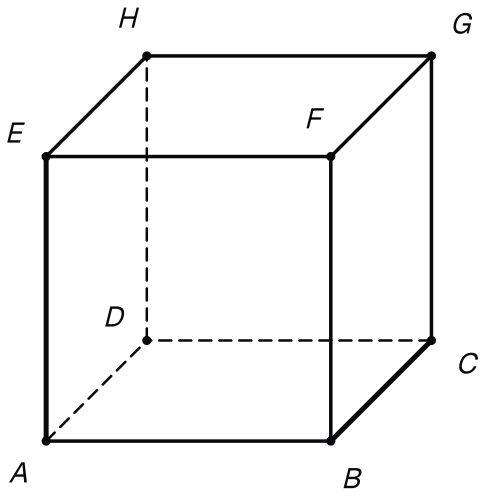
Faux. Leurs vecteurs directeurs ne sont même pas colinéaires.

Indice 1

Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont-ils colinéaires ?

Correction

Dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, $\overrightarrow{AE}(0,0,1)$ et $\overrightarrow{BC}(0,1,0)$ ne sont pas colinéaires : les droites ne sont pas parallèles. Le théorème qui suit montrera, par un déterminant, qu'elles ne sont pas coplanaires.



Les arêtes [AE] et [BC] du cube, mises en valeur.

Le théorème

Deux droites $D(A, \vec{u})$ et $D(B, \vec{v})$ sont dans un même plan exactement quand le vecteur $\overrightarrow{AB}$, qui les relie, est coplanaire avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$. **Pourquoi est-ce vrai ?** Un plan qui contient les deux droites contient A, B et leurs deux directions.

Théorème : Droites coplanaires

Dans un repère, soit $D = D(A, \vec{u})$ et $D' = D(B, \vec{v})$ deux droites. Les droites D et D' sont **coplanaires** si et seulement si

$$\det(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}) = 0.$$

Démonstration

Étape 1. Supposons D et D' contenues dans un même plan. Soit A_1 et B_1 les points tels que $\overrightarrow{AA_1} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{BB_1} = \vec{v}$. Les points A, B, A_1, B_1 sont dans ce plan, donc $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AB_1}) = 0$ (points coplanaires et déterminant). Or $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB} + \vec{v}$; la propriété 3 du déterminant donne $\det(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Étape 2. Réciproquement, supposons ce déterminant nul. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, les droites sont parallèles (chapitre précédent), donc coplanaires (tronc commun). Sinon, $\overrightarrow{AB}$ est coplanaire avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (déterminant et coplanarité) : il existe des réels λ et μ tels que $\overrightarrow{AB} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ (critère de coplanarité). Soit M un point de D' et t le réel tel que $\overrightarrow{BM} = t\vec{v}$: alors $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + (\mu + t)\vec{v}$. La droite D' est donc contenue dans le plan $P(A, \vec{u}, \vec{v})$, qui contient aussi D.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Sens direct. On prend quatre points du plan commun : A, B, et les points obtenus en ajoutant $\vec{u}$ à A et $\vec{v}$ à B. Ces quatre points sont coplanaires : le déterminant des trois vecteurs qui les relient à A est nul. La troisième propriété du déterminant le ramène à $\det(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v})$.

Réciproque. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, les droites sont parallèles. Sinon, $\overrightarrow{AB}$ s'écrit avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Alors tout point de D' tombe dans le plan $P(A, \vec{u}, \vec{v})$.

Vérifie : Le cas des vecteurs colinéaires

Dans la réciproque, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, quel argument conclut ?

A. On ne peut rien conclure dans ce cas.

Faux.

Faux. Le parallélisme suffit à conclure.

B. Les droites sont parallèles, donc coplanaires.

Juste.

C'est juste. Deux droites parallèles sont toujours dans un même plan, d'après le tronc commun.

C. Le déterminant est nul, donc elles sont sécantes.

Faux.

Faux. Un déterminant nul ne signifie pas « sécantes » : deux droites parallèles le rendent nul aussi.

D. Les droites sont alors confondues.

Faux.

Faux. Elles peuvent être strictement parallèles.

Indice 1

Que sais-tu de deux droites dont les vecteurs directeurs sont colinéaires ?

Correction
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, les droites D et D' sont parallèles (chapitre précédent). Deux droites parallèles sont coplanaires (tronc commun).

Exemple : Deux arêtes non coplanaires

Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, la droite (AE) passe par $A(0,0,0)$, avec $\vec{u} = \overrightarrow{AE}$, de coordonnées $(0,0,1)$. La droite (BC) passe par $B(1,0,0)$, avec $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, de coordonnées $(0,1,0)$.

On a $\overrightarrow{AB}(1,0,0)$, et

$$\begin{aligned}
&\det(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}) \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&\quad - 0 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&\quad + 0 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 1 \times (-1) - 0 \times 0 \\
&\quad + 0 \times 0 \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Le déterminant est non nul : les droites (AE) et (BC) ne sont pas coplanaires. Aucun dessin ne pouvait le prouver ; le calcul le fait.

Méthode et exemple

Méthode : Étudier la position relative de deux droites

1. **Comparer** les vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. S'ils sont colinéaires, les droites sont parallèles : un point de l'une, testé sur l'autre, dit si elles sont confondues.
2. **Sinon**, calculer $\det(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v})$: non nul, les droites sont non coplanaires.
3. **S'il est nul**, elles sont sécantes : résoudre le système des deux représentations, avec deux paramètres t et t'.
4. **Conclure** par une phrase, en donnant le point d'intersection.

Exemple : Deux droites sécantes

Dans un repère, D passe par $A(1,0,3)$ avec $\vec{u}(1,2,-1)$, et D' passe par $B(4,1,0)$ avec $\vec{v}(2,-1,-2)$.

Parallélisme. Un déterminant extrait est non nul :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0.$$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires : les droites ne sont pas parallèles.

Coplanarité. Avec $\overrightarrow{AB}(3, 1, -3)$:

$$\begin{aligned} &\det(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}) \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \\ &\quad - 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \\ &\quad + (-3) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 3 \times (-5) - 1 \times 0 \\ &\quad + (-3) \times (-5) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Les droites sont coplanaires et non parallèles : elles sont donc sécantes.

Point commun. On résout

$$\begin{cases} 1 + t = 4 + 2t' \\ 2t = 1 - t' \\ 3 - t = -2t' \end{cases}$$

La deuxième équation donne $t' = 1 - 2t$. Dans la première, $1 + t = 6 - 4t$, donc $t = 1$ et $t' = -1$. La troisième est vérifiée : $3 - 1 = -2 \times (-1)$.

Le point d'intersection est $(2, 2, 2)$.

Piège et À toi

Attention : Deux droites, deux paramètres

✗ Écrire la même lettre t pour les deux droites de l'exemple : $1 + t = 4 + 2t$ donne $t = -3$, et $2t = 1 - t$ donne $t = \dfrac{1}{3}$. On conclut à tort qu'il n'y a aucun point commun.

✓ Les deux droites sont parcourues indépendamment : le point commun peut être atteint pour deux valeurs différentes. Avec t et t', on trouve $t = 1, t' = -1$, et le point $(2, 2, 2)$.

À toi : Deux droites à étudier

Dans un repère, on donne

$$D : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = 2 + t \end{cases}$$

et

$$D' : \begin{cases} x = 3 + t' \\ y = 1 + t' \quad t' \in \mathbb{R}. \\ z = -t' \end{cases}$$

Étudie la position relative de D et D'. Rédige. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Lis un point et un vecteur directeur sur chaque représentation.

Indice 2

Teste la colinéarité des deux vecteurs directeurs par un déterminant extrait.

Indice 3

Calcule ensuite $\det(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v})$ en développant suivant la première colonne.

Réponse

La droite D passe par $A(1, 0, 2)$ avec $\vec{u}(2, -1, 1)$; la droite D' passe par $B(3, 1, 0)$ avec $\vec{v}(1, 1, -1)$.

Parallélisme. Un déterminant extrait est non nul :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires : les droites ne sont pas parallèles.

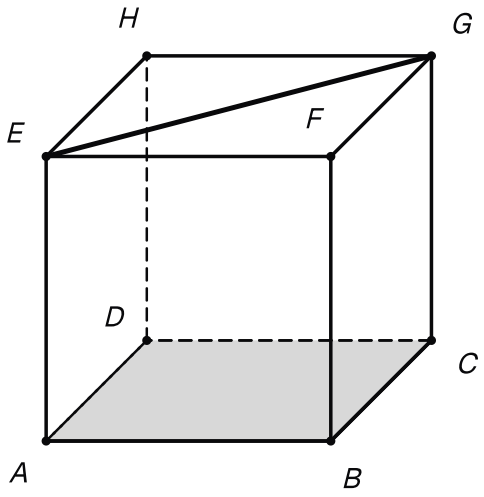
Coplanarité. Avec $\overrightarrow{AB}(2, 1, -2)$:

$$\begin{aligned} &\det(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}) \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &\quad - 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &\quad + (-2) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times 0 - 1 \times (-3) \\ &\quad + (-2) \times 3 \\ &= -3. \end{aligned}$$

Conclusion. Le déterminant est non nul : d'après le théorème « droites coplanaires », D et D' ne sont pas coplanaires.

Position relative d'une droite et d'un plan

Une diagonale au-dessus d'une face



La face ABCD coloriée et la diagonale [EG] de la face du dessus.

Devine : Une diagonale de la face du dessus

Trace le cube à main levée et colorie la face $ABCD$. Dans le repère du cube, le plan de la face $ABCD$ a pour équation $z = 0$. La droite (EG) passe par $E(0, 0, 1)$ et $G(1, 1, 1)$. Quelle est sa position par rapport à ce plan ?

A. Elle est contenue dans ce plan.

Faux.

Faux. Le point E a pour cote 1 : il n'est pas dans le plan.

B. On ne peut pas conclure sans figure.

Faux.

Faux. Les coordonnées suffisent pour conclure.

C. Elle lui est strictement parallèle.

Juste.

C'est juste. Tous ses points ont pour cote 1 : aucun ne vérifie $z = 0$.

D. Elle le coupe en un seul point.

Faux.

Faux. Un point commun aurait une cote nulle ; or tous les points de (EG) ont pour cote 1.

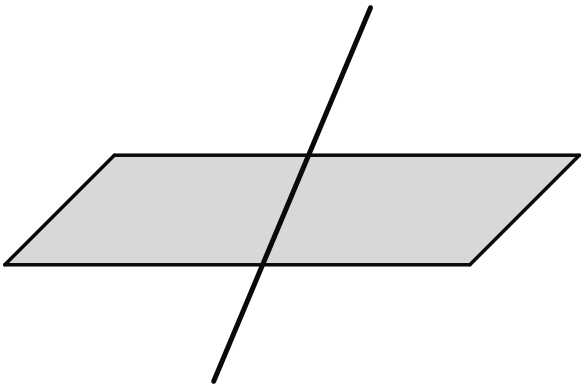
Indice 1

Écris une représentation paramétrique de (EG) et regarde la cote.

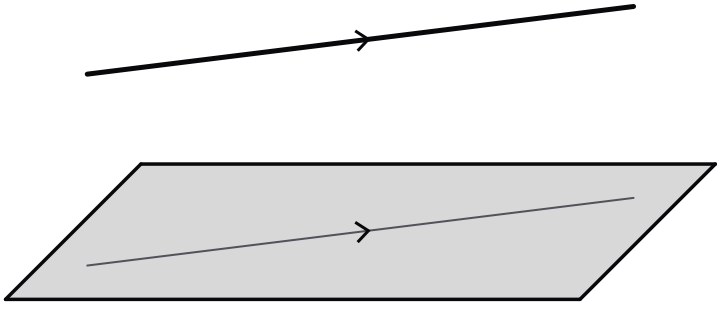
Correction

> Le vecteur $\overrightarrow{EG}$ a pour coordonnées $(1, 1, 0)$. Une représentation de (EG) est $x = t, y = t, z = 1$, avec $t \in \mathbb{R}$. En remplaçant dans $z = 0$, on obtient $1 = 0$: aucune solution. La droite (EG) est strictement parallèle au plan de la face $ABCD$.

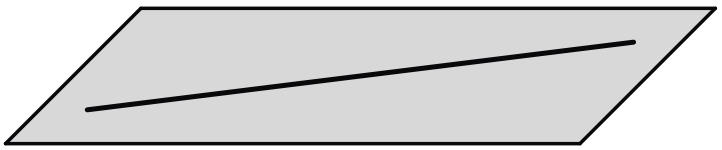
En général, on remplace x, y, z dans l'équation du plan par la représentation paramétrique de la droite. On obtient une équation du premier degré en t. **Pourquoi est-ce vrai** que tout se joue sur le coefficient de t ? Une telle équation a une solution, aucune, ou une infinité.



Une droite sécante à un plan : elle le traverse en un seul point.



Une droite strictement parallèle à un plan : elle passe au-dessus sans jamais l'atteindre.



Une droite contenue dans un plan : tous ses points sont dans le plan.

La propriété

Propriété : Position relative d'une droite et d'un plan

Dans un repère, soit P le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et $D = D(A, \vec{u})$ une droite, avec $A(x_A, y_A, z_A)$ et $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ non nul. On pose $\delta = a\alpha + b\beta + c\gamma$.

- Si $\delta \neq 0$, la droite D coupe le plan P en un **seul point**.
- Si $\delta = 0$, la droite D est parallèle à P : elle est **contenue** dans P si $A \in P$, et **strictement parallèle** à P, sans point commun, si $A \notin P$.

Démonstration

Étape 1. D'après sa représentation paramétrique, les points de D sont les points $M_t(x_A + t\alpha, y_A + t\beta, z_A + t\gamma)$, pour $t \in \mathbb{R}$. Le point M_t appartient à P si et seulement si $\delta t + e = 0$, où $e = ax_A + by_A + cz_A + d$.

Étape 2. Si $\delta \neq 0$, cette équation a une seule solution, $t = -\dfrac{e}{\delta}$: il y a un seul point commun.

Étape 3. Si $\delta = 0$, le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur de direction de P (vecteurs de direction d'un plan), donc D est parallèle à P (chapitre précédent). Si de plus $A \in P$, alors $e = 0$ et tout réel t convient : D est contenue dans P. Si $A \notin P$, alors $e \neq 0$ et aucun réel ne convient : D et P n'ont aucun point commun.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Tout repose sur l'équation $\delta t + e = 0$. Le réel e est la valeur de $ax + by + cz + d$ au point A. Si $\delta \neq 0$, il y a une seule solution. Si $\delta = 0$, le vecteur $\vec{u}$ dirige le plan, et tout dépend de e : nul si $A \in P$, non nul sinon.

Vérifie : Compter les solutions

Si $\delta = 0$ et $e \neq 0$, combien de réels t vérifient $\delta t + e = 0$?

A. Un seul réel.

Faux.

Faux. Un seul réel convient lorsque $\delta \neq 0$.

B. Tous les réels.

Faux.

Faux. Tous les réels conviennent lorsque $\delta = 0$ et $e = 0$.

C. Exactement deux réels.

Faux.

Faux. Une équation du premier degré n'a jamais exactement deux solutions.

D. Aucun réel.

Juste.

C'est juste. L'équation devient $e = 0$, qui est fausse : la droite est strictement parallèle au plan.

Indice 1

Remplace δ par 0 dans l'équation.

Correction

Avec $\delta = 0$, l'équation s'écrit $0 \times t + e = 0$, soit $e = 0$. Comme $e \neq 0$, aucun réel ne convient : la droite et le plan n'ont aucun point commun.

Exemple : Un point d'intersection

Dans un repère, P : $2x - y + z - 3 = 0$ et $D = D(A, \vec{u})$, avec $A(1, 1, -2)$ et $\vec{u}(1, 2, 1)$.

On a $\delta = 2 \times 1 - 2 + 1 = 1 \neq 0$: la droite coupe le plan en un seul point.

Le point de paramètre t est $(1 + t, 1 + 2t, -2 + t)$; il est dans P si et seulement si

$$\begin{aligned} &2(1 + t) - (1 + 2t) \\ &\quad + (-2 + t) - 3 = 0, \end{aligned}$$

soit $t - 4 = 0$. Donc $t = 4$, et le point d'intersection est $(5, 9, 2)$. Contrôle : $10 - 9 + 2 - 3 = 0$.

Méthode et contre-exemples

Méthode : Étudier la position d'une droite et d'un plan

1. **Préparer** les deux objets : la droite par un point et un vecteur directeur, en paramètres ; le plan par son équation.
2. **Remplacer** x, y, z par leurs expressions en t : on obtient une équation de la forme $\delta t + e = 0$.

3. **Discuter** selon δ et e. Si $\delta \neq 0$, la solution fournit l'unique point commun. Si $\delta = 0$ et $e \neq 0$, aucun point commun. Si $\delta = e = 0$, tout réel convient : la droite est dans le plan.
4. **Conclure** par une phrase qui nomme la position.

Exemple : Deux droites parallèles au même plan

Dans un repère, $P : x + y - z - 1 = 0$ et $\vec{u}(1, 0, 1)$. On a $\delta = 1 + 0 - 1 = 0$: toute droite dirigée par $\vec{u}$ est parallèle à P.

La droite qui passe par $A(1, 0, 0)$ donne $(1 + t) + 0 - t - 1 = 0$, vrai pour tout t : elle est **contenue** dans P.

La droite qui passe par $B(0, 0, 1)$ donne $t + 0 - (1 + t) - 1 = 0$, soit $-2 = 0$: aucune solution. Elle est **strictement parallèle** à P. Seul le point de départ a changé.

Le lien avec les vecteurs de direction

Remarque : Le lien avec les vecteurs de direction

La condition $\delta = 0$ est exactement celle qui fait de $\vec{u}$ un **vecteur de direction** du plan. Une droite est donc parallèle à un plan lorsque son vecteur directeur dirige ce plan, comme au chapitre précédent. Les coordonnées testent cette condition en une ligne.

À toi : Une droite qui perce un plan

Dans un repère, $P : x + 2y - z + 1 = 0$ et

$$D : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Étudie la position relative de D et P. Rédige. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Lis le vecteur directeur $\vec{u}$ sur la représentation, puis calcule δ.
Indice 2
Substitue x, y, z dans l'équation de P, puis simplifie.
Indice 3
Résous l'équation en t, puis calcule les coordonnées du point.

Réponse
On lit le vecteur directeur $\vec{u}(-1, 1, 2)$ de D, et $\delta = -1 + 2 - 2 = -1 \neq 0$: D coupe P en un seul point.

On substitue la représentation de D dans l'équation de P :

$$\begin{aligned}&(1-t)+2(2+t)\\&\quad-(1+2t)+1=0,\end{aligned}$$

soit $5-t=0$. Donc $t=5$.

Conclusion. La droite D coupe le plan P au point $(-4,7,11)$. Contrôle : $-4+14-11+1=0$.

Position relative de deux plans

Comparer deux équations

Devine : Deux équations presque doubles

Dans un repère, P : $x+2y-z+1=0$ et P' : $2x+4y-2z+5=0$. À ton avis, quelle est leur position relative ?

A. Strictement parallèles

Juste.

C'est juste. Les coefficients de x, y, z sont doublés, mais pas la constante : $5\neq 2\times 1$.

B. Confondus

Faux.

Faux. Il faudrait aussi $5=2\times 1$.

C. Sécants suivant une droite

Faux.

Faux. Les triplets $(1,2,-1)$ et $(2,4,-2)$ sont proportionnels : les plans sont parallèles.

D. Impossible à dire sans tracer

Faux.

Faux. Les coefficients suffisent : aucun tracé n'est nécessaire.

Indice 1

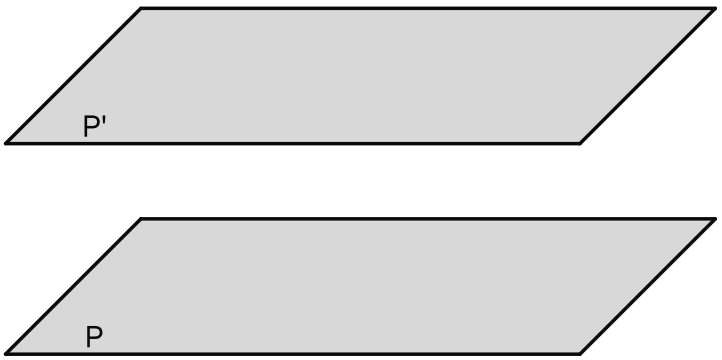
Compare les triplets $(1,2,-1)$ et $(2,4,-2)$, puis les constantes.

Correction

On a $(2,4,-2)=2(1,2,-1)$: les triplets sont proportionnels, avec $\lambda=2$. Mais $5\neq 2\times 1$: les plans sont strictement parallèles, sans point commun.

Deux plans parallèles ont les mêmes vecteurs de direction. Or ces vecteurs se reconnaissent sur les coefficients a, b, c. **Pourquoi est-ce vrai** que le parallélisme se lit sur ces seuls coefficients ? Des triplets proportionnels donnent la même condition de direction.

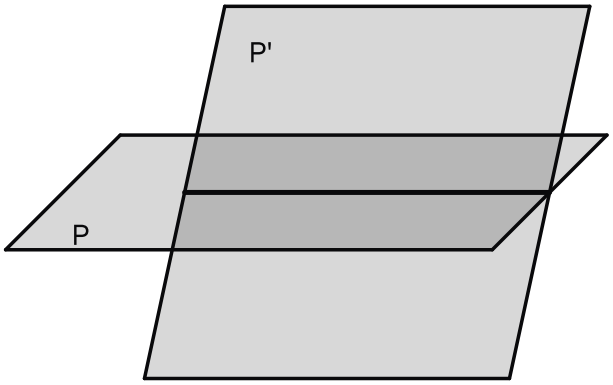
Plans parallèles, confondus, sécants



Deux plans strictement parallèles, l'un au-dessus de l'autre, sans point commun.



Deux plans confondus : un seul parallélogramme, marqué P = P'.



Deux plans sécants : ils se coupent suivant une droite.

Théorème : Plans parallèles en coordonnées

Dans un repère, soit P et P' les plans d'équations $ax+by+cz+d=0$ et $a'x+b'y+c'z+d'=0$. Les plans P et P' sont **parallèles** si et seulement si les triplets (a,b,c) et (a',b',c') sont **proportionnels** : il existe un réel λ tel que $a'=\lambda a$, $b'=\lambda b$ et $c'=\lambda c$.

Démonstration

Étape 1. Supposons $(a',b',c')=\lambda(a,b,c)$. Le réel λ est non nul, sinon (a',b',c') serait nul. Un vecteur $\vec{w}(\alpha,\beta,\gamma)$ vérifie donc $a'\alpha+b'\beta+c'\gamma=0$ si et seulement si $a\alpha+b\beta+c\gamma=0$: les deux plans ont les mêmes vecteurs de direction (vecteurs de direction d'un plan), donc ils sont parallèles (chapitre précédent).

Étape 2. Réciproquement, supposons P et P' parallèles, et $a\neq 0$. Les vecteurs $(-b,a,0)$ et $(-c,0,a)$ sont des vecteurs de direction de P, donc aussi de P' (chapitre précédent) : $-a'b+ab'=0$ et $-a'c+ac'=0$. Avec $\lambda=\dfrac{a'}{a}$, on obtient $a'=\lambda a$, $b'=\lambda b$ et $c'=\lambda c$.

Étape 3. Si $a=0$, on permute les vecteurs de la base comme dans la preuve du plan défini par une équation. Les deux triplets subissent la même permutation, et le premier coefficient de P devient non nul : l'étape 2 s'applique, avec le même λ.

Deux plans parallèles peuvent encore être confondus ou disjoints, et deux plans non parallèles se coupent. **Pourquoi est-ce vrai ?** On compare aussi la constante d, puis on applique le tronc commun.

Propriété : Plans confondus, plans sécants

Dans un repère, soit P et P' les plans d'équations $ax+by+cz+d=0$ et $a'x+b'y+c'z+d'=0$.

- Si $(a', b', c', d') = \lambda(a, b, c, d)$ pour un réel λ, les plans sont **confondus**.
- Si $(a', b', c') = \lambda(a, b, c)$ et $d' \neq \lambda d$, les plans sont **strictement parallèles** : ils n'ont aucun point commun.
- Si (a, b, c) et (a', b', c') ne sont pas proportionnels, les plans sont **sécants** : leur intersection est une droite.

Démonstration

Étape 1. Si $(a', b', c', d') = \lambda(a, b, c, d)$, alors $\lambda \neq 0$, car (a', b', c') est non nul. Pour tout point $M(x, y, z)$, $a'x + b'y + c'z + d' = \lambda(ax + by + cz + d)$: les deux équations ont les mêmes solutions, et $P = P'$.

Étape 2. Si $(a', b', c') = \lambda(a, b, c)$ et $d' \neq \lambda d$, les plans sont parallèles (plans parallèles en coordonnées). De plus, pour tout point $M(x, y, z)$ de P, $a'x + b'y + c'z + d' = \lambda(ax + by + cz) + d' = -\lambda d + d' \neq 0$: aucun point de P n'appartient à P'.

Étape 3. Si les triplets ne sont pas proportionnels, les plans ne sont pas parallèles (plans parallèles en coordonnées). Deux plans non parallèles se coupent suivant une droite (tronc commun).

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Plans parallèles. Les deux plans ont les **mêmes vecteurs de direction** exactement quand leurs triplets sont proportionnels. Pour la réciproque, si $a \neq 0$, on teste sur P' deux vecteurs de direction de P : $(-b, a, 0)$ et $(-c, 0, a)$.

Confondus ou strictement parallèles. Si $(a', b', c', d') = \lambda(a, b, c, d)$, les deux équations ont les mêmes solutions : on a multiplié toute l'équation par λ. Si seul d' diffère de λd, aucun point de P n'est sur P'.

Vérifie : Un réel non nul

Dans la preuve des plans confondus, pourquoi le réel λ est-il non nul ?

A. Car λ est forcément un entier.

Faux.

Faux. Le réel λ est quelconque, par exemple $\frac{1}{2}$.

B. Car le triplet (a', b', c') n'est pas nul.

Juste.

C'est juste. Si $\lambda = 0$, on aurait $(a', b', c') = (0, 0, 0)$, ce qu'interdit une équation de plan.

C. Car la constante d est non nulle.

Faux.

Faux. Le réel d peut être nul ; il ne dit rien sur λ.

D. Car les deux plans sont parallèles.

Faux.

Faux. Le parallélisme donne des triplets proportionnels, sans dire pourquoi $\lambda \neq 0$.

Indice 1

Que deviendrait (a', b', c') si λ valait 0 ?

Correction

Si $\lambda = 0$, alors $a' = b' = c' = 0$. Or une équation cartésienne de plan exige $(a', b', c') \neq (0, 0, 0)$.

Donc $\lambda \neq 0$.

Méthode, exemple et piège

Méthode : Étudier la position relative de deux plans

1. **Comparer** les triplets (a, b, c) et (a', b', c') : chercher un réel λ tel que $(a', b', c') = \lambda(a, b, c)$.
2. **S'il existe**, comparer d' et λd : égaux, les plans sont confondus ; différents, ils sont strictement parallèles.
3. **Sinon**, les plans sont sécants : choisir une inconnue comme paramètre et résoudre le système des deux équations.
4. **Conclure** par une représentation paramétrique de la droite d'intersection, puis contrôler un de ses points dans les deux équations.

Exemple : La droite d'intersection

Dans un repère, P : $x + y + z - 3 = 0$ et P' : $2x - y + z - 2 = 0$.

Position. Les triplets $(1, 1, 1)$ et $(2, -1, 1)$ ne sont pas proportionnels, car un déterminant extrait est non nul :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Les plans sont donc sécants.

Intersection. On prend $y = t$ comme paramètre :

$$\begin{cases} x + z = 3 - t \\ 2x + z = 2 + t \end{cases}$$

La première équation donne $z = 3 - t - x$. Dans la seconde, $2x + 3 - t - x = 2 + t$, donc $x = -1 + 2t$, puis $z = 4 - 3t$. La droite d'intersection a pour représentation

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \qquad\qquad t \in \mathbb{R}. \\ z = 4 - 3t \end{cases}$$

Contrôle pour $t = 0$: le point $(-1, 0, 4)$ vérifie $-1 + 0 + 4 - 3 = 0$ et $-2 - 0 + 4 - 2 = 0$.

Attention : Parallèles ne veut pas dire confondus

✗ « Les triplets $(1, -2, 1)$ et $(-2, 4, -2)$ sont proportionnels, donc les plans $x - 2y + z - 1 = 0$ et $-2x + 4y - 2z + 5 = 0$ sont confondus. »

✓ Les triplets sont proportionnels, avec $\lambda = -2$: les plans sont **parallèles**. Mais $\lambda d = (-2) \times (-1) = 2$, et $d' = 5 \neq 2$: ils sont **strictement parallèles**. Avec $d' = 2$, ils seraient confondus. Compare toujours d' et λd.

À toi et rédaction modèle

À toi : Deux plans à comparer

Dans un repère, P : $x - y + 2z - 1 = 0$ et P' : $3x - 3y + 6z - 3 = 0$. Étudie la position relative de P et P'. Rédige. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Cherche λ tel que $(3, -3, 6) = \lambda(1, -1, 2)$.
Indice 2
Compare ensuite $d' = -3$ et λd.
Indice 3
Conclus avec la propriété « plans confondus, plans sécants ».

Réponse
On a $(3, -3, 6) = 3(1, -1, 2)$: les triplets sont proportionnels, avec $\lambda = 3$. De plus, $\lambda d = 3 \times (-1) = -3 = d'$. Donc $(3, -3, 6, -3) = 3(1, -1, 2, -1)$: les plans P et P' sont confondus.

Remarque : Coin devoir : « Montrer que les plans sont sécants et donner leur droite d'intersection »

En devoir surveillé, cette question se rédige en trois temps.

Justifier : « Les triplets ne sont pas proportionnels, car un déterminant extrait est non nul. D'après la propriété des plans sécants, P et P' se coupent suivant une droite. »

Résoudre : « On prend une inconnue comme paramètre ; par substitution, on exprime les deux autres. »

Conclure et contrôler : « La droite d'intersection a pour représentation… On vérifie qu'un de ses points est dans les deux plans. »

Un tracé ne remplace jamais ces trois temps.

Ce que tu sais faire et démontrer

À retenir

Dans un repère de l'espace, tout se calcule.

Coordonnées : arrivée moins départ ; le milieu par demi-somme ; la colinéarité par un réel λ ou par trois déterminants extraits.

Déterminant : nul si et seulement si les trois vecteurs sont coplanaires ; non nul, ils forment une base.

Droites et plans : une droite par une représentation à un paramètre ; un plan par deux paramètres, ou par une équation $ax + by + cz + d = 0$.

Positions relatives : un déterminant pour deux droites, le réel δ pour une droite et un plan, des triplets proportionnels pour deux plans.

Chaque réponse se termine par une phrase qui nomme la position ou la propriété.

Le mot du prof. Tu sais maintenant traduire une question de l'espace en calculs, et justifier chaque conclusion par la règle qui convient. Au prochain chapitre, tu disposeras d'un nouvel outil de calcul avec les vecteurs de l'espace. Tout ce que tu viens d'apprendre restera vrai, et servira à chaque ligne.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Géométrie analytique de l'espace » (1bac · sciences-mathematiques · mathematiques)