BURHAN

Résumé : Généralités sur les fonctions numériques

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/generalites-sur-les-fonctions/resume

Chapitre	Semestre
Généralités sur les fonctions numériques	Semestre 1

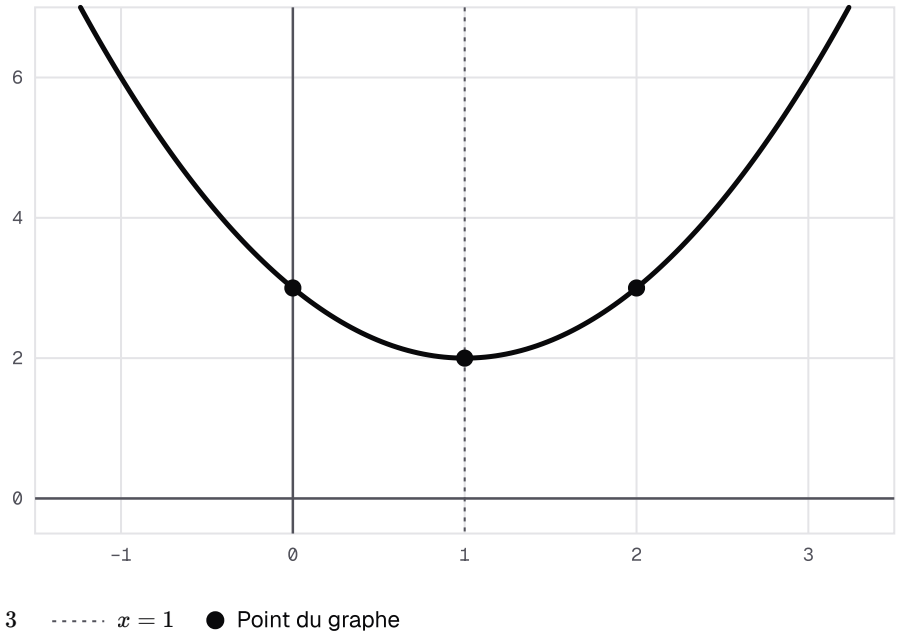
Axe et centre de symétrie d'une courbe

Propriété : Axe de symétrie, centre de symétrie d'une courbe

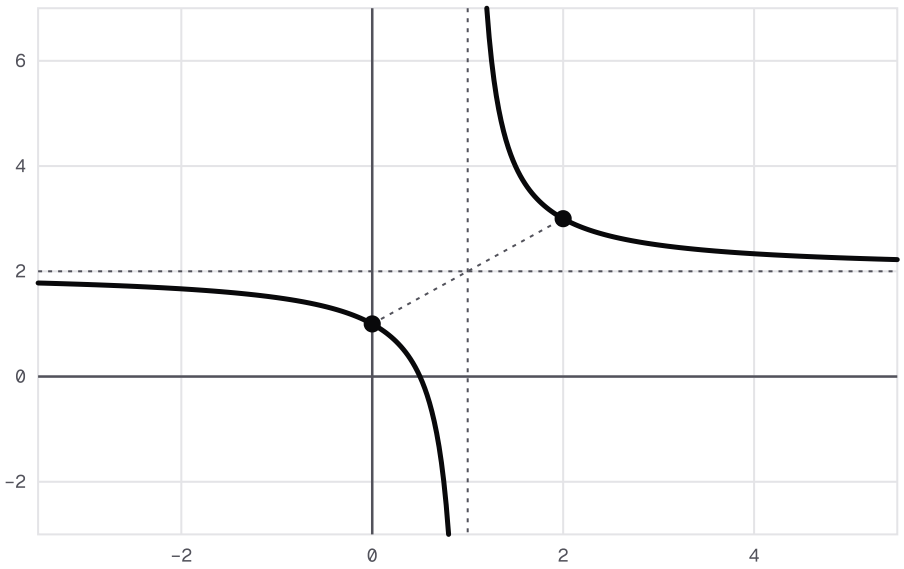
Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit a et b deux réels.

- La droite d'équation $x = a$ est un **axe de symétrie** de $\mathcal{C}_f$ si et seulement si, pour tout $x \in D_f$: $2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) = f(x)$.
- Le point $\Omega(a, b)$ est un **centre de symétrie** de $\mathcal{C}_f$ si et seulement si, pour tout $x \in D_f$: $2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$.

Pour $a = 0$, on retrouve une fonction paire ; pour $a = 0$ et $b = 0$, une fonction impaire.



Un axe de symétrie : la courbe de x ↦ x² − 2x + 3 est inchangée par la symétrie d'axe la droite d'équation x = 1, avec a = 1.



$y = \dfrac{2x-1}{x-1}$ ● Point plein M ● Point plein M' ------ $x = 1$ ------ $y = 2$ ------ Ω ● Point du graphe

Un centre de symétrie : pour x ↦ (2x − 1)/(x − 1), avec a = 1 et b = 2, le point Ω(1, 2) est le milieu de chaque segment qui joint deux points de la courbe d'abscisses x et 2 − x.

Méthode : montrer qu'une courbe a un axe ou un centre de symétrie

1. **Vérifie l'ensemble de définition** : pour tout $x \in D_f$, le réel $2a - x$ doit appartenir à D_f.
2. **Pour un axe** d'équation $x = a$: calcule $f(2a - x)$ et retrouve $f(x)$.
3. **Pour un centre** $\Omega(a, b)$: calcule $f(2a - x) + f(x)$ et retrouve $2b$.
4. **Exploite** la symétrie : étudie f sur une moitié de D_f, puis complète la courbe.

Exemple

Énoncé. Soit $f(x) = x^2 + 6x + 1$ et $g(x) = \dfrac{3x+1}{x+2}$. Montre que la droite d'équation $x = -3$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$. Montre que $\Omega(-2, 3)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_g$.

Axe. $D_f = \mathbb{R}$, donc $-6 - x \in D_f$ pour tout réel x. Et :

$$\begin{aligned} &f(-6-x) \\ &= (-6-x)^2 + 6(-6-x) + 1 \\ &= 36 + 12x + x^2 - 36 - 6x + 1 \\ &= x^2 + 6x + 1 = f(x). \end{aligned}$$

Centre. $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Si $x \neq -2$, alors $-4 - x \neq -2$, donc $-4 - x \in D_g$. Puis :

$$\begin{aligned} g(-4-x) &= \frac{-11-3x}{-2-x} \\ &= \frac{3x+11}{x+2}. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} & g(-4-x)+g(x) \\ &= \frac{6x+12}{x+2} \\ &= 6 = 2\times 3. \end{aligned}$$

Conclusion. D'après le critère de symétrie (F01), la droite d'équation $x=-3$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$, et $\Omega(-2,3)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_g$.

Attention : Vérifie d'abord l'ensemble de définition

Soit f la fonction définie sur $[0,3]$ par $f(x)=(x-1)^2$. Partout où les deux membres existent, $f(2-x)=(1-x)^2=f(x)$.

Pourtant, la droite d'équation $x=1$ n'est pas un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$. En effet, $3\in D_f$, mais $2-3=-1\notin D_f$: le point d'abscisse 3 n'a pas de symétrique sur la courbe.

Fonctions majorées, minorées, bornées

À retenir : Le réflexe : un majorant est un nombre fixe

Majorer f sur I, c'est trouver **un seul** réel M qui convient pour tous les x de I. On choisit M d'abord ; ensuite seulement, x varie.

Un majorant n'est jamais unique : tout réel plus grand convient aussi. Il n'est pas forcément atteint.

Définition : Fonction majorée, minorée, bornée

Soit f une fonction et I une partie de son ensemble de définition D_f.

- f est **majorée** sur I s'il existe un réel M tel que : $\forall x\in I,\ f(x)\leq M$. On dit que M est un **majorant** de f sur I.
- f est **minorée** sur I s'il existe un réel m tel que : $\forall x\in I,\ f(x)\geq m$. On dit que m est un **minorant** de f sur I.
- f est **bornée** sur I si elle est à la fois majorée et minorée sur I.

Le réel M est choisi **avant** x : il ne dépend pas de x.

Propriété : Fonction bornée et valeur absolue

Soit f une fonction et I une partie de D_f. La fonction f est bornée sur I si et seulement s'il existe un réel $k\geq 0$ tel que : $\forall x\in I,\ |f(x)|\leq k$.

Méthode : majorer, minorer, borner une fonction

1. **Pars** de « Soit $x \in I$ ».
2. **Encadre** $f(x)$ pas à pas : carrés, inverses, forme canonique.
3. **Vérifie** que la borne obtenue ne contient pas x, puis conclus par la définition d'une fonction majorée (F02).
4. **Pour borner**, tu peux aussi majorer $|f(x)|$ par un réel $k \geq 0$ (fonction bornée et valeur absolue, F03).
5. **Pour réfuter** « f est majorée sur I » : à chaque réel M, associe un $x \in I$ tel que $f(x) > M$.

Exemple

Énoncé. Soit $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$. Montre que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Idée. Compare $4|x|$ et x^2+4.

Comparaison. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$x^2 + 4 - 4|x| = (|x| - 2)^2 \geq 0,$$

donc $4|x| \leq x^2 + 4$.

Majoration. Comme $x^2 + 4 > 0$:

$$|f(x)| = \frac{4|x|}{x^2+4} \leq 1.$$

Conclusion. Le réel 1 ne dépend pas de x : d'après la propriété « fonction bornée et valeur absolue » (F03), f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exemple

Énoncé. Soit $h(x) = x^2 + x$. Montre que h n'est pas majorée sur $[0, +\infty[$.

Rédaction. Soit M un réel. Posons $x = |M| + 1$: alors $x \in [0, +\infty[$ et $x \geq 1$. Donc $x^2 \geq x$, puis :

$$h(x) \geq 2x > x > |M| \geq M.$$

Conclusion. Aucun réel M n'est un majorant de h sur $[0, +\infty[$.

Attention : Un majorant ne dépend pas de x

Pour tout $x \geq 0$, on a $x^2 + x \leq 2x^2 + 1$, car la différence vaut $x^2 - x + 1 > 0$. Cette inégalité est vraie, mais $2x^2 + 1$ dépend de x : ce n'est pas un majorant. D'ailleurs, la fonction h ci-dessus n'est pas majorée.

Dans la définition, le réel M vient en premier :

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) \leq M.$$

Inverser les quantificateurs donne une phrase toujours vraie, donc inutile.

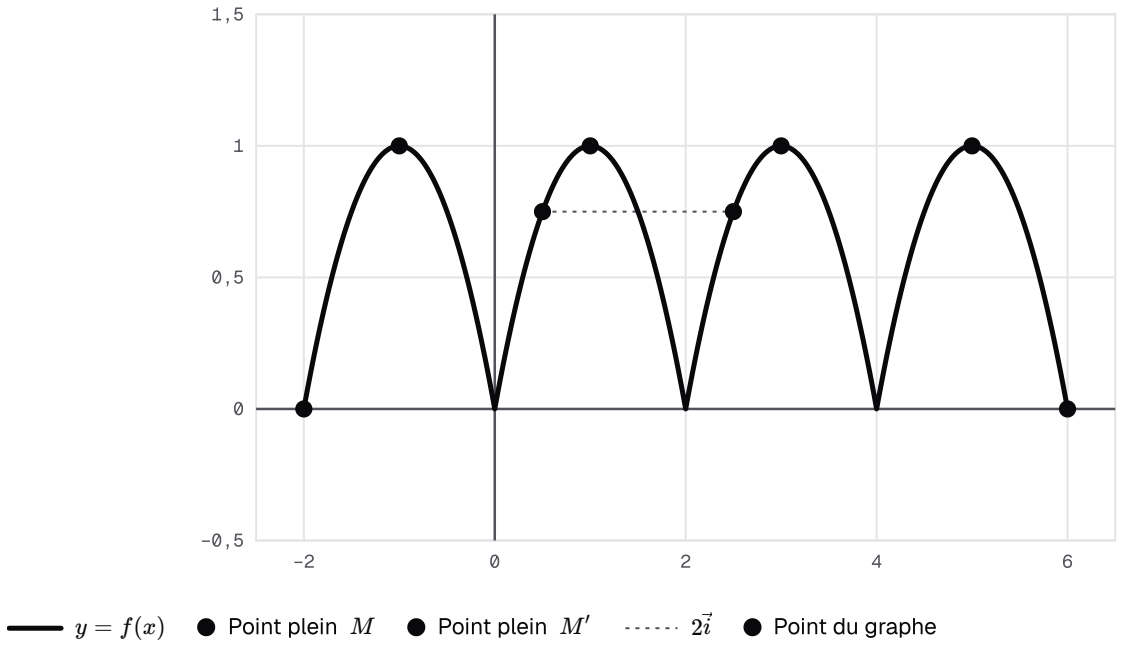
Fonctions périodiques

Définition : Fonction périodique

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f, et T un réel strictement positif. La fonction f est **périodique de période** T si, pour tout $x \in D_f$:

- $x + T \in D_f$ et $x - T \in D_f$;
- $f(x + T) = f(x)$.

Appliquée au réel $x - T$, la définition donne aussi $f(x - T) = f(x)$. Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est donc invariante par les translations de vecteurs $T\vec{i}$ et $-T\vec{i}$: il suffit de la tracer sur un intervalle de longueur T.



Fonction de période T = 2, égale à x(2 − x) sur [0, 2[: le point M' d'abscisse x + T est le translaté du point M d'abscisse x par le vecteur 2 i, à la même hauteur.

Propriété : Multiples d'une période

Soit f une fonction périodique de période T. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le réel nT est une période de f : pour tout $x \in D_f$, $x + nT \in D_f$, $x - nT \in D_f$ et $f(x + nT) = f(x)$.

Méthode : étudier la périodicité

1. **Pour prouver** que $T > 0$ est une période : vérifie que $x + T$ et $x - T$ sont dans D_f pour tout $x \in D_f$. Calcule ensuite $f(x + T)$ et compare-le à $f(x)$ (définition d'une période, F04).
2. **Pour prouver** que f n'est pas périodique : suppose par l'absurde qu'elle a une période $T > 0$. Applique la relation en des points bien choisis, comme 0 ou T, jusqu'à une contradiction.
3. **Pour tracer** $\mathcal{C}_f$: trace un morceau sur un intervalle de longueur T. Reproduis-le par les translations de vecteurs $T\vec{i}$ et $-T\vec{i}$.

Exemple

Énoncé. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, de période 3, telle que $f(1) = 2$. Calcule $f(10)$ et $f(-5)$.

Rédaction. D'après la propriété des multiples d'une période (F05), $9 = 3 \times 3$ et $6 = 2 \times 3$ sont aussi des périodes de f. Donc $f(10) = f(1 + 9) = f(1) = 2$. De même, $f(1) = f(-5 + 6) = f(-5)$, donc $f(-5) = 2$.

Exemple

Énoncé. Soit $f(x) = x^3 - 4x$. Montre que f n'est pas périodique.

Hypothèse. Raisonnons par l'absurde : supposons que f admette une période $T > 0$.

Contradiction. En $x = 0$, on obtient $f(T) = f(0) = 0$, soit $T(T^2 - 4) = 0$. Comme $T > 0$, $T = 2$. En $x = 2$, on obtient alors $f(4) = f(2) = 0$. Or $f(4) = 64 - 16 = 48$: contradiction.

Conclusion. La fonction f n'est pas périodique.

Second degré : racines et signe

Propriété : Trinôme du second degré : forme canonique et racines

Soit a, b et c trois réels, avec $a \neq 0$, et $P(x) = ax^2 + bx + c$. On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le **discriminant** du trinôme. Pour tout réel x :

$$P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

- Si $\Delta > 0$, l'équation $P(x) = 0$ a deux solutions distinctes, $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$; en les notant x_1 et x_2, $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Si $\Delta = 0$, elle a une seule solution $x_0 = -\frac{b}{2a}$, et $P(x) = a(x - x_0)^2$.
- Si $\Delta < 0$, elle n'a aucune solution réelle.

Si $\Delta > 0$: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Propriété : Signe du trinôme du second degré

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta < 0$, $P(x)$ est du signe de a pour tout réel x.
- Si $\Delta = 0$, $P(x)$ est du signe de a pour tout réel $x \neq x_0$, et $P(x_0) = 0$.
- Si $\Delta > 0$, on note $x_1 < x_2$ les deux racines : $P(x)$ est du signe de a pour $x < x_1$ et pour $x > x_2$, du signe contraire de a pour $x_1 < x < x_2$, et nul en x_1 et en x_2.

Discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Forme canonique

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Première racine (discriminant strictement positif)

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Seconde racine (discriminant strictement positif)

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Racine double (discriminant nul)

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

Factorisation

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad (\Delta > 0)$$

Somme des racines

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad (\Delta > 0)$$

Produit des racines

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} \quad (\Delta > 0)$$

Méthode : résoudre une équation ou une inéquation du second degré

1. **Ramène** tout dans un membre : $ax^2 + bx + c$ comparé à 0, avec $a \neq 0$.
2. **Cherche** une factorisation directe ; sinon, calcule Δ.
3. **Équation** : lis les racines données par le discriminant (F06).
4. **Inéquation** : dresse le signe du trinôme (signe du trinôme, F07). Il a le signe de a à l'extérieur des racines.
5. **Écris** l'ensemble des solutions, avec des crochets fermés ou ouverts selon l'inégalité.

Exemple

Énoncé. Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2x^2 - 3x - 2 \leq 0$.

Racines. $\Delta = 9 + 16 = 25$, donc $x_1 = \frac{3 - 5}{4} = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{3 + 5}{4} = 2$.

Signe. Ici $a = 2 > 0$: le trinôme est négatif ou nul entre ses racines (signe du trinôme, F07).

Solutions. $S = \left[-\frac{1}{2}, 2\right]$.

Attention : Discriminant négatif : regarde le signe de a

Un discriminant négatif ne rend pas le trinôme positif : il lui donne **le signe de** a (signe du trinôme, F07). Pour $-2x^2 + 3x - 4$, on a $a = -2$ et $\Delta = 9 - 32 = -23$. Ce trinôme est donc strictement négatif pour tout réel x. L'inéquation $-2x^2 + 3x - 4 \geq 0$ n'a aucune solution.

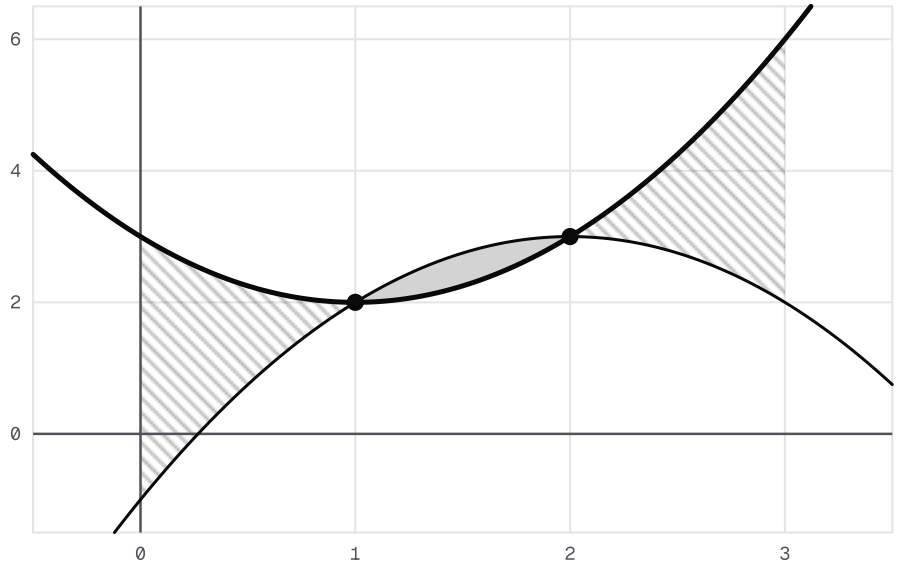
Comparer deux fonctions

Définition : Comparaison de deux fonctions ; interprétation graphique

Soit f et g deux fonctions, et I une partie de $D_f \cap D_g$.

- f est **inférieure** à g sur I, et on écrit $f \leq g$ sur I, si : $\forall x \in I,\ f(x) \leq g(x)$.
- f et g sont **égales** sur I si : $\forall x \in I,\ f(x) = g(x)$.
- f est **positive** sur I si : $\forall x \in I,\ f(x) \geq 0$.

Interprétation graphique. $f \leq g$ sur I signifie que, pour tout $x \in I$, le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x est au-dessous du point de $\mathcal{C}_g$ de même abscisse, ou confondu avec lui : $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{C}_g$ sur I. Les abscisses des points communs aux deux courbes sont les solutions dans I de l'équation $f(x) = g(x)$.



Position relative de deux courbes : la parabole de g : x ↦ −x² + 4x − 1 est au-dessus de celle de f : x ↦ x² − 2x + 3 sur [1, 2] (zone teintée) et au-dessous sur [0, 1] et sur [2, 3] (zones hachurées).

Propriété : Comparaison et opérations

Soit f, g et h trois fonctions, I une partie de $D_f \cap D_g \cap D_h$ et k un réel. On suppose $f \leq g$ sur I. Alors :

- $f + h \leq g + h$ sur I ;
- si $k \geq 0$, $kf \leq kg$ sur I ; si $k \leq 0$, $kf \geq kg$ sur I ;
- si g est majorée par M sur I, alors f est majorée par M sur I ; si f est minorée par m sur I, alors g est minorée par m sur I.

Méthode : comparer deux fonctions, placer deux courbes

1. **Forme** la différence $f(x) - g(x)$ sur I, puis factorise-la.
2. **Étudie son signe** : tableau de signes, signe d'un trinôme (F07, signe du trinôme).
3. **Conclus** : là où la différence est positive, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$. Là où elle est négative, $\mathcal{C}_f$ est au-dessous.
4. **Points communs** : résous $f(x) - g(x) = 0$, puis calcule leurs ordonnées.

Exemple

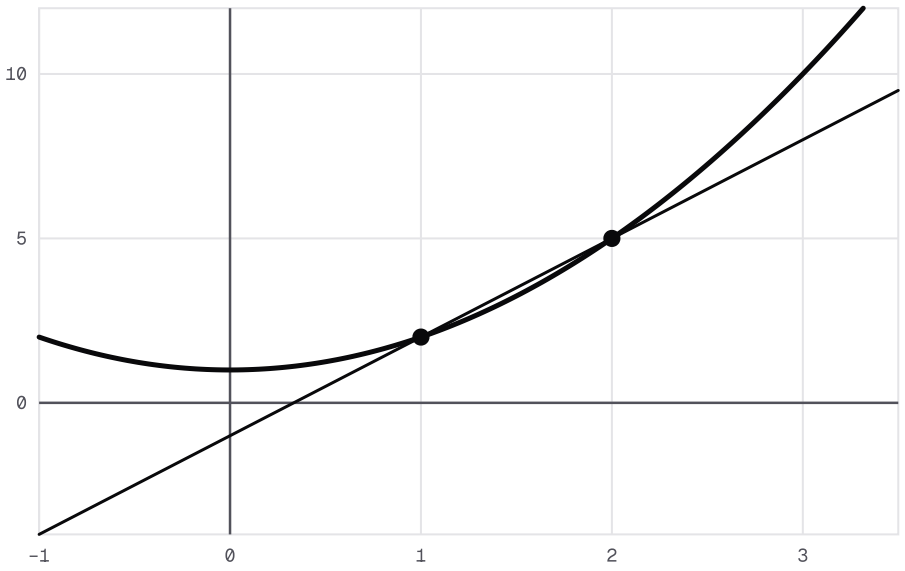
Énoncé. Soit $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = 3x - 1$. Étudie la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Différence. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= x^2 - 3x + 2 \\ &= (x - 1)(x - 2). \end{aligned}$$

Signe. Ce trinôme est positif à l'extérieur de $[1, 2]$, négatif sur $]1, 2[$ (signe du trinôme, F07).

Conclusion. $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $]-\infty, 1]$ et sur $[2, +\infty[$. Elle est au-dessous sur $[1, 2]$. Les points communs sont $A(1, 2)$ et $B(2, 5)$.



Parabole de f : x ↦ x² + 1 et droite de g : x ↦ 3x − 1. Elles se coupent en A(1, 2) et B(2, 5) ; la parabole passe sous la droite entre ces deux points, au-dessus partout ailleurs.

À retenir : Majorer par comparaison

Pour majorer f, il suffit parfois de la comparer à une fonction plus simple (comparaison et opérations, F09). Dans l'exemple précédent, $f \leq g$ sur $[1, 2]$.

Pour $x \in [1, 2]$, on a aussi $3x - 1 \leq 5$. Donc $f(x) \leq 5$ pour tout $x \in [1, 2]$: le réel 5 majore f sur $[1, 2]$.

Monotonie, taux de variation, parité

Définition : Monotonie d'une fonction

Soit f une fonction et I un intervalle inclus dans D_f.

- f est **croissante** sur I si : $\forall (x, y) \in I^2,\ \big(x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)\big)$.
- f est **strictement croissante** sur I si : $\forall (x, y) \in I^2,\ \big(x < y \Rightarrow f(x) < f(y)\big)$.
- f est **décroissante** sur I si : $\forall (x, y) \in I^2,\ \big(x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)\big)$; **strictement décroissante** si, de plus, l'inégalité est stricte : $f(x) > f(y)$.
- f est **constante** sur I si : $\forall (x, y) \in I^2,\ f(x) = f(y)$.
- f est **monotone** sur I si elle est croissante sur I ou décroissante sur I ; **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur I.

Une fonction croissante conserve l'ordre ; une fonction décroissante l'inverse.

Propriété : Taux de variation et monotonie

Soit f une fonction et I un intervalle inclus dans D_f. Pour x et y deux éléments distincts de I, le **taux de variation** de f entre x et y est le réel

$$T(x,y)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}.$$

- f est croissante sur I si et seulement si $T(x,y)\geq 0$ pour tous x et y distincts de I.
- f est strictement croissante sur I si et seulement si $T(x,y)>0$ pour tous x et y distincts de I.
- f est décroissante (respectivement strictement décroissante) sur I si et seulement si $T(x,y)\leq 0$ (respectivement $T(x,y)<0$) pour tous x et y distincts de I.

Méthode : étudier la monotonie par le taux de variation

1. **Prends** deux réels distincts x et y de I.
2. **Factorise** $f(x)-f(y)$ par $x-y$, puis simplifie $T(x,y)$.
3. **Étudie le signe** de $T(x,y)$, en n'utilisant que $x\in I$ et $y\in I$.
4. **Conclus** par le lien entre taux de variation et monotonie (F11) : taux positif, f croissante ; taux négatif, f décroissante.
5. **Si f est paire ou impaire**, étudie-la sur chaque intervalle I inclus dans $D_f\cap[0,+\infty[$, puis conclus sur $-I$ par la propriété « monotonie et parité » (F12).

Exemple

Énoncé. Soit $f(x)=x^2+2x$. Étudie la monotonie de f sur $[-1,+\infty[$.

Taux. Soit x et y deux réels distincts de $[-1,+\infty[$. On a :

$$\begin{aligned}&f(x)-f(y)\\&=(x-y)(x+y)+2(x-y)\\&=(x-y)(x+y+2),\end{aligned}$$

donc $T(x,y)=x+y+2$.

Signe. Comme $x\geq -1$ et $y\geq -1$, on a $x+y\geq -2$. L'égalité imposerait $x=y=-1$, ce qui est exclu. Donc $T(x,y)>0$.

Conclusion. Un taux de variation positif donne une fonction croissante (F11) : f est strictement croissante sur $[-1,+\infty[$.

Propriété : Monotonie et parité

Soit f une fonction paire ou impaire, et I un intervalle inclus dans $D_f\cap[0,+\infty[$. On note $-I=\{-x\,/\,x\in I\}$.

- Si f est **paire** : f est croissante sur I si et seulement si elle est décroissante sur $-I$.
- Si f est **impaire** : f est croissante sur I si et seulement si elle est croissante sur $-I$.

Les mêmes équivalences valent pour la monotonie stricte, et en échangeant « croissante » et « décroissante ».

Exemple

Énoncé. Soit $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$. Étudie la monotonie de g sur $\mathbb{R}$.

Sur $[0, +\infty[$**.** Pour $x \neq y$ dans cet intervalle :

$$T(x,y) = -\frac{x+y}{(x^2+1)(y^2+1)}.$$

Or $x + y > 0$, donc $T(x,y) < 0$: g est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

Sur $]-\infty, 0]$**.** Pour tout réel x, $g(-x) = g(x)$: g est paire. D'après la propriété « monotonie et parité » (F12), g est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$.

Attention : Monotone sur deux intervalles, pas sur leur réunion

Soit $k(x) = \dfrac{1}{x-3}$. Son taux vaut $T(x,y) = -\dfrac{1}{(x-3)(y-3)}$. Il est négatif quand x et y sont du même côté de 3 : k est strictement décroissante sur $]-\infty, 3[$ et sur $]3, +\infty[$.

Pourtant, $2 < 4$ et $k(2) = -1 < 1 = k(4)$. Donc k n'est pas décroissante sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, qui n'est pas un intervalle.

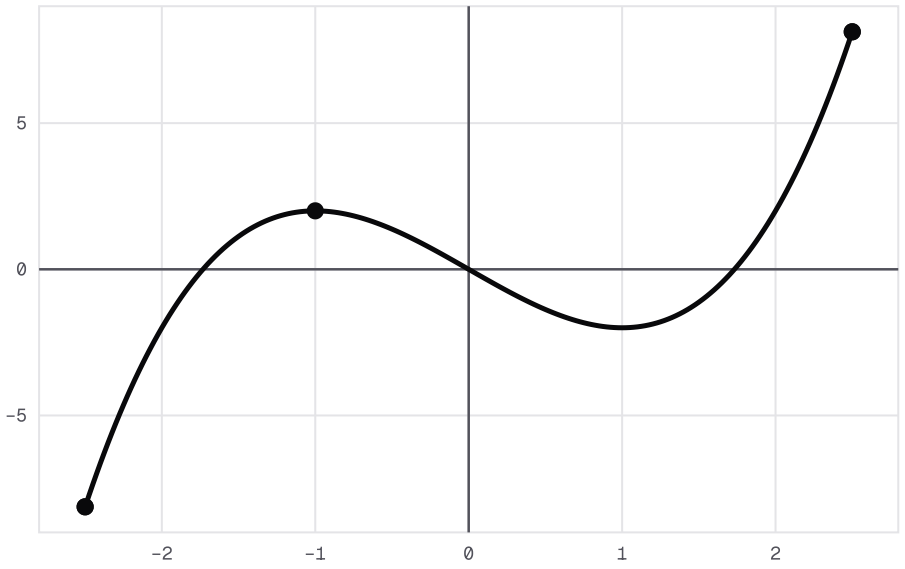
Extremums

Définition : Extremums d'une fonction

Soit f une fonction, I un intervalle inclus dans D_f, et $a \in I$.

- $f(a)$ est le **maximum** de f sur I si : $\forall x \in I,\ f(x) \leq f(a)$.
- $f(a)$ est le **minimum** de f sur I si : $\forall x \in I,\ f(x) \geq f(a)$.
- Un maximum ou un minimum est un **extremum**.
- f admet un **maximum local** (respectivement un **minimum local**) en a s'il existe un intervalle ouvert J contenant a et inclus dans D_f tel que $f(a)$ soit le maximum (respectivement le minimum) de f sur J.

Un maximum est une valeur **atteinte** : sur la courbe, c'est l'ordonnée du point le plus haut de $\mathcal{C}_f$ au-dessus de I.



Sur [−5/2, 5/2], la fonction x ↦ x³ − 3x a pour maximum l'ordonnée du point A et pour minimum celle du point B ; au point C, elle n'a qu'un maximum local.

Propriété : Extremum et tableau de variations

Soit f une fonction, et α, a, β trois réels tels que $\alpha < a < \beta$ et $[\alpha, \beta] \subset D_f$.

- Si f est croissante sur $[\alpha, a]$ et décroissante sur $[a, \beta]$, alors $f(a)$ est le maximum de f sur $[\alpha, \beta]$, et f admet un maximum local en a.
- Si f est décroissante sur $[\alpha, a]$ et croissante sur $[a, \beta]$, alors $f(a)$ est le minimum de f sur $[\alpha, \beta]$, et f admet un minimum local en a.

Méthode : déterminer et justifier un extremum

1. **Par les variations** : un changement de sens de variation en a donne un extremum (extremum et tableau de variations, F14).
2. **Par la définition** : pour un minimum en a, montre que $f(x) - f(a) \geq 0$ pour tout $x \in I$ (définition d'un extremum, F13).
3. **Réponds** toujours par deux informations : la valeur $f(a)$, et le réel a où elle est atteinte.

Exemple

Énoncé. Soit $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$. Montre que f admet un minimum sur $]0, +\infty[$.

Candidat. On calcule $f(1) = 2$.

Différence. Soit $x > 0$. Alors :

$$f(x) - 2 = \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0,$$

car $x > 0$.

Conclusion. Pour tout $x > 0$, $f(x) \geq f(1)$. Le minimum de f sur $]0, +\infty[$ est 2, atteint en 1 (définition d'un extremum, F13).

Attention : Majorée ne veut pas dire qu'elle a un maximum

Un maximum est une valeur **atteinte** (définition d'un extremum, F13). Sur $]0, +\infty[$, soit $g(x) = 3 - \frac{1}{x}$. Comme $\frac{1}{x} > 0$, la fonction g est majorée par 3. Mais l'équation $g(x) = 3$ n'a pas de solution.

Mieux : pour tout $a > 0$, $g(2a) > g(a)$. Aucune valeur $g(a)$ n'est donc le maximum de g.

Composée de deux fonctions

Définition : Composée de deux fonctions

Soit f une fonction définie sur une partie I de $\mathbb{R}$, et g une fonction définie sur une partie J de $\mathbb{R}$, telles que $f(I) \subset J$, c'est-à-dire : $\forall x \in I,\ f(x) \in J$. La **composée** de f suivie de g est la fonction $g \circ f$ définie sur I par :

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big).$$

Plus généralement, l'ensemble de définition de $g \circ f$ est $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \,/\, f(x) \in D_g\}$. On applique d'abord f, puis g.

Méthode : étudier une composée

1. **Décompose** : écris $h = g \circ f$ en nommant f et g : en général, des fonctions de référence.
2. **Ensemble de définition** : $x \in D_{g \circ f}$ si et seulement si $x \in D_f$ et $f(x) \in D_g$ (définition de la composée, F15).
3. **Découpe** D_f en intervalles I où f est monotone. Vérifie que $f(I)$ est inclus dans un intervalle J où g est monotone.
4. **Conclus** par la monotonie d'une composée (F16) : même sens, $g \circ f$ croissante ; sens contraires, $g \circ f$ décroissante.

Propriété : Monotonie d'une composée

Soit f une fonction monotone sur un intervalle I, et g une fonction monotone sur un intervalle J, avec $f(I) \subset J$.

- Si f et g ont le **même** sens de variation (toutes deux croissantes, ou toutes deux décroissantes), alors $g \circ f$ est croissante sur I.
- Si f et g ont des sens de variation **contraires**, alors $g \circ f$ est décroissante sur I.

Si f et g sont strictement monotones, la monotonie de $g \circ f$ est stricte.

Exemple

Énoncé. Soit $h(x) = \sqrt{x^2 - 4}$. Détermine D_h et les variations de h.

Décomposition. $h = g \circ f$, avec $f(x) = x^2 - 4$ et g la fonction racine carrée.

Ensemble. $x \in D_h$ si et seulement si $x^2 - 4 \geq 0$, soit $x^2 \geq 4$. Donc :

$$D_h =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[\,.$$

Sur $[2, +\infty[$**.** f est croissante, et $f\big([2, +\infty[\big) \subset [0, +\infty[$, où g est croissante : d'après la monotonie d'une composée (F16), h est croissante sur $[2, +\infty[$.

Sur $]-\infty, -2]$**.** f est décroissante, et $f\big(]-\infty, -2]\big) \subset [0, +\infty[$, où g est croissante : les sens sont contraires, donc h est décroissante sur $]-\infty, -2]$ (F16).

Attention : L'ordre compte, l'ensemble de définition aussi

Soit $u(x) = x - 1$ et $v(x) = \sqrt{x}$. La composée $v \circ u$ est définie sur $[1, +\infty[$ par $(v \circ u)(x) = \sqrt{x - 1}$. La composée $u \circ v$ est définie sur $[0, +\infty[$ par $(u \circ v)(x) = \sqrt{x} - 1$.

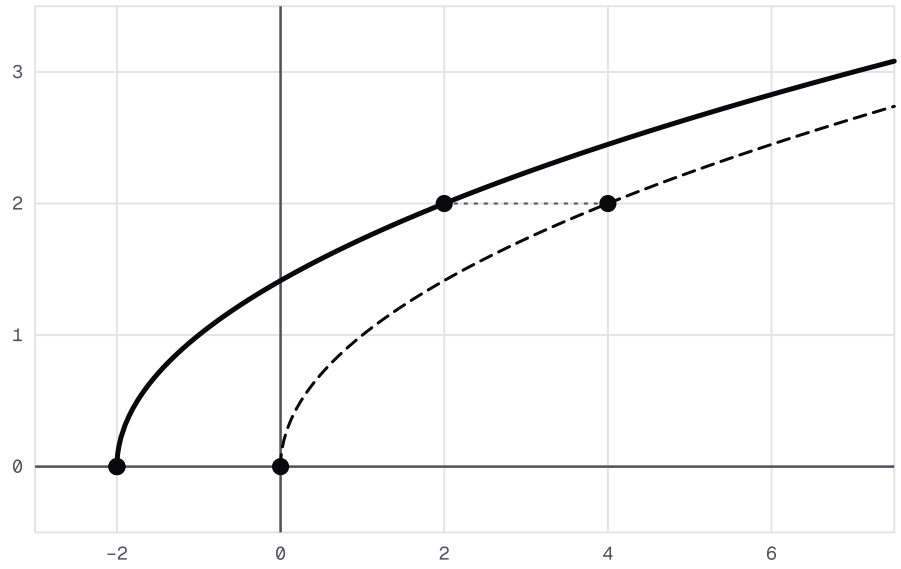
En 5, $(v \circ u)(5) = 2$ mais $(u \circ v)(5) = \sqrt{5} - 1$. Les deux composées diffèrent. De plus, $D_{v \circ u}$ n'est pas $D_u = \mathbb{R}$.

Les fonctions x ↦ √(x + a) et x ↦ ax³

Propriété : La fonction x ↦ √(x + a)

Soit a un réel et f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x + a}$. Alors :

- $D_f = [-a, +\infty[$;
- f est strictement croissante sur $[-a, +\infty[$, et $f(-a) = 0$ est son minimum sur D_f ;
- dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $\mathcal{C}_f$ est l'image de la courbe de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ par la translation de vecteur $-a\vec{i}$.

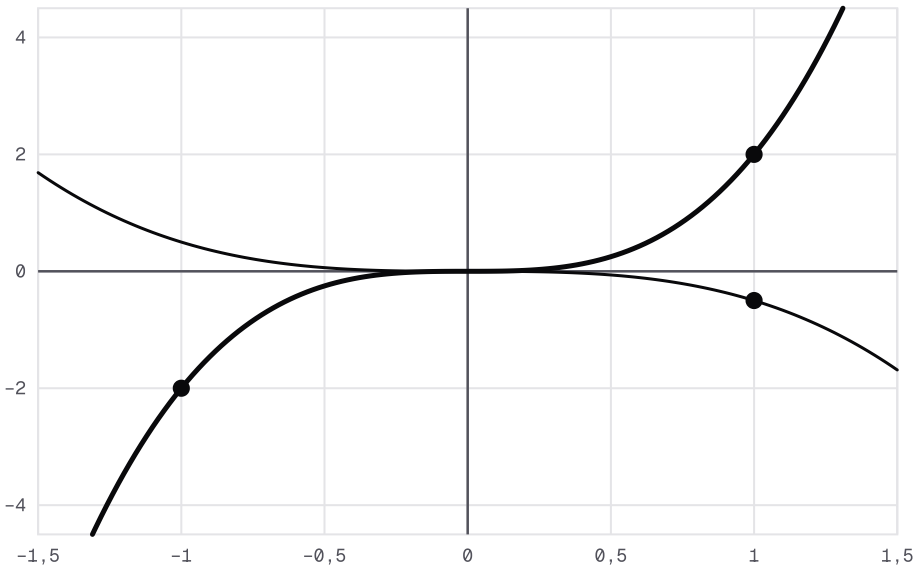


Avec a = 2 : la courbe de x ↦ √(x + 2) est celle de la racine carrée (en pointillés) glissée de 2 vers la gauche ; elle commence au point (−2, 0).

Propriété : La fonction x ↦ ax³

Soit a un réel non nul et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3$. Alors :

- f est impaire, et l'origine O est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$;
- si $a > 0$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; si $a < 0$, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.



Le signe de a décide du sens : x ↦ 2x³ (a = 2) est croissante, x ↦ −x³/2 (a = −1/2) est décroissante ; les deux courbes ont l'origine pour centre de symétrie.

À retenir : Lire une courbe par translation

La courbe de $x \mapsto \sqrt{x+a}$ se déduit de celle de $x \mapsto \sqrt{x}$ par un glissement horizontal. Si $a > 0$, elle se déplace vers la gauche ; si $a < 0$, vers la droite. Son point de départ est $(-a, 0)$.

Exemple

Énoncé. Soit $f(x) = \sqrt{x-5}$. Donne D_f, le sens de variation et le minimum de f. Résous ensuite $f(x) \leq 2$.

Lecture de la propriété de $x \mapsto \sqrt{x+a}$ (F17), avec $a = -5$: $D_f = [5, +\infty[$; f est strictement croissante sur D_f, de minimum $f(5) = 0$.

Inéquation. On a $f(9) = 2$. Soit $x \in D_f$. Si $x \leq 9$, alors $f(x) \leq f(9)$. Si $x > 9$, alors $f(x) > f(9)$, car f est strictement croissante. Donc $S = [5, 9]$.

Exemple

Énoncé. Soit $g(x) = -3x^3$. Compare $g(-2)$ et $g\left(\frac{1}{2}\right)$ sans les calculer, puis vérifie.

Par la propriété de $x \mapsto ax^3$ (F18). Ici $a = -3 < 0$: g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Comme $-2 < \frac{1}{2}$, on a $g(-2) > g\left(\frac{1}{2}\right)$.

Vérification. $g(-2) = 24$ et $g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8}$.

La partie entière

Propriété : Partie entière d'un réel

Pour tout réel x, il existe un **unique** entier relatif n tel que $n \leq x < n+1$. Cet entier est appelé la **partie entière** de x et noté $E(x)$.

La **fonction partie entière** est la fonction E définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto E(x)$. Par exemple, $E(2{,}7) = 2$, $E(3) = 3$ et $E(-1{,}4) = -2$.

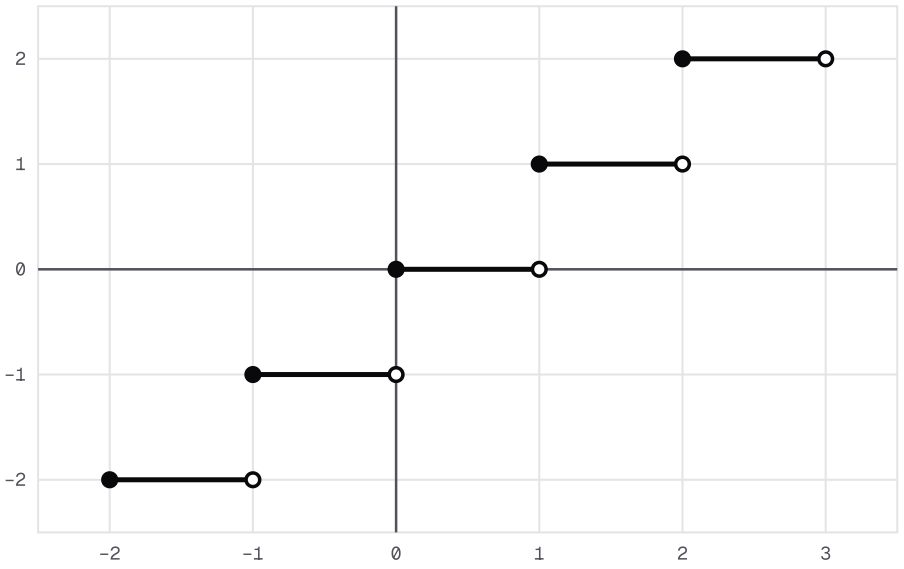
Propriété : Propriétés de la partie entière

Soit x un réel. Alors :

- $E(x) \leq x < E(x) + 1$ et $x - 1 < E(x) \leq x$;
- $E(x) = x$ si et seulement si $x \in \mathbb{Z}$;
- pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $t \in [n, n+1[$, $E(t) = n$: la fonction E est constante sur chaque intervalle $[n, n+1[$;
- la fonction E est croissante sur $\mathbb{R}$, mais elle n'est pas strictement croissante.

Méthode : calculer avec la partie entière

1. **Pour calculer** $E(x)$: encadre x entre deux entiers consécutifs, $n \leq x < n+1$. Alors $E(x) = n$.
2. **Pour résoudre** $E(x) = n$, avec $n \in \mathbb{Z}$: l'ensemble des solutions est $[n, n+1[$ (définition de la partie entière, F19).
3. **Pour une équation** où $E(x)$ est égal à une expression en x : pose $n = E(x)$, exprime x à l'aide de n, puis impose $n \leq x < n+1$.
4. **Pour tracer** E : sur chaque $[n, n+1[$, un palier à la hauteur n, point plein à gauche, point creux à droite.



$y = E(x)$ ● Point du graphe ○ Point exclu du graphe

Escalier de la partie entière, tracé de −2 à 3 : E(x) vaut l'entier n tant que n ≤ x < n + 1, puis saute d'une unité.

Borne exclue en x = −1 : point creux à l'ordonnée estimée ≈ −2.

Borne exclue en x = 0 : point creux à l'ordonnée estimée ≈ −1.

Borne exclue en x = 1 : point creux à l'ordonnée estimée ≈ 0.

Borne exclue en x = 2 : point creux à l'ordonnée estimée ≈ 1.

Borne exclue en x = 3 : point creux à l'ordonnée estimée ≈ 2.

Exemple

Calculs. $E(5{,}8) = 5$, $E(-0{,}5) = -1$ et $E(7) = 7$. Enfin $E(\sqrt{2}) = 1$, car $1 \leq \sqrt{2} < 2$.

Équation. $E(x) = -2$ équivaut à $-2 \leq x < -1$: $S = [-2, -1[$.

Inéquation. Montrons que $E(x) \leq 1$ équivaut à $x < 2$.

- Si $x < 2$, alors $E(x) \leq x < 2$; l'entier $E(x)$ vaut donc au plus 1.
- Si $E(x) \leq 1$, alors $x < E(x) + 1 \leq 2$ (propriétés de la partie entière, F20).

Attention : Partie entière d'un réel négatif

$E(-3{,}6) = -4$, et non -3. La partie entière d'un réel est le plus grand entier inférieur ou égal à ce réel. Ce n'est pas « le réel sans ses décimales ».

Contrôle : $-4 \leq -3{,}6 < -3$. Pour un réel positif, les deux idées donnent le même entier : $E(3{,}6) = 3$.

Choisir sa méthode

Méthode : Quelle méthode : la courbe et ses propriétés

Repère la forme de la question, puis choisis ton outil.

Question posée	Méthode à essayer
la droite d'équation $x = a$ est-elle un axe de symétrie ?	$2a - x \in D_f$, puis $f(2a - x) = f(x)$ (F01)
le point $\Omega(a, b)$ est-il un centre de symétrie ?	$2a - x \in D_f$, puis $f(2a - x) + f(x) = 2b$ (F01)
f est-elle majorée, minorée, bornée ?	« Soit $x \in I$ », encadrement, borne sans x (F02, F03)
f n'est pas majorée	pour tout réel M, un x tel que $f(x) > M$
T est-il une période ?	$x + T$ et $x - T$ dans D_f, puis $f(x + T) = f(x)$ (F04)
f n'est pas périodique	par l'absurde, avec des valeurs bien choisies
extremum	variations (F14), ou signe de $f(x) - f(a)$ (F13)

Méthode : Quelle méthode : calculs et résolutions

Même réflexe pour les calculs : la forme de la question indique l'outil.

Question posée	Méthode à essayer
équation, inéquation du second degré	discriminant, racines, signe de a (F06, F07)
position de deux courbes	signe de $f(x) - g(x)$ (F08)
sens de variation	signe du taux $T(x, y)$ (F11), parité (F12), composée (F16)
ensemble de définition d'une composée	$x \in D_f$ et $f(x) \in D_g$ (F15)
calculer $E(x)$, résoudre $E(x) = n$	encadrement $n \leq x < n + 1$ (F19, F20)

À retenir : Rédiger en devoir

Introduis chaque variable par « Soit ». Écris le majorant avant de faire varier x. Annonce ton raisonnement : « par l'absurde », « par disjonction des cas », « par récurrence ».

Cite l'énoncé utilisé et vérifie ses hypothèses : intervalle, sens de variation, inclusion $f(I) \subset J$. Termine par une phrase de conclusion.