BURHAN

Généralités sur les fonctions numériques : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/generalites-sur-les-fonctions/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Généralités sur les fonctions numériques	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Étude d'un quotient de deux trinômes

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 2x + 2}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. 0,75 pts

Montrer que $D_f = \mathbb{R}$ et que, pour tout réel x, $f(x) = 1 - \dfrac{2}{(x-1)^2 + 1}$.

INDICE

Outil : la forme canonique du dénominateur. **Début :** écris le numérateur comme le dénominateur moins 2.

2. 0,75 pts

Montrer que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : caractérisation d'un axe de symétrie (F01), avec $a = 1$: calcule $f(2 - x)$ à l'aide de l'écriture obtenue en 1.

3. 1 pts

Montrer que, pour tout réel x, $-1 \leq f(x) < 1$. La fonction f est-elle bornée sur $\mathbb{R}$?

INDICE

Outil : encadre $(x-1)^2 + 1$, puis son inverse. **Point délicat :** l'inverse renverse l'ordre sur $]0, +\infty[$.

4. 1 pts

Montrer que -1 est le minimum de f sur $\mathbb{R}$. Montrer ensuite que f n'admet pas de maximum sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : définition des extremums (F13). **Début :** calcule $f(1)$. **Point délicat :** pour le maximum, raisonne par l'absurde avec un réel x plus éloigné de 1 que a.

5. 0,75 pts

On pose $u(x) = (x-1)^2 + 1$ pour tout réel x, et $g(t) = 1 - \dfrac{2}{t}$ pour tout $t > 0$. Vérifier que $f = g \circ u$, puis montrer que g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

INDICE

Outil : définition de la composée (F15), puis le taux de variation de g (taux de variation et monotonie, F11). **Début :** vérifie que $u(x) > 0$ pour tout réel x.

6. 0,75 pts

En déduire le sens de variation de f sur $]-\infty, 1]$ et sur $[1, +\infty[$.

INDICE

Outil : monotonie d'une composée (F16). **Début :** étudie le sens de variation de u sur chaque intervalle par son taux de variation. **Point délicat :** vérifie que $u(\mathbb{R}) \subset]0, +\infty[$.

Exercice 2 5 pts

Un trinôme qui dépend d'un paramètre

Soit m un réel. On considère le trinôme P_m défini sur $\mathbb{R}$ par $P_m(x) = x^2 - 2mx + m + 2$, et sa courbe $\mathcal{C}_m$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. 0,75 pts

Calculer le discriminant Δ_m de P_m, et montrer que $\Delta_m = 4(m+1)(m-2)$.

INDICE

Outil : $\Delta = b^2 - 4ac$, avec $a = 1$, $b = -2m$ et $c = m + 2$.

2. 1,25 pts

Discuter, selon les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation $P_m(x) = 0$. Donner la solution lorsqu'elle est unique.

INDICE

Outil : le signe de $(m+1)(m-2)$, trinôme en m (signe du trinôme, F07), puis les racines d'un trinôme (F06). **Point délicat :** la racine double vaut $-\dfrac{b}{2a} = m$.

3. 0,75 pts

En déduire que, pour $m \in]-1, 2[$, la courbe $\mathcal{C}_m$ est strictement au-dessus de l'axe des abscisses.

INDICE

Outil : le signe du trinôme (F07) quand le discriminant est négatif ; l'axe des abscisses est la courbe de la fonction nulle (comparaison de deux fonctions, F08).

4. 1 pts

Dans cette question, $m = 3$. Résoudre l'inéquation $P_3(x) \leq 0$, puis déterminer les points communs à $\mathcal{C}_3$ et à la droite d'équation $y = 5$.

INDICE

Outil : factorise $P_3(x)$, puis applique le signe du trinôme (F07). Pour les points communs, résous $P_3(x) - 5 = 0$.

5. 1,25 pts

On suppose $\Delta_m > 0$, et on note x_1 et x_2 les deux solutions de $P_m(x) = 0$. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles x_1 et x_2 sont toutes deux strictement positives.

INDICE

Outil : la somme et le produit des racines (racines d'un trinôme, F06). **Point délicat :** démontre que deux réels sont strictement positifs si et seulement si leur somme et leur produit le sont.

Exercice 3 5 pts

Une fonction polynôme impaire de degré 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. 0,5 pts

Montrer que f est impaire. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}_f$?

INDICE

Outil : calcule $f(-x)$, puis la caractérisation d'un centre de symétrie (FO1), avec $a = 0$ et $b = 0$.

2. 0,5 pts

Montrer que, pour tous réels distincts x et y, $T(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3$.

INDICE

Outil : $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$.

3. 0,75 pts

En déduire que f est strictement décroissante sur $[0, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

INDICE

Outil : taux de variation et monotonie (F11). **Point délicat :** sur $[0, 1]$, compare chacun des trois termes x^2, xy, y^2 à 1, et explique pourquoi l'un d'eux est strictement inférieur à 1.

4. 0,75 pts

En déduire le sens de variation de f sur $[-1, 0]$ et sur $]-\infty, -1]$.

INDICE

Outil : monotonie et parité (F12), pour une fonction impaire.

5. 0,75 pts

Montrer que f admet un maximum local en -1 et un minimum local en 1, et donner leurs valeurs.

INDICE

Outil : extremum et tableau de variations (F14) sur $[-2, 0]$, puis sur $[0, 2]$.

6. 1 pts

Montrer que, pour tout réel x, $f(x) - 2 = (x + 1)^2(x - 2)$. En déduire que 2 est le maximum de f sur $]-\infty, 2]$, et préciser en quels réels il est atteint.

INDICE

Outil : développe le second membre, puis étudie le signe de chaque facteur pour $x \leq 2$ (définition d'un maximum, F13).

7. `0,75 pts`

On pose $g(x) = f(\sqrt{x})$ pour tout réel $x \geq 0$. Déterminer le sens de variation de g sur $[0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$, puis le minimum de g sur $[0, +\infty[$.

INDICE

Outil : g est la composée de la racine carrée suivie de f ; applique la monotonie d'une composée (F16). **Point délicat :** vérifie que la racine carrée envoie $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ et $[1, +\infty[$ dans $[1, +\infty[$.

Exercice 4 5 pts

Une fonction paire et périodique construite sur la racine carrée

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, paire, périodique de période 2, qui coïncide avec la fonction racine carrée sur $[0,1]$: pour tout $x \in [0,1]$, l'image de x par f est $\sqrt{x}$. On admet qu'une telle fonction existe et qu'elle est unique. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. 0,75 pts

Calculer $f(5)$, $f(-6)$, $f\left(\dfrac{9}{4}\right)$ et $f\left(-\dfrac{7}{2}\right)$.

INDICE

Outil : multiples d'une période (F05) : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2n$ est une période de f. **Début :** ramène chaque réel dans $[0,1]$, en utilisant la parité si besoin.

2. 0,75 pts

Montrer que, pour tout $x \in [-1,0]$, $f(x) = \sqrt{-x}$, puis que, pour tout $x \in [1,2]$, $f(x) = \sqrt{2-x}$.

INDICE

Outil : la parité pour $[-1,0]$; la période pour $[1,2]$. **Point délicat :** vérifie que $x-2$ appartient à $[-1,0]$.

3. 0,75 pts

Montrer que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : caractérisation d'un axe de symétrie (F01), avec $a = 1$. **Début :** écris $f(2-x)$ à l'aide de la période, puis de la parité.

4. 1 pts

Déterminer le sens de variation de f sur $[0,1]$, puis en déduire son sens de variation sur $[-1,0]$ et sur $[1,2]$.

INDICE

Outil : monotonie et parité (F12) pour $[-1,0]$; pour $[1,2]$, monotonie d'une composée (F16), avec $u(x) = 2-x$ suivie de la racine carrée. **Point délicat :** vérifie que u envoie $[1,2]$ dans $[0,1]$.

5. 0,75 pts

Montrer que, pour tout réel x, $0 \leq f(x) \leq 1$. En déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}$, puis donner son maximum et son minimum sur $\mathbb{R}$, avec un réel où chacun est atteint.

INDICE

Outil : la définition de la partie entière (F19), appliquée à x, fournit un entier relatif n tel que $n \leq x < n+1$; distingue n pair et n impair. **Début :** encadre d'abord f sur $[-1,1]$ à l'aide de 2.

6. 1 pts

Résoudre dans $[-1, 1]$ l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$. En déduire l'ensemble des solutions de cette équation dans $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : les expressions de f obtenues en 2., puis l'entier p de 5. **Point délicat :** démontre les deux inclusions : toute solution est de la forme annoncée, et tout réel de cette forme est solution.

Exercice 5 5 pts

Une racine carrée comparée à trois droites

Soit f la fonction définie par $f(x)=\sqrt{x+8}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. On considère les droites D et D' d'équations respectives $y=\dfrac{x+12}{4}$ et $y=\dfrac{x+8}{2}$.

1. 0,5 pts

Donner D_f et le sens de variation de f sur D_f. Vérifier que le point $A(-4,2)$ appartient à $\mathcal{C}_f$, à D et à D', puis calculer $f(-7)$.

INDICE

Outil : la propriété de la fonction $x\mapsto\sqrt{x+a}$ (F17), avec $a=8$.

2. 1 pts

Montrer que, pour tout $x\in[-8,+\infty[$, $\dfrac{x+12}{4}-f(x)=\dfrac{\big(f(x)-2\big)^2}{4}$. En déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de D, et leurs points communs.

INDICE

Outil : $\big(f(x)\big)^2=x+8$ pour $x\geq -8$; développe le carré. Puis la comparaison de deux fonctions (F08).

3. 1 pts

Montrer que, pour tout $x\geq -8$, $f(x)-\dfrac{x+8}{2}=\dfrac{f(x)\big(2-f(x)\big)}{2}$. Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de D', puis en déduire que, pour tout $x\in[-8,-4]$, $\dfrac{x+8}{2}\leq f(x)\leq\dfrac{x+12}{4}$.

INDICE

Outil : $x+8=\big(f(x)\big)^2$, puis le signe d'un produit. **Point délicat :** $f(x)\leq 2$ équivaut à $x\leq -4$, par stricte croissance de f et $f(-4)=2$.

4. 1,25 pts

Résoudre dans D_f l'inéquation $f(x)\geq x+6$. Interpréter le résultat à l'aide de $\mathcal{C}_f$ et de la droite d'équation $y=x+6$.

INDICE

Outil : disjonction des cas selon le signe de $x+6$. **Point délicat :** l'élévation au carré conserve l'ordre seulement entre deux réels positifs ou nuls ; puis le signe du trinôme (F07).

5. 1,25 pts

On pose $k(x) = f(x) - \dfrac{x+8}{2}$ pour tout $x \in [-8,-4]$. Montrer que, pour tout $x \in [-8,-4]$, $\dfrac{1}{2} - k(x) = \dfrac{\big(f(x)-1\big)^2}{2}$. En déduire le maximum et le minimum de k sur $[-8,-4]$, et les réels où ils sont atteints.

INDICE

Outil : définition des extremums (F13) ; pour le maximum, le signe de $\dfrac{1}{2} - k(x)$; pour le minimum, la question 3. **Début :** remplace encore $x+8$ par $\big(f(x)\big)^2$.