BURHAN

Généralités sur les fonctions numériques : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/generalites-sur-les-fonctions/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Généralités sur les fonctions numériques	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Étude d'un quotient de deux trinômes

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 2x + 2}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. 0,75 pts

Montrer que $D_f = \mathbb{R}$ et que, pour tout réel x, $f(x) = 1 - \dfrac{2}{(x-1)^2 + 1}$.

INDICE

Outil : la forme canonique du dénominateur. **Début :** écris le numérateur comme le dénominateur moins 2.

CORRIGÉ

Ensemble de définition. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 2 &= (x-1)^2 + 1 \\ &\geq 1 > 0. \end{aligned}$$

Le dénominateur ne s'annule jamais, donc $D_f = \mathbb{R}$.

Écriture de $f(x)$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Le numérateur vaut $(x^2 - 2x + 2) - 2$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x^2 - 2x + 2) - 2}{x^2 - 2x + 2} \\ &= 1 - \frac{2}{(x-1)^2 + 1}. \end{aligned}$$

Conclusion. $D_f = \mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f(x) = 1 - \dfrac{2}{(x-1)^2 + 1}$.

2. 0,75 pts

Montrer que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : caractérisation d'un axe de symétrie (F01), avec $a = 1$: calcule $f(2 - x)$ à l'aide de l'écriture obtenue en 1.

CORRIGÉ

D'après la caractérisation d'un axe de symétrie (F01), avec $a = 1$, il s'agit de montrer que, pour tout réel x, $2 - x \in D_f$ et $f(2 - x) = f(x)$.

Domaine. Pour tout réel x, $2 - x \in \mathbb{R} = D_f$.

Calcul. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $(2 - x - 1)^2 = (1 - x)^2 = (x - 1)^2$. D'après 1. :

$$\begin{aligned} f(2 - x) &= 1 - \frac{2}{(1-x)^2 + 1} \\ &= 1 - \frac{2}{(x-1)^2 + 1} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Conclusion. Le repère étant orthogonal, la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

3. 1 pts

Montrer que, pour tout réel x, $-1 \leq f(x) < 1$. La fonction f est-elle bornée sur $\mathbb{R}$?

INDICE

Outil : encadre $(x-1)^2+1$, puis son inverse. **Point délicat :** l'inverse renverse l'ordre sur $]0,+\infty[$.

CORRIGÉ

Encadrement. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $(x-1)^2+1 \geq 1 > 0$. La fonction inverse est décroissante sur $]0,+\infty[$; en multipliant ensuite par $2 > 0$:

$$0 < \frac{2}{(x-1)^2+1} \leq 2.$$

En passant aux opposés, puis en ajoutant 1, on obtient, d'après 1. :

$$-1 \leq f(x) < 1.$$

Bornée. Les réels -1 et 1 ne dépendent pas de x : f est minorée par -1 et majorée par 1.

Conclusion. Pour tout réel x, $-1 \leq f(x) < 1$, et f est bornée sur $\mathbb{R}$ (définition d'une fonction bornée, F02).

4. 1 pts

Montrer que -1 est le minimum de f sur $\mathbb{R}$. Montrer ensuite que f n'admet pas de maximum sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : définition des extremums (F13). **Début :** calcule $f(1)$. **Point délicat :** pour le maximum, raisonne par l'absurde avec un réel x plus éloigné de 1 que a.

CORRIGÉ

Minimum. $f(1) = 1 - \dfrac{2}{1} = -1$ et, d'après 3., $f(x) \geq -1$ pour tout réel x. D'après la définition d'un minimum (F13), -1 est le minimum de f sur $\mathbb{R}$, atteint en 1.

Pas de maximum. Supposons par l'absurde qu'il existe un réel a tel que $f(a)$ soit le maximum de f sur $\mathbb{R}$. Posons $x = 2 + |a-1|$. Alors :

$$\begin{aligned} x - 1 &= |a-1| + 1 \\ &> |a-1| \geq 0, \end{aligned}$$

donc $(x-1)^2 > (a-1)^2$. Les deux dénominateurs ci-dessous sont strictement positifs, et l'inverse est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$:

$$\frac{2}{(x-1)^2+1} < \frac{2}{(a-1)^2+1}.$$

D'après 1., cela donne $f(x) > f(a)$, ce qui contredit le choix de a.

Conclusion. -1 est le minimum de f sur $\mathbb{R}$, et f n'admet pas de maximum sur $\mathbb{R}$, bien qu'elle soit majorée par 1.

5. 0,75 pts

On pose $u(x) = (x-1)^2 + 1$ pour tout réel x, et $g(t) = 1 - \dfrac{2}{t}$ pour tout $t > 0$. Vérifier que $f = g \circ u$, puis montrer que g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

INDICE

Outil : définition de la composée (F15), puis le taux de variation de g (taux de variation et monotonie, F11). **Début :** vérifie que $u(x) > 0$ pour tout réel x.

CORRIGÉ

Composée. Pour tout réel x, $u(x) \geq 1 > 0$: $u(x)$ appartient à $]0, +\infty[$, ensemble de définition de g. D'après la définition de la composée (F15) et la question 1., pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g\big(u(x)\big) &= 1 - \frac{2}{(x-1)^2 + 1} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Monotonie de g. Soit s et t deux réels distincts de $]0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} g(s) - g(t) &= \frac{2}{t} - \frac{2}{s} \\ &= \frac{2(s-t)}{st}. \end{aligned}$$

Le taux de variation de g entre s et t vaut donc $\dfrac{2}{st}$, qui est strictement positif.

Conclusion. $f = g \circ u$ et, d'après la propriété « taux de variation et monotonie » (F11), g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

6. `0,75 pts`

En déduire le sens de variation de f sur $]-\infty, 1]$ et sur $[1, +\infty[$.

INDICE

Outil : monotonie d'une composée (F16). **Début :** étudie le sens de variation de u sur chaque intervalle par son taux de variation. **Point délicat :** vérifie que $u(\mathbb{R}) \subset]0, +\infty[$.

CORRIGÉ

Taux de variation de u. Soit x et y deux réels distincts :

$$\begin{aligned} &u(x) - u(y) \\ &= (x-1)^2 - (y-1)^2 \\ &= (x-y)(x+y-2). \end{aligned}$$

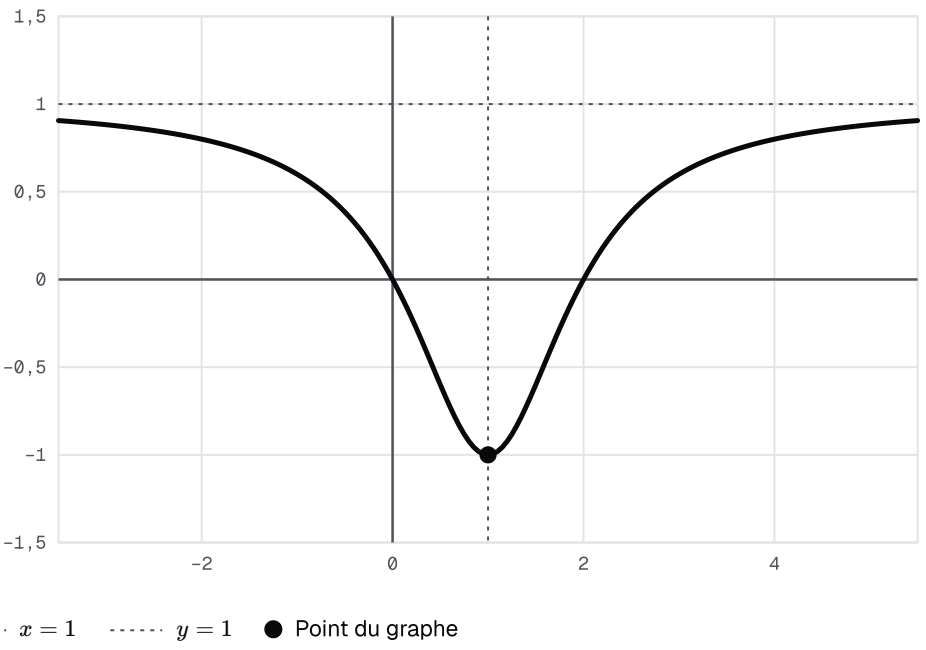
Le taux de variation de u entre x et y vaut donc $x + y - 2$. D'après la propriété « taux de variation et monotonie » (F11) :

- si x et y sont distincts dans $[1, +\infty[$, alors $x + y > 2$: u est strictement croissante sur $[1, +\infty[$;
- si x et y sont distincts dans $]-\infty, 1]$, alors $x + y < 2$: u est strictement décroissante sur $]-\infty, 1]$.

Composée. Pour tout réel x, $u(x) \geq 1$, donc $u(\mathbb{R}) \subset]0, +\infty[$, où g est strictement croissante (question 5.). D'après la monotonie d'une composée (F16) :

- sur $]-\infty, 1]$, u et g ont des sens contraires : $f = g \circ u$ est strictement décroissante ;
- sur $[1, +\infty[$, elles ont le même sens : f est strictement croissante.

Conclusion. f est strictement décroissante sur $]-\infty, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Ce résultat est cohérent avec le minimum atteint en 1 et avec l'axe de symétrie d'équation $x = 1$.



Courbe de f : x ↦ (x² − 2x)/(x² − 2x + 2) : symétrique par rapport à la droite d'équation x = 1, minimum −1 atteint en 1, et toujours sous la droite d'équation y = 1 sans jamais l'atteindre.

Exercice 2 5 pts

Un trinôme qui dépend d'un paramètre

Soit m un réel. On considère le trinôme P_m défini sur $\mathbb{R}$ par $P_m(x) = x^2 - 2mx + m + 2$, et sa courbe $\mathcal{C}_m$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. 0,75 pts

Calculer le discriminant Δ_m de P_m, et montrer que $\Delta_m = 4(m+1)(m-2)$.

INDICE

Outil : $\Delta = b^2 - 4ac$, avec $a = 1, b = -2m$ et $c = m + 2$.

CORRIGÉ

Avec $a = 1, b = -2m$ et $c = m + 2$:

$$\begin{aligned} \Delta_m &= (-2m)^2 - 4(m+2) \\ &= 4m^2 - 4m - 8 \\ &= 4(m^2 - m - 2). \end{aligned}$$

Or, en développant :

$$\begin{aligned} &(m+1)(m-2) \\ &= m^2 - 2m + m - 2 \\ &= m^2 - m - 2. \end{aligned}$$

Conclusion. $\Delta_m = 4(m+1)(m-2)$.

2. 1,25 pts

Discuter, selon les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation $P_m(x) = 0$. Donner la solution lorsqu'elle est unique.

INDICE

Outil : le signe de $(m+1)(m-2)$, trinôme en m (signe du trinôme, F07), puis les racines d'un trinôme (F06). **Point délicat :** la racine double vaut $-\dfrac{b}{2a} = m$.

CORRIGÉ

Signe de Δ_m. Le trinôme $(m+1)(m-2)$, en la variable m, a pour racines -1 et 2, et pour coefficient dominant $1 > 0$. D'après le signe du trinôme (F07), il est strictement positif si $m < -1$ ou $m > 2$, nul si $m = -1$ ou $m = 2$, et strictement négatif si $-1 < m < 2$. Comme $4 > 0$, le réel Δ_m a le même signe.

Nombre de solutions. D'après les racines d'un trinôme (F06) :

- si $m < -1$ ou $m > 2$: $\Delta_m > 0$, l'équation a deux solutions distinctes ;
- si $m = -1$ ou $m = 2$: $\Delta_m = 0$, l'équation a une seule solution, $x_0 = -\dfrac{-2m}{2} = m$;
- si $-1 < m < 2$: $\Delta_m < 0$, l'équation n'a aucune solution réelle.

Solution unique. Pour $m = -1$, c'est -1, et $P_{-1}(x) = (x+1)^2$. Pour $m = 2$, c'est 2, et $P_2(x) = (x-2)^2$.

Conclusion. L'équation $P_m(x) = 0$ a deux solutions si $m < -1$ ou $m > 2$; une seule si $m = -1$ (la solution -1) ou $m = 2$ (la solution 2) ; aucune si $-1 < m < 2$.

3. 0,75 pts

En déduire que, pour $m \in]-1, 2[$, la courbe $\mathcal{C}_m$ est strictement au-dessus de l'axe des abscisses.

INDICE

Outil : le signe du trinôme (F07) quand le discriminant est négatif ; l'axe des abscisses est la courbe de la fonction nulle (comparaison de deux fonctions, F08).

CORRIGÉ

Soit $m \in]-1, 2[$. D'après 2., $\Delta_m < 0$, et le coefficient de x^2 vaut $1 > 0$. D'après le signe du trinôme (F07), $P_m(x) > 0$ pour tout réel x.

L'axe des abscisses est la courbe de la fonction nulle. D'après la comparaison de deux fonctions (F08), l'inégalité $P_m(x) > 0$, vraie pour tout réel x, signifie que $\mathcal{C}_m$ est strictement au-dessus de cet axe.

Conclusion. Pour tout $m \in]-1, 2[$, la courbe $\mathcal{C}_m$ est strictement au-dessus de l'axe des abscisses.

4. 1 pts

Dans cette question, $m = 3$. Résoudre l'inéquation $P_3(x) \leq 0$, puis déterminer les points communs à $\mathcal{C}_3$ et à la droite d'équation $y = 5$.

INDICE

Outil : factorise $P_3(x)$, puis applique le signe du trinôme (F07). Pour les points communs, résous $P_3(x) - 5 = 0$.

CORRIGÉ

Inéquation. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} P_3(x) &= x^2 - 6x + 5 \\ &= (x-1)(x-5). \end{aligned}$$

Ce trinôme, de coefficient dominant $1 > 0$, est négatif ou nul entre ses racines 1 et 5, et strictement positif ailleurs (signe du trinôme, F07).

Points communs. Un point de $\mathcal{C}_3$ d'abscisse x est sur la droite d'équation $y = 5$ si et seulement si $P_3(x) = 5$. Or :

$$\begin{aligned} P_3(x) - 5 &= x^2 - 6x \\ &= x(x-6), \end{aligned}$$

qui s'annule en 0 et en 6.

Conclusion. L'ensemble des solutions de $P_3(x) \leq 0$ est $[1, 5]$, et les points communs à $\mathcal{C}_3$ et à la droite d'équation $y = 5$ sont $(0, 5)$ et $(6, 5)$.

5. 1,25 pts

On suppose $\Delta_m > 0$, et on note x_1 et x_2 les deux solutions de $P_m(x) = 0$. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles x_1 et x_2 sont toutes deux strictement positives.

INDICE

Outil : la somme et le produit des racines (racines d'un trinôme, F06). **Point délicat :** démontre que deux réels sont strictement positifs si et seulement si leur somme et leur produit le sont.

CORRIGÉ

Somme et produit. D'après les racines d'un trinôme (F06) :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2m,$$
$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = m + 2.$$

Une équivalence. Montrons que x_1 et x_2 sont strictement positifs si et seulement si $x_1 + x_2 > 0$ et $x_1 x_2 > 0$.

- Si $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$, leur somme et leur produit sont strictement positifs.
- Réciproquement, si $x_1 x_2 > 0$, les deux racines sont non nulles et de même signe. Si de plus $x_1 + x_2 > 0$, elles ne peuvent pas être toutes deux négatives : elles sont strictement positives.

Condition sur m. On cherche donc m tel que $\Delta_m > 0$, $2m > 0$ et $m + 2 > 0$, c'est-à-dire ($m < -1$ ou $m > 2$), $m > 0$ et $m > -2$. Cela équivaut à $m > 2$.

Conclusion. Les deux solutions de $P_m(x) = 0$ sont strictement positives si et seulement si $m > 2$. Par exemple, pour $m = 3$, ce sont 1 et 5.

Exercice 3 5 pts

Une fonction polynôme impaire de degré 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. 0,5 pts

Montrer que f est impaire. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}_f$?

INDICE

Outil : calcule $f(-x)$, puis la caractérisation d'un centre de symétrie (FO1), avec $a = 0$ et $b = 0$.

CORRIGÉ

Parité. Pour tout réel x, $-x \in \mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 - 3(-x) \\ &= -x^3 + 3x = -f(x). \end{aligned}$$

Donc f est impaire.

Courbe. Pour tout réel x, $f(-x) + f(x) = 0 = 2 \times 0$. D'après la caractérisation d'un centre de symétrie (FO1, avec $a = b = 0$), l'origine O est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

Conclusion. f est impaire, et l'origine O du repère est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

2. 0,5 pts

Montrer que, pour tous réels distincts x et y, $T(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3$.

INDICE

Outil : $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$.

CORRIGÉ

Soit x et y deux réels distincts. On factorise par $x - y$:

$$\begin{aligned} &f(x) - f(y) \\ &= (x^3 - y^3) - 3(x - y) \\ &= (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 3). \end{aligned}$$

En divisant par $x - y \neq 0$, on obtient le taux de variation de f entre x et y.

Conclusion. Pour tous réels distincts x et y :

$$T(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3.$$

3. 0,75 pts

En déduire que f est strictement décroissante sur $[0,1]$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

INDICE

Outil : taux de variation et monotonie (F11). **Point délicat :** sur $[0,1]$, compare chacun des trois termes x^2, xy, y^2 à 1, et explique pourquoi l'un d'eux est strictement inférieur à 1.

CORRIGÉ

On utilise l'expression de $T(x,y)$ obtenue en 2.

Sur $[0,1]$. Soit x et y distincts dans $[0,1]$. Alors $x^2 \leq 1$, $xy \leq 1$ et $y^2 \leq 1$. Comme $x \neq y$, l'un des deux, disons x, est différent de 1 : alors $0 \leq x < 1$, donc $x^2 < 1$. Ainsi :

$$x^2 + xy + y^2 < 3,$$

et $T(x,y) < 0$.

Sur $[1,+\infty[$. Soit x et y distincts dans $[1,+\infty[$. Alors $x^2 \geq 1$, $xy \geq 1$ et $y^2 \geq 1$. L'un des deux, disons x, vérifie $x > 1$, donc $x^2 > 1$. Ainsi $x^2 + xy + y^2 > 3$, et $T(x,y) > 0$.

Conclusion. D'après la propriété « taux de variation et monotonie » (F11), f est strictement décroissante sur $[0,1]$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

4. 0,75 pts

En déduire le sens de variation de f sur $[-1,0]$ et sur $]-\infty,-1]$.

INDICE

Outil : monotonie et parité (F12), pour une fonction impaire.

CORRIGÉ

La fonction f est impaire. D'après la propriété « monotonie et parité » (F12) :

- appliquée à $I = [0,1]$, où f est strictement décroissante, elle montre que f est strictement décroissante sur $-I = [-1,0]$;
- appliquée à $I = [1,+\infty[$, où f est strictement croissante, elle montre que f est strictement croissante sur $-I =]-\infty,-1]$.

Conclusion. f est strictement décroissante sur $[-1,0]$ et strictement croissante sur $]-\infty,-1]$.

5. 0,75 pts

Montrer que f admet un maximum local en -1 et un minimum local en 1, et donner leurs valeurs.

INDICE

Outil : extremum et tableau de variations (F14) sur $[-2, 0]$, puis sur $[0, 2]$.

CORRIGÉ

En -1. D'après 4., la fonction f est croissante sur $[-2, -1]$ et décroissante sur $[-1, 0]$. D'après la propriété « extremum et tableau de variations » (F14), $f(-1)$ est le maximum de f sur $[-2, 0]$, et f admet un maximum local en -1, avec :

$$f(-1) = -1 + 3 = 2.$$

En 1. De même, f est décroissante sur $[0, 1]$ et croissante sur $[1, 2]$: $f(1)$ est le minimum de f sur $[0, 2]$, et f admet un minimum local en 1, avec :

$$f(1) = 1 - 3 = -2.$$

Conclusion. f admet un maximum local en -1, égal à 2, et un minimum local en 1, égal à -2.

6. 1 pts

Montrer que, pour tout réel x, $f(x) - 2 = (x+1)^2(x-2)$. En déduire que 2 est le maximum de f sur $]-\infty, 2]$, et préciser en quels réels il est atteint.

INDICE

Outil : développe le second membre, puis étudie le signe de chaque facteur pour $x \leq 2$ (définition d'un maximum, F13).

CORRIGÉ

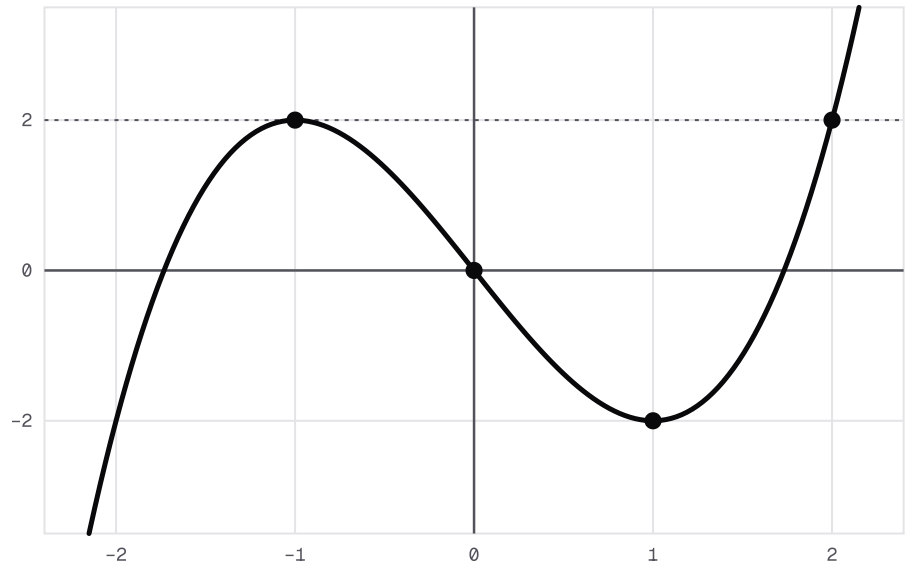
Égalité. Soit x un réel :

$$\begin{aligned}&(x+1)^2(x-2)\\&= (x^2+2x+1)(x-2)\\&= x^3 - 2x^2 + 2x^2\\&\quad - 4x + x - 2\\&= x^3 - 3x - 2 = f(x) - 2.\end{aligned}$$

Signe pour $x \leq 2$. Soit $x \leq 2$. Alors $(x+1)^2 \geq 0$ et $x - 2 \leq 0$, donc $f(x) - 2 \leq 0$, c'est-à-dire $f(x) \leq 2$.

Valeur atteinte. $f(-1) = 2$ et $f(2) = 8 - 6 = 2$, avec -1 et 2 dans $]-\infty, 2]$. Pour $x \leq 2$, l'égalité $f(x) = 2$ équivaut à $(x+1)^2(x-2) = 0$, soit $x = -1$ ou $x = 2$.

Conclusion. Pour tout réel x, $f(x) - 2 = (x+1)^2(x-2)$. D'après la définition d'un maximum (F13), 2 est le maximum de f sur $]-\infty, 2]$, atteint en -1 et en 2 seulement.



Courbe de f : x ↦ x³ − 3x, de centre de symétrie O : maximum local 2 en −1, minimum local −2 en 1. Sur]−∞, 2], le maximum 2 est atteint en −1 et en 2.

7. 0,75 pts

On pose $g(x) = f(\sqrt{x})$ pour tout réel $x \geq 0$. Déterminer le sens de variation de g sur $[0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$, puis le minimum de g sur $[0, +\infty[$.

INDICE

Outil : g est la composée de la racine carrée suivie de f ; applique la monotonie d'une composée (F16). **Point délicat :** vérifie que la racine carrée envoie $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ et $[1, +\infty[$ dans $[1, +\infty[$.

CORRIGÉ

La racine carrée est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, et g est la composée de la racine carrée suivie de f.

Sur $[0, 1]$**.** Si $0 \leq x \leq 1$, alors $0 \leq \sqrt{x} \leq 1$: la racine carrée envoie $[0, 1]$ dans $[0, 1]$, où f est strictement décroissante (question 3.). Les sens sont contraires : d'après la monotonie d'une composée (F16), g est strictement décroissante sur $[0, 1]$.

Sur $[1, +\infty[$**.** Si $x \geq 1$, alors $\sqrt{x} \geq 1$: la racine carrée envoie $[1, +\infty[$ dans $[1, +\infty[$, où f est strictement croissante. Les sens sont les mêmes : g est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ (monotonie d'une composée, F16).

Minimum. Pour $x \in [0, 1]$, $g(x) \geq g(1)$ par décroissance ; pour $x \geq 1$, $g(x) \geq g(1)$ par croissance. Et $g(1) = f(\sqrt{1}) = f(1) = -2$.

Conclusion. g est strictement décroissante sur $[0, 1]$, strictement croissante sur $[1, +\infty[$, et son minimum sur $[0, +\infty[$ est -2, atteint en 1.

Exercice 4 5 pts

Une fonction paire et périodique construite sur la racine carrée

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, paire, périodique de période 2, qui coïncide avec la fonction racine carrée sur $[0,1]$: pour tout $x \in [0,1]$, l'image de x par f est $\sqrt{x}$. On admet qu'une telle fonction existe et qu'elle est unique. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. 0,75 pts

Calculer $f(5)$, $f(-6)$, $f\left(\dfrac{9}{4}\right)$ et $f\left(-\dfrac{7}{2}\right)$.

INDICE

Outil : multiples d'une période (F05) : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2n$ est une période de f. **Début :** ramène chaque réel dans $[0,1]$, en utilisant la parité si besoin.

CORRIGÉ

Translations par un multiple de 2. D'après la propriété des multiples d'une période (F05), pour tout réel x et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x+2n) = f(x)$. Appliquée au réel $x-2n$, cette égalité donne $f(x-2n) = f(x)$. Le cas $n = 0$ étant immédiat, on a, pour tout réel x et tout entier relatif n :

$$f(x+2n) = f(x).$$

Calculs.

- $f(5) = f(1+2\times 2) = f(1) = \sqrt{1} = 1$.
- $f(-6) = f\big(0+2\times(-3)\big) = f(0) = 0$.
- $f\left(\dfrac{9}{4}\right) = f\left(\dfrac{1}{4}+2\right) = f\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$.
- $f\left(-\dfrac{7}{2}\right) = f\left(\dfrac{1}{2}-4\right) = f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, et $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Conclusion. $f(5) = 1$, $f(-6) = 0$, $f\left(\dfrac{9}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$ et $f\left(-\dfrac{7}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2. 0,75 pts

Montrer que, pour tout $x \in [-1, 0]$, $f(x) = \sqrt{-x}$, puis que, pour tout $x \in [1, 2]$, $f(x) = \sqrt{2 - x}$.

INDICE

Outil : la parité pour $[-1, 0]$; la période pour $[1, 2]$. **Point délicat :** vérifie que $x - 2$ appartient à $[-1, 0]$.

CORRIGÉ

Sur $[-1, 0]$**.** Soit $x \in [-1, 0]$. Alors $-x \in [0, 1]$ et, f étant paire :

$$f(x) = f(-x) = \sqrt{-x}.$$

Sur $[1, 2]$**.** Soit $x \in [1, 2]$. Alors $x - 2 \in [-1, 0]$. Comme 2 est une période de f, puis d'après le premier point :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x - 2) \\ &= \sqrt{-(x - 2)} = \sqrt{2 - x}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x \in [-1, 0]$, $f(x) = \sqrt{-x}$; pour tout $x \in [1, 2]$, $f(x) = \sqrt{2 - x}$.

3. 0,75 pts

Montrer que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : caractérisation d'un axe de symétrie (F01), avec $a = 1$. **Début :** écris $f(2 - x)$ à l'aide de la période, puis de la parité.

CORRIGÉ

D'après la caractérisation d'un axe de symétrie (F01), avec $a = 1$, il s'agit de montrer que, pour tout réel x, $2 - x \in D_f$ et $f(2 - x) = f(x)$.

Soit x un réel. Alors $2 - x \in \mathbb{R} = D_f$. Comme 2 est une période de f, puis f étant paire :

$$\begin{aligned} f(2 - x) &= f(-x + 2) \\ &= f(-x) = f(x). \end{aligned}$$

Conclusion. Le repère étant orthogonal, la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

4. 1 pts

Déterminer le sens de variation de f sur $[0,1]$, puis en déduire son sens de variation sur $[-1,0]$ et sur $[1,2]$.

INDICE

Outil : monotonie et parité (F12) pour $[-1,0]$; pour $[1,2]$, monotonie d'une composée (F16), avec $u(x)=2-x$ suivie de la racine carrée. **Point délicat :** vérifie que u envoie $[1,2]$ dans $[0,1]$.

CORRIGÉ

Sur $[0,1]$. La racine carrée est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, et $f(x)=\sqrt{x}$ pour tout $x\in[0,1]$. Donc f est strictement croissante sur $[0,1]$.

Sur $[-1,0]$. La fonction f est paire. D'après la propriété « monotonie et parité » (F12), appliquée à $I=[0,1]$, f est strictement décroissante sur $-I=[-1,0]$.

Sur $[1,2]$. D'après 2., $f(x)=\sqrt{u(x)}$ pour tout $x\in[1,2]$, avec $u(x)=2-x$.

- La fonction u, affine de coefficient -1, est strictement décroissante sur $[1,2]$.
- Si $1\leq x\leq 2$, alors $0\leq 2-x\leq 1$: u envoie $[1,2]$ dans $[0,1]$, où la racine carrée est strictement croissante.

Les sens sont contraires : d'après la monotonie d'une composée (F16), f est strictement décroissante sur $[1,2]$.

Conclusion. f est strictement croissante sur $[0,1]$, strictement décroissante sur $[-1,0]$ et strictement décroissante sur $[1,2]$. Ce résultat est cohérent avec l'axe de symétrie obtenu en 3.

5. 0,75 pts

Montrer que, pour tout réel x, $0 \leq f(x) \leq 1$. En déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}$, puis donner son maximum et son minimum sur $\mathbb{R}$, avec un réel où chacun est atteint.

INDICE

Outil : la définition de la partie entière (F19), appliquée à x, fournit un entier relatif n tel que $n \leq x < n+1$; distingue n pair et n impair. **Début :** encadre d'abord f sur $[-1,1]$ à l'aide de 2.

CORRIGÉ

Sur $[-1,1]$. Si $x \in [0,1]$, alors $f(x) = \sqrt{x}$ et $0 \leq \sqrt{x} \leq 1$. Si $x \in [-1,0]$, alors $f(x) = \sqrt{-x}$ avec $0 \leq -x \leq 1$, donc $0 \leq f(x) \leq 1$.

Sur $\mathbb{R}$. Soit x un réel, et n l'entier relatif tel que $n \leq x < n+1$ (définition de la partie entière, F19).

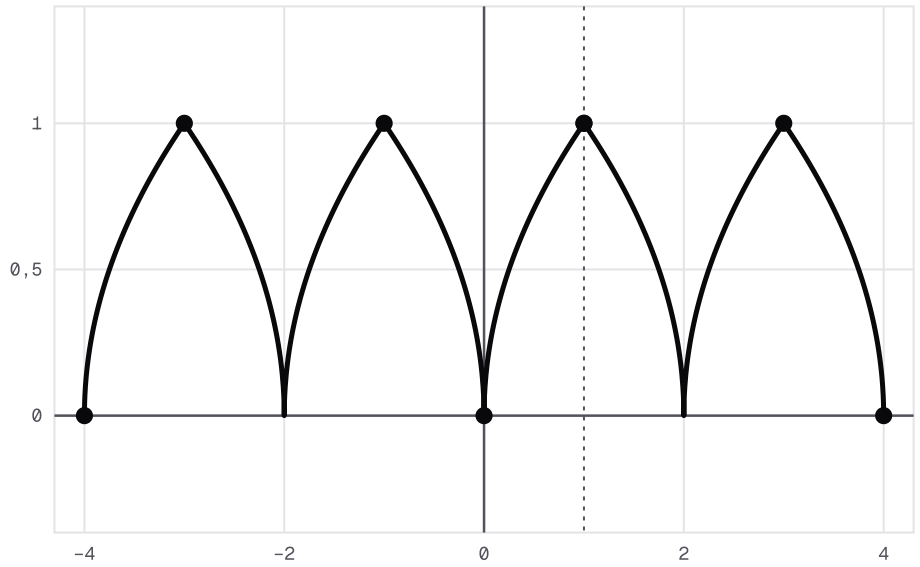
- Si n est pair, $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{Z}$, et $0 \leq x - 2p < 1$.
- Si n est impair, $n = 2p - 1$ avec $p \in \mathbb{Z}$, et $-1 \leq x - 2p < 0$.

Dans les deux cas, $x - 2p \in [-1, 1[$. D'après la propriété des multiples d'une période (F05), étendue aux entiers relatifs en 1., $f(x) = f(x - 2p)$, donc $0 \leq f(x) \leq 1$.

Bornée. Les réels 0 et 1 ne dépendent pas de x : f est minorée et majorée, donc bornée sur $\mathbb{R}$ (définition d'une fonction bornée, F02).

Extremums. $f(1) = 1$ et $f(0) = 0$. D'après la définition des extremums (F13), le maximum de f sur $\mathbb{R}$ est 1, atteint en 1, et son minimum est 0, atteint en 0.

Conclusion. Pour tout réel x, $0 \leq f(x) \leq 1$; f est bornée sur $\mathbb{R}$, de maximum 1, atteint en 1, et de minimum 0, atteint en 0.



Courbe de f, paire, de période 2, égale à √x sur [0, 1] : tracée sur [−4, 4], elle reste entre 0 et 1, avec la droite d'équation x = 1 pour axe de symétrie.

6. 1 pts

Résoudre dans $[-1,1]$ l'équation $f(x)=\dfrac{1}{2}$. En déduire l'ensemble des solutions de cette équation dans $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : les expressions de f obtenues en 2., puis l'entier p de 5. **Point délicat :** démontre les deux inclusions : toute solution est de la forme annoncée, et tout réel de cette forme est solution.

CORRIGÉ

Dans $[-1,1]$. Raisonnons par disjonction des cas.

- Si $x\in[0,1]$: $\sqrt{x}=\dfrac{1}{2}$ équivaut à $x=\dfrac{1}{4}$, qui appartient à $[0,1]$.
- Si $x\in[-1,0]$: $\sqrt{-x}=\dfrac{1}{2}$ équivaut à $-x=\dfrac{1}{4}$, soit $x=-\dfrac{1}{4}$, qui appartient à $[-1,0]$.

Les solutions dans $[-1,1]$ sont $-\dfrac{1}{4}$ et $\dfrac{1}{4}$.

Toute solution est de la forme annoncée. Soit x une solution réelle, et p l'entier relatif de la question 5., tel que $x-2p\in[-1,1[$. D'après 1., $f(x-2p)=f(x)=\dfrac{1}{2}$. Comme $x-2p\in[-1,1]$, l'étude précédente donne $x-2p=\dfrac{1}{4}$ ou $x-2p=-\dfrac{1}{4}$, soit $x=\dfrac{1}{4}+2p$ ou $x=-\dfrac{1}{4}+2p$.

Réciproque. Pour tout entier relatif k, d'après 1. :

$$f\left(\frac{1}{4}+2k\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2},$$

$$f\left(-\frac{1}{4}+2k\right)=f\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}.$$

Conclusion. Dans $[-1,1]$, les solutions de $f(x)=\dfrac{1}{2}$ sont $-\dfrac{1}{4}$ et $\dfrac{1}{4}$. Dans $\mathbb{R}$, ce sont les réels $\dfrac{1}{4}+2k$ et $-\dfrac{1}{4}+2k$, avec $k\in\mathbb{Z}$. Par exemple, $\dfrac{7}{4}=-\dfrac{1}{4}+2$ est solution, en accord avec l'axe de symétrie d'équation $x=1$.

Exercice 5 5 pts

Une racine carrée comparée à trois droites

Soit f la fonction définie par $f(x)=\sqrt{x+8}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. On considère les droites D et D' d'équations respectives $y=\dfrac{x+12}{4}$ et $y=\dfrac{x+8}{2}$.

1. 0,5 pts

Donner D_f et le sens de variation de f sur D_f. Vérifier que le point $A(-4,2)$ appartient à $\mathcal{C}_f$, à D et à D', puis calculer $f(-7)$.

INDICE

Outil : la propriété de la fonction $x\mapsto\sqrt{x+a}$ (F17), avec $a=8$.

CORRIGÉ

Étude de f. D'après la propriété de la fonction $x\mapsto\sqrt{x+a}$ (F17), avec $a=8$: $D_f=[-8,+\infty[$, f est strictement croissante sur $[-8,+\infty[$, et $f(-8)=0$ est son minimum sur D_f.

Le point A. On calcule :

- $f(-4)=\sqrt{4}=2$;
- $\dfrac{-4+12}{4}=2$;
- $\dfrac{-4+8}{2}=2$.

Donc $A(-4,2)$ appartient à $\mathcal{C}_f$, à D et à D'.

Image de -7. $f(-7)=\sqrt{1}=1$.

Conclusion. $D_f=[-8,+\infty[$ et f est strictement croissante sur D_f ; le point A appartient à $\mathcal{C}_f$, à D et à D' ; enfin $f(-7)=1$.

2. 1 pts

Montrer que, pour tout $x \in [-8, +\infty[$, $\dfrac{x+12}{4} - f(x) = \dfrac{\big(f(x)-2\big)^2}{4}$. En déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de D, et leurs points communs.

INDICE

Outil : $\big(f(x)\big)^2 = x+8$ pour $x \geq -8$; développe le carré. Puis la comparaison de deux fonctions (F08).

CORRIGÉ

Égalité. Soit $x \geq -8$. Comme $\big(f(x)\big)^2 = x+8$:

$$\begin{aligned}&\frac{\big(f(x)-2\big)^2}{4}\\ &= \frac{(x+8) - 4f(x) + 4}{4}\\ &= \frac{x+12}{4} - f(x).\end{aligned}$$

Position relative. Un carré est positif ou nul, donc $f(x) \leq \dfrac{x+12}{4}$ pour tout $x \geq -8$. D'après la comparaison de deux fonctions (F08), $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de D sur $[-8, +\infty[$.

Points communs. L'égalité a lieu si et seulement si $f(x) = 2$, c'est-à-dire $x+8 = 4$, soit $x = -4$.

Conclusion. Pour tout $x \geq -8$, $\dfrac{x+12}{4} - f(x) = \dfrac{\big(f(x)-2\big)^2}{4}$. La courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de D sur $[-8, +\infty[$, et leur seul point commun est $A(-4, 2)$.

3. 1 pts

Montrer que, pour tout $x \geq -8$, $f(x) - \dfrac{x+8}{2} = \dfrac{f(x)\big(2-f(x)\big)}{2}$. Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de D', puis en déduire que, pour tout $x \in [-8,-4]$, $\dfrac{x+8}{2} \leq f(x) \leq \dfrac{x+12}{4}$.

INDICE

Outil : $x+8 = \big(f(x)\big)^2$, puis le signe d'un produit. **Point délicat :** $f(x) \leq 2$ équivaut à $x \leq -4$, par stricte croissance de f et $f(-4)=2$.

CORRIGÉ

Égalité. Soit $x \geq -8$. Avec $x+8 = \big(f(x)\big)^2$:

$$\begin{aligned} & f(x) - \frac{x+8}{2} \\ &= f(x) - \frac{\big(f(x)\big)^2}{2} \\ &= \frac{f(x)\big(2-f(x)\big)}{2}. \end{aligned}$$

Signe. Le facteur $f(x)$ est positif ou nul. Comme f est strictement croissante et $f(-4)=2$, on a $2-f(x)>0$ si $x<-4$, et $2-f(x)<0$ si $x>-4$. D'après la comparaison de deux fonctions (F08) :

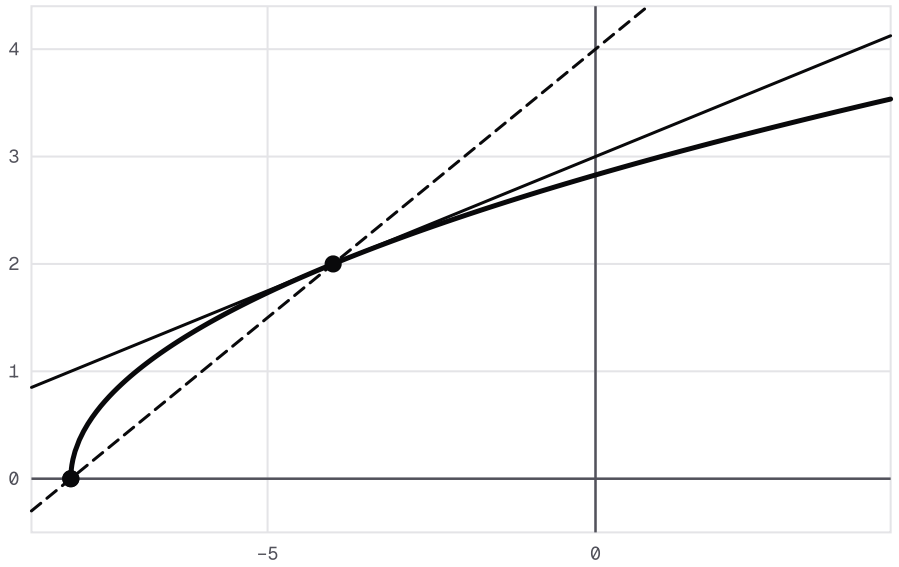
- sur $[-8,-4]$, la différence est positive ou nulle : $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de D' ;
- sur $]-4,+\infty[$, $f(x)>0$ et $2-f(x)<0$: $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessous de D'.

Points communs. La différence est nulle si et seulement si $f(x)=0$ ou $f(x)=2$, soit $x=-8$ ou $x=-4$: les points communs sont $(-8,0)$ et $A(-4,2)$.

Encadrement. Soit $x \in [-8,-4]$. Ce qui précède donne $\dfrac{x+8}{2} \leq f(x)$, et la question 2. donne $f(x) \leq \dfrac{x+12}{4}$.

Conclusion. $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de D' sur $[-8,-4]$ et strictement au-dessous sur $]-4,+\infty[$. Pour tout $x \in [-8,-4]$:

$$\frac{x+8}{2} \leq f(x) \leq \frac{x+12}{4}.$$



Courbe de f : x ↦ √(x + 8) avec les droites D et D' : la courbe touche D en A(−4, 2) en restant dessous, et coupe D' en (−8, 0) et en A.

4. 1,25 pts

Résoudre dans D_f l'inéquation $f(x) \geq x + 6$. Interpréter le résultat à l'aide de $\mathcal{C}_f$ et de la droite d'équation $y = x + 6$.

INDICE

Outil : disjonction des cas selon le signe de $x + 6$. **Point délicat :** l'élévation au carré conserve l'ordre seulement entre deux réels positifs ou nuls ; puis le signe du trinôme (F07).

CORRIGÉ

Soit $x \in D_f = [-8, +\infty[$. Raisonnons par disjonction des cas selon le signe de $x + 6$.

Cas $-8 \leq x < -6$. Alors $x + 6 < 0 \leq f(x)$: l'inéquation est vérifiée, et l'inégalité est stricte.

Cas $x \geq -6$. Les deux membres sont positifs ou nuls, et la fonction carré est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Donc $f(x) \geq x + 6$ équivaut à :

$$x + 8 \geq (x + 6)^2,$$

soit $x^2 + 11x + 28 \leq 0$. Or, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &x^2 + 11x + 28 \\ &= (x + 7)(x + 4). \end{aligned}$$

Ce trinôme, de coefficient dominant positif, est négatif ou nul exactement sur $[-7, -4]$ (signe du trinôme, F07). Avec $x \geq -6$, on obtient $x \in [-6, -4]$.

Ensemble des solutions.

$$\begin{aligned} S &= [-8, -6[\cup [-6, -4] \\ &= [-8, -4]. \end{aligned}$$

Interprétation. D'après la comparaison de deux fonctions (F08), $f(x) \geq x + 6$ signifie que le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x est au-dessus de celui de la droite d'équation $y = x + 6$. Pour $-8 \leq x < -6$, l'inégalité est stricte ; pour $x \geq -6$, l'égalité équivaut à $(x + 7)(x + 4) = 0$, soit $x = -4$.

Conclusion. L'ensemble des solutions est $[-8, -4]$. La courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la droite d'équation $y = x + 6$ sur $[-8, -4]$, strictement au-dessous sur $]-4, +\infty[$, et leur seul point commun est $A(-4, 2)$, par lequel passent aussi D et D'.

5. 1,25 pts

On pose $k(x) = f(x) - \dfrac{x+8}{2}$ pour tout $x \in [-8,-4]$. Montrer que, pour tout $x \in [-8,-4]$, $\dfrac{1}{2} - k(x) = \dfrac{\big(f(x)-1\big)^2}{2}$. En déduire le maximum et le minimum de k sur $[-8,-4]$, et les réels où ils sont atteints.

INDICE

Outil : définition des extremums (F13) ; pour le maximum, le signe de $\dfrac{1}{2} - k(x)$; pour le minimum, la question 3. **Début :** remplace encore $x+8$ par $\big(f(x)\big)^2$.

CORRIGÉ

Égalité. Soit $x \in [-8,-4]$. Avec $x+8 = \big(f(x)\big)^2$:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} - k(x) \\ &= \frac{1}{2} - f(x) + \frac{\big(f(x)\big)^2}{2} \\ &= \frac{1 - 2f(x) + \big(f(x)\big)^2}{2} \\ &= \frac{\big(f(x)-1\big)^2}{2}. \end{aligned}$$

Maximum. Ce carré est positif ou nul, donc $k(x) \le \dfrac{1}{2}$ pour tout $x \in [-8,-4]$. L'égalité a lieu si et seulement si $f(x) = 1$, soit $x+8 = 1$, c'est-à-dire $x = -7$, qui appartient à $[-8,-4]$. Ainsi :

$$k(-7) = \frac{1}{2}.$$

Minimum. D'après 3., $k(x) \ge 0$ pour tout $x \in [-8,-4]$, et $k(-8) = k(-4) = 0$.

Conclusion. D'après la définition des extremums (F13), le maximum de k sur $[-8,-4]$ est $\dfrac{1}{2}$, atteint en -7, et son minimum est 0, atteint en -8 et en -4. Sur $[-8,-4]$, l'écart vertical entre $\mathcal{C}_f$ et D' vaut donc au plus $\dfrac{1}{2}$.