BURHAN

Généralités sur les fonctions numériques : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/generalites-sur-les-fonctions/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Généralités sur les fonctions numériques	Entraînement	8

Exercice 1

Une fonction bornée qui n'a pas de minimum

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2+1}$.

1.

Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x^2+1}$.

INDICE

Outil : écris le numérateur sous la forme $(x^2+1)+2$.

2.

Montrer que, pour tout réel x, $1 < f(x) \leq 3$. La fonction f est-elle bornée sur $\mathbb{R}$?

INDICE

Outil : encadre d'abord x^2+1, puis son inverse. **Point délicat :** l'inverse renverse l'ordre sur $]0, +\infty[$.

3.

Montrer que 3 est le maximum de f sur $\mathbb{R}$, mais que f n'admet pas de minimum sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : définition des extremums (F13). **Début :** pour le minimum, raisonne par l'absurde. **Point délicat :** si $f(a)$ était le minimum, cherche un réel x tel que $f(x) < f(a)$, plus éloigné de 0 que a.

Exercice 2

Trois fonctions qui ne sont pas périodiques

Le but de l'exercice est de montrer que trois fonctions ne sont pas périodiques. On considère les fonctions g et h définies par $g(x) = \sqrt{4 - x}$ et $h(x) = 2x^2 - x$.

1.

Montrer que g n'est pas périodique.

INDICE

Outil : la définition d'une fonction périodique (F04) exige $x + T \in D_g$ pour tout $x \in D_g$. **Début :** détermine D_g, puis essaie $x = 4$.

2.

Montrer que h n'est pas périodique.

INDICE

Outil : par l'absurde, avec une période $T > 0$. **Début :** écris la relation de période en $x = 0$. **Point délicat :** écris-la ensuite en $x = -T$.

3.

Montrer que la fonction partie entière E n'est pas périodique.

INDICE

Outil : par l'absurde. **Début :** en $x = 0$, la relation de période donne un encadrement de T (définition de la partie entière, F19). **Point délicat :** applique ensuite la relation en un réel a tel que $a + T = 1$.

Exercice 3

Une parabole entre deux droites

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 1$. On note D la droite d'équation $y = -x + 4$, et D' la droite d'équation $y = x - 4$.

1.

Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de D, puis déterminer leurs points communs.

INDICE

Outil : le signe de la différence $f(x) - (-x + 4)$, qui est un trinôme (signe du trinôme, F07), puis la comparaison de deux fonctions (F08).

2.

Montrer que $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de D'.

INDICE

Rappel : un trinôme de discriminant négatif garde le signe de a sur tout $\mathbb{R}$ (signe du trinôme, F07).

3.

En déduire que, pour tout $x \in [-1, 3]$, $x - 4 < f(x) \leq -x + 4$, puis que f est bornée sur $[-1, 3]$.

INDICE

Outil : combine 1. et 2. **Point délicat :** les deux membres dépendent encore de x ; majore $-x + 4$ et minore $x - 4$ sur $[-1, 3]$.

Exercice 4

Taux de variation et parité

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 + 2x^2$.

1.

Montrer que f est paire.

INDICE

Outil : $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 ; calcule ensuite $f(-x)$.

2.

Montrer que, pour tous réels distincts x et y, $T(x,y) = (x+y)(x^2+y^2+2)$. En déduire que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

INDICE

Outil : $x^4 - y^4 = (x^2-y^2)(x^2+y^2)$. **Point délicat :** pour deux réels distincts de $[0, +\infty[$, justifie que $x + y > 0$.

3.

En déduire le sens de variation de f sur $]-\infty, 0]$, puis le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : monotonie et parité (F12). Pour le minimum, compare $f(x)$ à $f(0)$ (définition des extremums, F13).

Exercice 5

Maximum et minimum par la définition

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{6x}{x^2+9}$.

1.

Montrer que, pour tout réel x, $1 - f(x) = \dfrac{(x-3)^2}{x^2+9}$. En déduire que f admet un maximum sur $\mathbb{R}$, à préciser.

INDICE

Outil : définition d'un maximum (F13) : compare $f(x)$ à $f(3)$.

2.

Montrer que f est impaire. En déduire que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$, à préciser.

INDICE

Outil : applique l'inégalité obtenue en 1. au réel $-x$. **Point délicat :** un minimum doit être atteint.

3.

Montrer que, pour tout réel x, $|f(x)| \leq 1$. Que peut-on en conclure ?

INDICE

Outil : rassemble les deux inégalités, puis la propriété « fonction bornée et valeur absolue » (F03).

Exercice 6

Variations de la racine carrée d'un trinôme

On note u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2 - 2x + 5$, et h la fonction définie par $h(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$.

1.

Montrer que, pour tout réel x, $u(x) = (x-1)^2 + 4$. En déduire D_h.

INDICE

Outil : d'après la définition de la composée (F15), $x \in D_h$ si et seulement si $u(x) \geq 0$.

2.

Étudier le sens de variation de u sur $]-\infty, 1]$ et sur $[1, +\infty[$.

INDICE

Outil : le taux de variation de u (taux de variation et monotonie, F11). Factorise $u(x) - u(y)$ par $x - y$.

3.

En déduire le sens de variation de h sur chacun de ces intervalles, puis le minimum de h sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : h est la composée de u suivie de la racine carrée. Vérifie que $u(\mathbb{R}) \subset [0, +\infty[$, puis applique la monotonie d'une composée (F16).

Exercice 7

Une racine translatée et une fonction cube

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x+5}$, et k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = 3x^3$.

1.

Donner D_f, le sens de variation de f et son minimum. Comment obtient-on $\mathcal{C}_f$ à partir de la courbe de la fonction racine carrée ?

INDICE

Outil : la propriété de la fonction $x \mapsto \sqrt{x+a}$ (F17), avec $a = 5$.

2.

Résoudre dans D_f l'inéquation $f(x) < 3$.

INDICE

Outil : cherche le réel dont l'image vaut 3. **Point délicat :** utilise la stricte croissance dans les deux sens.

3.

Montrer que k est impaire et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, puis résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $k(x) \leq 24$.

INDICE

Outil : la propriété de la fonction $x \mapsto ax^3$ (F18), avec $a = 3$, puis la même démarche qu'en 2.

Exercice 8

Équations avec une partie entière

Dans tout l'exercice, E désigne la fonction partie entière.

1.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $E(x) = 2x - 1$.

INDICE

Outil : pose $n = E(x)$, puis exprime x à l'aide de n. **Point décisif :** impose ensuite $n \leq x < n + 1$, sans oublier que n est un entier.

2.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $E(x) = 3x - 4$.

INDICE

Outil : comme en 1., pose $n = E(x)$, puis exprime x à l'aide de n. **Point décisif :** impose $n \leq x < n + 1$.

3.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $E(x) < -\frac{3}{2}$.

INDICE

Outil : $E(x)$ est un entier : remplace l'inégalité par une inégalité entre entiers, puis utilise les propriétés de la partie entière (F20).