BURHAN

Généralités sur les fonctions numériques : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/generalites-sur-les-fonctions/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Généralités sur les fonctions numériques	Entraînement	8

Exercice 1

Une fonction bornée qui n'a pas de minimum

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2+1}$.

1.

Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x^2+1}$.

INDICE

Outil : écris le numérateur sous la forme $(x^2+1)+2$.

CORRIGÉ

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $x^2+1 > 0$, et le numérateur s'écrit $(x^2+1)+2$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x^2+1)+2}{x^2+1} \\ &= 1 + \frac{2}{x^2+1}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x^2+1}$.

2.

Montrer que, pour tout réel x, $1 < f(x) \leq 3$. La fonction f est-elle bornée sur $\mathbb{R}$?

INDICE

Outil : encadre d'abord x^2+1, puis son inverse. **Point délicat :** l'inverse renverse l'ordre sur $]0, +\infty[$.

CORRIGÉ

Encadrement. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $x^2+1 \geq 1 > 0$. La fonction inverse est décroissante sur $]0, +\infty[$, donc :

$$0 < \frac{1}{x^2+1} \leq 1.$$

En multipliant par $2 > 0$, puis en ajoutant 1 :

$$1 < 1 + \frac{2}{x^2+1} \leq 3,$$

c'est-à-dire $1 < f(x) \leq 3$, d'après 1.

Bornes. Les réels 1 et 3 ne dépendent pas de x : f est minorée par 1 et majorée par 3 sur $\mathbb{R}$.

Conclusion. Pour tout réel x, $1 < f(x) \leq 3$, et f est bornée sur $\mathbb{R}$ (définition d'une fonction bornée, F02).

3.

Montrer que 3 est le maximum de f sur $\mathbb{R}$, mais que f n'admet pas de minimum sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : définition des extremums (F13). **Début :** pour le minimum, raisonne par l'absurde. **Point délicat :** si $f(a)$ était le minimum, cherche un réel x tel que $f(x) < f(a)$, plus éloigné de 0 que a.

CORRIGÉ

Maximum. $f(0) = 3$ et, d'après 2., $f(x) \leq 3$ pour tout réel x. D'après la définition d'un maximum (F13), 3 est le maximum de f sur $\mathbb{R}$, atteint en 0.

Pas de minimum. Supposons par l'absurde qu'il existe un réel a tel que $f(a)$ soit le minimum de f sur $\mathbb{R}$. Posons $x = |a| + 1$. Alors $x > |a| \geq 0$, donc $x^2 > a^2$, puis :

$$x^2 + 1 > a^2 + 1 > 0.$$

Par stricte décroissance de l'inverse sur $]0, +\infty[$, puis en multipliant par $2 > 0$:

$$\frac{2}{x^2+1} < \frac{2}{a^2+1}.$$

D'après 1., cela s'écrit $f(x) < f(a)$, ce qui contredit le choix de a.

Conclusion. 3 est le maximum de f sur $\mathbb{R}$, mais f n'admet pas de minimum sur $\mathbb{R}$, bien qu'elle soit minorée par 1.

Exercice 2

Trois fonctions qui ne sont pas périodiques

Le but de l'exercice est de montrer que trois fonctions ne sont pas périodiques. On considère les fonctions g et h définies par $g(x) = \sqrt{4 - x}$ et $h(x) = 2x^2 - x$.

1.

Montrer que g n'est pas périodique.

INDICE

Outil : la définition d'une fonction périodique (F04) exige $x + T \in D_g$ pour tout $x \in D_g$. **Début :** détermine D_g, puis essaie $x = 4$.

CORRIGÉ

Ensemble de définition. Le réel $g(x)$ existe si et seulement si $4 - x \geq 0$: $D_g =]-\infty, 4]$.

Raisonnement par l'absurde. Supposons que g admette une période $T > 0$. Comme $4 \in D_g$, la définition d'une fonction périodique (F04) impose $4 + T \in D_g$, soit $4 + T \leq 4$, donc $T \leq 0$. Cela contredit $T > 0$.

Conclusion. La fonction g n'est pas périodique.

2.

Montrer que h n'est pas périodique.

INDICE

Outil : par l'absurde, avec une période $T > 0$. **Début :** écris la relation de période en $x = 0$. **Point délicat :** écris-la ensuite en $x = -T$.

CORRIGÉ

Supposons par l'absurde que h admette une période $T > 0$. Pour tout réel x, on a alors $h(x + T) = h(x)$.

En $x = 0$. $h(T) = h(0) = 0$, soit :

$$2T^2 - T = T(2T - 1) = 0.$$

Comme $T > 0$, on obtient $T = \dfrac{1}{2}$.

En $x = -T$. $h(-T + T) = h(-T)$, soit $h(0) = h\left(-\dfrac{1}{2}\right)$. Or $h(0) = 0$ et :

$$h\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

On obtient $0 = 1$: c'est une contradiction.

Conclusion. La fonction h n'est pas périodique.

3.

Montrer que la fonction partie entière E n'est pas périodique.

INDICE

Outil : par l'absurde. **Début :** en $x = 0$, la relation de période donne un encadrement de T (définition de la partie entière, F19). **Point délicat :** applique ensuite la relation en un réel a tel que $a + T = 1$.

CORRIGÉ

Supposons par l'absurde que E admette une période $T > 0$.

En $x = 0$. $E(T) = E(0) = 0$. D'après la définition de la partie entière (F19), $0 \leq T < 1$. Comme $T > 0$, on a $0 < T < 1$.

En un réel a tel que $a + T = 1$. Posons $a = 1 - T$. Alors $0 < a < 1$, donc $E(a) = 0$. Comme $a + T = 1$, la relation de période en a donne $E(1) = E(a) = 0$. Or $E(1) = 1$: c'est une contradiction.

Conclusion. La fonction partie entière E n'est pas périodique.

Exercice 3

Une parabole entre deux droites

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 1$. On note D la droite d'équation $y = -x + 4$, et D' la droite d'équation $y = x - 4$.

1.

Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de D, puis déterminer leurs points communs.

INDICE

Outil : le signe de la différence $f(x) - (-x + 4)$, qui est un trinôme (signe du trinôme, F07), puis la comparaison de deux fonctions (F08).

CORRIGÉ

Différence. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &f(x) - (-x + 4) \\ &= x^2 - 3x + 1 + x - 4 \\ &= x^2 - 2x - 3. \end{aligned}$$

Signe. Le discriminant vaut $4 + 12 = 16$; les racines sont $\dfrac{2 - 4}{2} = -1$ et $\dfrac{2 + 4}{2} = 3$. Comme le coefficient de x^2 vaut $1 > 0$, ce trinôme est positif ou nul en dehors de $]-1, 3[$, et strictement négatif sur $]-1, 3[$ (signe du trinôme, F07).

Position relative. D'après la comparaison de deux fonctions (F08), $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de D sur $]-\infty, -1]$ et sur $[3, +\infty[$, et au-dessous de D sur $[-1, 3]$.

Points communs. Leurs abscisses sont les racines -1 et 3. Comme $f(-1) = 5$ et $f(3) = 1$, ce sont les points $(-1, 5)$ et $(3, 1)$.

Conclusion. $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de D sur $]-\infty, -1]$ et sur $[3, +\infty[$, au-dessous sur $[-1, 3]$; leurs points communs sont $(-1, 5)$ et $(3, 1)$.

2.

Montrer que $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de D'.

INDICE

Rappel : un trinôme de discriminant négatif garde le signe de a sur tout $\mathbb{R}$ (signe du trinôme, F07).

CORRIGÉ

Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & f(x) - (x-4) \\ & = x^2 - 3x + 1 - x + 4 \\ & = x^2 - 4x + 5. \end{aligned}$$

Le discriminant vaut $16 - 20 = -4 < 0$, et le coefficient de x^2 vaut $1 > 0$. D'après le signe du trinôme (F07), $f(x) - (x-4) > 0$ pour tout réel x.

Conclusion. D'après la comparaison de deux fonctions (F08), $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de D', sans point commun avec elle.

3.

En déduire que, pour tout $x \in [-1, 3]$, $x - 4 < f(x) \leq -x + 4$, puis que f est bornée sur $[-1, 3]$.

INDICE

Outil : combine 1. et 2. **Point délicat :** les deux membres dépendent encore de x ; majore $-x + 4$ et minore $x - 4$ sur $[-1, 3]$.

CORRIGÉ

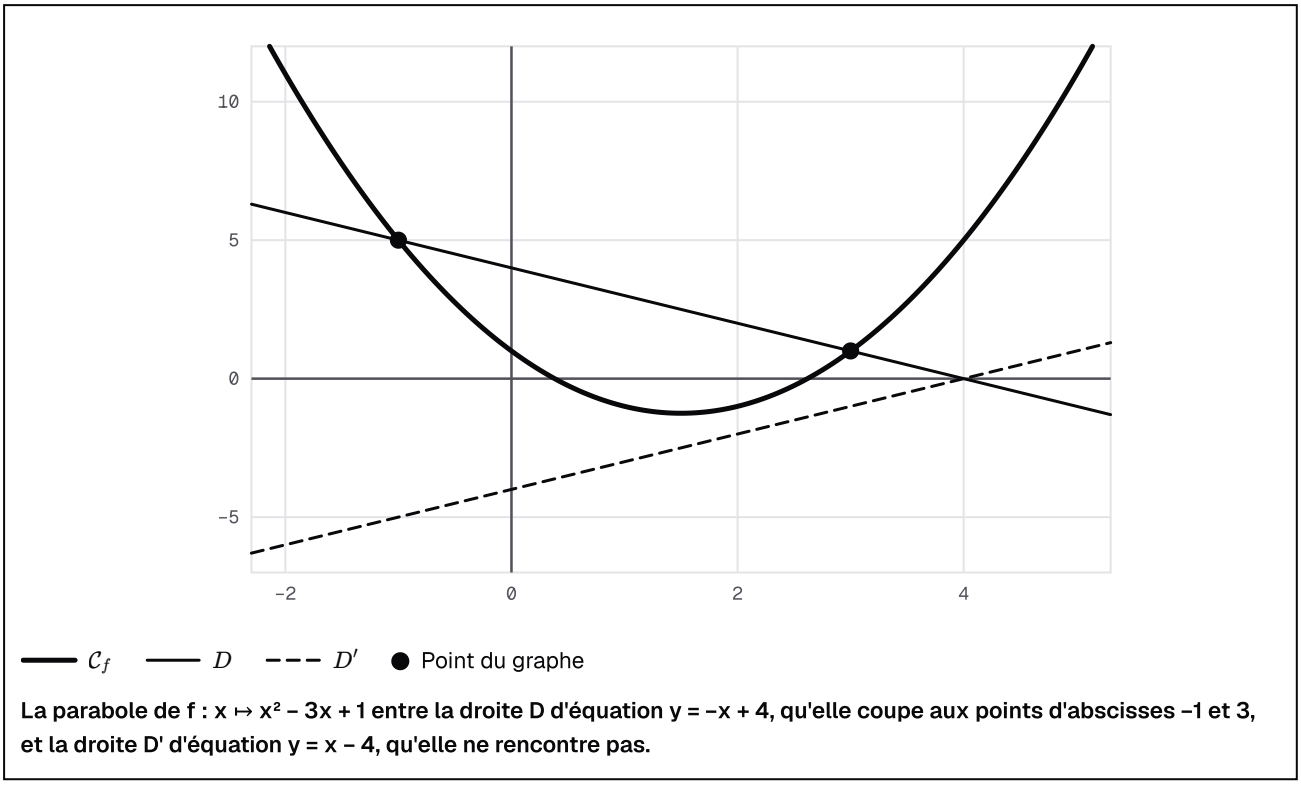
Double inégalité. Soit $x \in [-1, 3]$. D'après 1., $f(x) \leq -x + 4$; d'après 2., $f(x) > x - 4$. Donc :

$$x - 4 < f(x) \leq -x + 4.$$

Bornes indépendantes de x. Les deux membres dépendent encore de x. Comme $x \geq -1$, on a $-x + 4 \leq 5$ et $x - 4 \geq -5$. D'après la propriété « comparaison et opérations » (F09) :

$$-5 < f(x) \leq 5.$$

Conclusion. Pour tout $x \in [-1, 3]$, $x - 4 < f(x) \leq -x + 4$. Les réels -5 et 5 ne dépendent pas de x : f est bornée sur $[-1, 3]$ (définition d'une fonction bornée, F02).



La parabole de f : x ↦ x² − 3x + 1 entre la droite D d'équation y = −x + 4, qu'elle coupe aux points d'abscisses −1 et 3, et la droite D' d'équation y = x − 4, qu'elle ne rencontre pas.

Exercice 4

Taux de variation et parité

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 + 2x^2$.

1.

Montrer que f est paire.

INDICE

Outil : $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 ; calcule ensuite $f(-x)$.

CORRIGÉ

L'ensemble $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 : pour tout réel x, $-x \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^4 + 2(-x)^2 \\ &= x^4 + 2x^2 = f(x). \end{aligned}$$

Conclusion. La fonction f est paire.

2.

Montrer que, pour tous réels distincts x et y, $T(x, y) = (x + y)(x^2 + y^2 + 2)$. En déduire que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

INDICE

Outil : $x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$. **Point délicat :** pour deux réels distincts de $[0, +\infty[$, justifie que $x + y > 0$.

CORRIGÉ

Taux de variation. Soit x et y deux réels distincts. On factorise par $x^2 - y^2$, puis par $x - y$:

$$\begin{aligned} &f(x) - f(y) \\ &= (x^4 - y^4) + 2(x^2 - y^2) \\ &= (x^2 - y^2)(x^2 + y^2 + 2) \\ &= (x - y)(x + y) \\ &\quad \times (x^2 + y^2 + 2). \end{aligned}$$

En divisant par $x - y \neq 0$:

$$\begin{aligned} T(x, y) = (x + y) \\ \times (x^2 + y^2 + 2). \end{aligned}$$

Monotonie sur $[0, +\infty[$. Supposons de plus $x \geq 0$ et $y \geq 0$. Ces deux réels sont distincts, donc ils ne sont pas tous deux nuls : $x + y > 0$. Comme $x^2 + y^2 + 2 > 0$, on obtient $T(x, y) > 0$.

Conclusion. Pour tous réels distincts x et y, $T(x, y) = (x + y)(x^2 + y^2 + 2)$. D'après la propriété « taux de variation et monotonie » (F11), f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

3.

En déduire le sens de variation de f sur $]-\infty, 0]$, puis le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : monotonie et parité (F12). Pour le minimum, compare $f(x)$ à $f(0)$ (définition des extremums, F13).

CORRIGÉ

Sur $]-\infty, 0]$. La fonction f est paire et strictement croissante sur $I = [0, +\infty[$. D'après la propriété « monotonie et parité » (F12), elle est strictement décroissante sur $-I =]-\infty, 0]$.

Minimum. Pour tout réel x, $f(x) = x^4 + 2x^2 \geq 0 = f(0)$.

Conclusion. f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$, et son minimum sur $\mathbb{R}$ est 0, atteint en 0 (définition d'un minimum, F13).

Exercice 5

Maximum et minimum par la définition

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{6x}{x^2+9}$.

1.

Montrer que, pour tout réel x, $1 - f(x) = \dfrac{(x-3)^2}{x^2+9}$. En déduire que f admet un maximum sur $\mathbb{R}$, à préciser.

INDICE

Outil : définition d'un maximum (F13) : compare $f(x)$ à $f(3)$.

CORRIGÉ

Égalité. Soit $x \in \mathbb{R}$. On réduit au même dénominateur x^2+9, qui est strictement positif :

$$\begin{aligned} 1 - f(x) &= \frac{x^2+9-6x}{x^2+9} \\ &= \frac{(x-3)^2}{x^2+9}. \end{aligned}$$

Majoration. Ce quotient est positif ou nul, car $(x-3)^2 \geq 0$ et $x^2+9 > 0$. Donc $f(x) \leq 1$ pour tout réel x.

Valeur atteinte. $f(3) = \dfrac{18}{18} = 1$.

Conclusion. Pour tout réel x, $1 - f(x) = \dfrac{(x-3)^2}{x^2+9}$, et f admet sur $\mathbb{R}$ un maximum égal à 1, atteint en 3 (définition d'un maximum, F13).

2.

Montrer que f est impaire. En déduire que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$, à préciser.

INDICE

Outil : applique l'inégalité obtenue en 1. au réel $-x$. **Point délicat :** un minimum doit être atteint.

CORRIGÉ

Parité. Pour tout réel x, $-x \in \mathbb{R}$ et :

$$f(-x) = \frac{-6x}{x^2+9} = -f(x).$$

Donc f est impaire.

Minoration. Soit $x \in \mathbb{R}$. La question 1., appliquée au réel $-x$, donne $f(-x) \leq 1$, soit $-f(x) \leq 1$, donc $f(x) \geq -1$.

Valeur atteinte. $f(-3) = -f(3) = -1$.

Conclusion. f est impaire, et elle admet sur $\mathbb{R}$ un minimum égal à -1, atteint en -3 (définition d'un minimum, F13).

3.

Montrer que, pour tout réel x, $|f(x)| \leq 1$. Que peut-on en conclure ?

INDICE

Outil : rassemble les deux inégalités, puis la propriété « fonction bornée et valeur absolue » (F03).

CORRIGÉ

Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après 1. et 2. :

$$-1 \leq f(x) \leq 1,$$

c'est-à-dire $|f(x)| \leq 1$.

Conclusion. Pour tout réel x, $|f(x)| \leq 1$. Le réel 1 ne dépend pas de x : d'après la propriété « fonction bornée et valeur absolue » (F03), f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6

Variations de la racine carrée d'un trinôme

On note u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2 - 2x + 5$, et h la fonction définie par $h(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$.

1.

Montrer que, pour tout réel x, $u(x) = (x-1)^2 + 4$. En déduire D_h.

INDICE

Outil : d'après la définition de la composée (F15), $x \in D_h$ si et seulement si $u(x) \geq 0$.

CORRIGÉ

Forme canonique. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&(x-1)^2 + 4\\ &= x^2 - 2x + 1 + 4\\ &= u(x).\end{aligned}$$

Ensemble de définition. Pour tout réel x, $(x-1)^2 \geq 0$, donc $u(x) \geq 4 > 0$: la racine carrée de $u(x)$ existe toujours.

Conclusion. Pour tout réel x, $u(x) = (x-1)^2 + 4$, et $D_h = \mathbb{R}$.

2.

Étudier le sens de variation de u sur $]-\infty, 1]$ et sur $[1, +\infty[$.

INDICE

Outil : le taux de variation de u (taux de variation et monotonie, F11). Factorise $u(x) - u(y)$ par $x - y$.

CORRIGÉ

Taux de variation. Soit x et y deux réels distincts :

$$\begin{aligned}&u(x) - u(y)\\ &= (x^2 - y^2) - 2(x - y)\\ &= (x - y)(x + y - 2).\end{aligned}$$

Donc $T(x, y) = x + y - 2$.

Sur $[1, +\infty[$. Si $x \geq 1$ et $y \geq 1$, ces deux réels distincts ne valent pas tous deux 1 : $x + y > 2$, donc $T(x, y) > 0$.

Sur $]-\infty, 1]$. Si $x \leq 1$ et $y \leq 1$, de même $x + y < 2$, donc $T(x, y) < 0$.

Conclusion. D'après la propriété « taux de variation et monotonie » (F11), u est strictement décroissante sur $]-\infty, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

3.

En déduire le sens de variation de h sur chacun de ces intervalles, puis le minimum de h sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : h est la composée de u suivie de la racine carrée. Vérifie que $u(\mathbb{R}) \subset [0, +\infty[$, puis applique la monotonie d'une composée (F16).

CORRIGÉ

Hypothèses. La racine carrée est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. D'après 1., $u(x) \geq 4$ pour tout réel x, donc $u(\mathbb{R}) \subset [0, +\infty[$.

Sens de variation. D'après la monotonie d'une composée (F16) :

- sur $]-\infty, 1]$, u est strictement décroissante ; les sens sont contraires, donc h est strictement décroissante ;
- sur $[1, +\infty[$, u est strictement croissante ; même sens, donc h est strictement croissante.

Minimum. Pour tout réel x, $u(x) \geq 4$, donc, par croissance de la racine carrée, $h(x) \geq \sqrt{4} = 2$. De plus, $h(1) = \sqrt{u(1)} = \sqrt{4} = 2$.

Conclusion. h est strictement décroissante sur $]-\infty, 1]$, strictement croissante sur $[1, +\infty[$, et son minimum sur $\mathbb{R}$ est 2, atteint en 1.

Exercice 7

Une racine translatée et une fonction cube

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x+5}$, et k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = 3x^3$.

1.

Donner D_f, le sens de variation de f et son minimum. Comment obtient-on $\mathcal{C}_f$ à partir de la courbe de la fonction racine carrée ?

INDICE

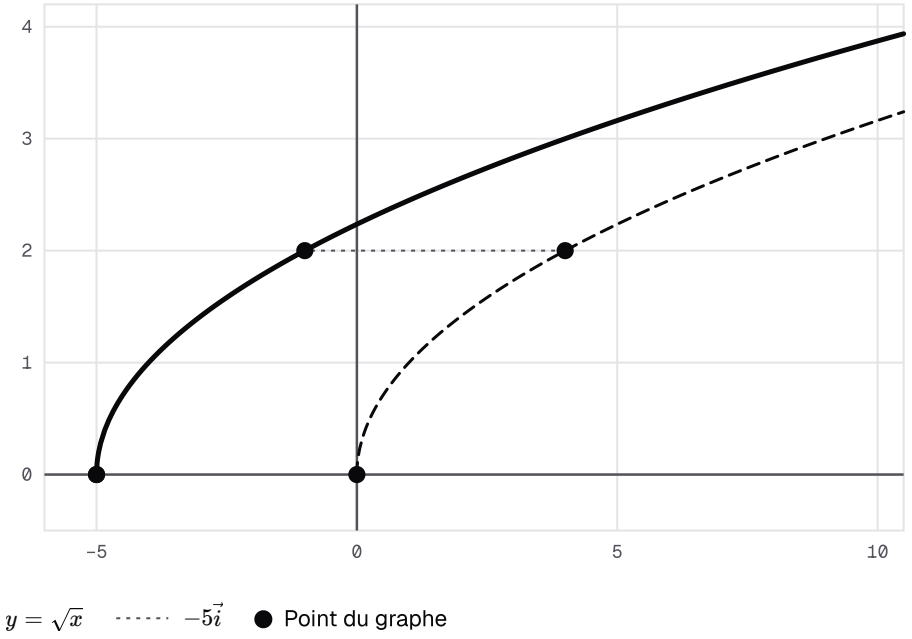
Outil : la propriété de la fonction $x \mapsto \sqrt{x+a}$ (F17), avec $a = 5$.

CORRIGÉ

D'après la propriété de la fonction $x \mapsto \sqrt{x+a}$ (F17), avec $a = 5$:

- $D_f = [-5, +\infty[$;
- f est strictement croissante sur $[-5, +\infty[$;
- son minimum sur D_f est $f(-5) = 0$;
- $\mathcal{C}_f$ est l'image, par la translation de vecteur $-5\vec{i}$, de la courbe représentative de $x \mapsto \sqrt{x}$.

Conclusion. $D_f = [-5, +\infty[$; f y est strictement croissante, de minimum 0, et l'on obtient $\mathcal{C}_f$ en translatant de $-5\vec{i}$ la courbe de $x \mapsto \sqrt{x}$.



Courbe de f : x ↦ √(x + 5), image de la courbe de la racine carrée (en pointillés) par la translation de vecteur −5 i ; elle part du point d'abscisse −5.

2.

Résoudre dans D_f l'inéquation $f(x) < 3$.

INDICE

Outil : cherche le réel dont l'image vaut 3. **Point délicat :** utilise la stricte croissance dans les deux sens.

CORRIGÉ

On a $f(4) = \sqrt{9} = 3$. Soit $x \in D_f$.

- Si $x < 4$, alors $f(x) < f(4) = 3$, car f est strictement croissante.
- Si $x \geq 4$, alors $f(x) \geq f(4) = 3$, car f est croissante.

Donc, pour $x \in D_f$, $f(x) < 3$ équivaut à $x < 4$.

Conclusion. L'ensemble des solutions de $f(x) < 3$ dans D_f est $[-5, 4[$.

3.

Montrer que k est impaire et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, puis résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $k(x) \leq 24$.

INDICE

Outil : la propriété de la fonction $x \mapsto ax^3$ (F18), avec $a = 3$, puis la même démarche qu'en 2.

CORRIGÉ

Parité et monotonie. D'après la propriété de la fonction $x \mapsto ax^3$ (F18), avec $a = 3 > 0$, la fonction k est impaire et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Inéquation. On a $k(2) = 3 \times 8 = 24$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x \leq 2$, alors $k(x) \leq k(2) = 24$, car k est croissante.
- Si $x > 2$, alors $k(x) > k(2) = 24$, car k est strictement croissante.

Conclusion. k est impaire et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et l'ensemble des solutions de $k(x) \leq 24$ est $]-\infty, 2]$.

Exercice 8

Équations avec une partie entière

Dans tout l'exercice, E désigne la fonction partie entière.

1.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $E(x) = 2x - 1$.

INDICE

Outil : pose $n = E(x)$, puis exprime x à l'aide de n. **Point décisif :** impose ensuite $n \leq x < n + 1$, sans oublier que n est un entier.

CORRIGÉ

Analyse. Soit x une solution, et $n = E(x)$, qui est un entier relatif. Alors $2x - 1 = n$, donc $x = \dfrac{n+1}{2}$. La définition de la partie entière (F19) donne $n \leq x < n + 1$:

$$n \leq \frac{n+1}{2} < n + 1.$$

- L'inégalité de gauche donne $2n \leq n + 1$, soit $n \leq 1$.
- Celle de droite donne $n + 1 < 2n + 2$, soit $n > -1$.

L'entier n vaut donc 0 ou 1, et $x = \dfrac{1}{2}$ ou $x = 1$.

Synthèse. On vérifie les deux candidats :

- $E\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$ et $2 \times \dfrac{1}{2} - 1 = 0$;
- $E(1) = 1$ et $2 \times 1 - 1 = 1$.

Conclusion. L'ensemble des solutions est $\left\{\dfrac{1}{2}, 1\right\}$.

2.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $E(x) = 3x - 4$.

INDICE

Outil : comme en 1., pose $n = E(x)$, puis exprime x à l'aide de n. **Point décisif :** impose $n \leq x < n + 1$.

CORRIGÉ

Analyse. Soit x une solution, et $n = E(x)$, qui est un entier relatif. Alors $3x - 4 = n$, donc $x = \dfrac{n+4}{3}$. La définition de la partie entière (F19) donne $n \leq x < n + 1$:

$$n \leq \frac{n+4}{3} < n + 1.$$

- L'inégalité de gauche donne $3n \leq n + 4$, soit $n \leq 2$.
- Celle de droite donne $n + 4 < 3n + 3$, soit $n > \dfrac{1}{2}$.

L'entier n vaut donc 1 ou 2, et $x = \dfrac{5}{3}$ ou $x = 2$.

Synthèse. On vérifie les deux candidats :

- $E\left(\dfrac{5}{3}\right) = 1$ et $3 \times \dfrac{5}{3} - 4 = 1$;
- $E(2) = 2$ et $3 \times 2 - 4 = 2$.

Conclusion. L'ensemble des solutions est $\left\{\dfrac{5}{3}, 2\right\}$.

3.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $E(x) < -\dfrac{3}{2}$.

INDICE

Outil : $E(x)$ est un entier : remplace l'inégalité par une inégalité entre entiers, puis utilise les propriétés de la partie entière (F20).

CORRIGÉ

Inégalité entre entiers. Soit x un réel. Le réel $E(x)$ est un entier, et -2 est le plus grand entier strictement inférieur à $-\dfrac{3}{2}$. Donc $E(x) < -\dfrac{3}{2}$ équivaut à $E(x) \leq -2$.

Si $E(x) \leq -2$. D'après les propriétés de la partie entière (F20), $x < E(x) + 1$, donc $x < -1$.

Si $x < -1$. D'après les mêmes propriétés de la partie entière (F20), $E(x) \leq x < -1$. L'entier $E(x)$ est strictement inférieur à -1, donc $E(x) \leq -2$.

Conclusion. L'ensemble des solutions est $]-\infty, -1[$.