BURHAN

Généralités sur les fonctions numériques : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/generalites-sur-les-fonctions/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Généralités sur les fonctions numériques	Application	10

Exercice 1

Un axe et un centre de symétrie

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = x^2 - 8x + 10$ et $g(x) = \dfrac{x+5}{x-2}$.

1.

Montrer que la droite d'équation $x = 4$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : caractérisation d'un axe de symétrie (F01), avec $a = 4$. Vérifie que $8 - x \in D_f$, puis calcule $f(8-x)$.

2.

Déterminer D_g, puis montrer que le point $\Omega(2, 1)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_g$.

INDICE

Outil : caractérisation d'un centre de symétrie (F01), avec $a = 2$ et $b = 1$. Commence par vérifier que $4 - x \in D_g$ pour tout $x \in D_g$.

3.

Calculer $f(1)$ et $g(1)$. En déduire $f(7)$ et $g(3)$ à l'aide des questions précédentes.

INDICE

Outil : remarque que $7 = 8 - 1$ et que $3 = 4 - 1$.

Exercice 2

Majorer et minorer un quotient

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{x^2+2}$.

1.

Montrer que, pour tout réel x, $0 < f(x) \leq \dfrac{3}{2}$.

INDICE

Outil : pars de $x^2 \geq 0$, puis passe aux inverses de deux réels strictement positifs.

2.

En déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}$. Donner un réel $k \geq 0$ tel que $|f(x)| \leq k$ pour tout réel x.

INDICE

Outil : la définition d'une fonction bornée (F02), puis la caractérisation par la valeur absolue (F03). Les bornes trouvées en 1. ne dépendent pas de x.

3.

Le réel $\dfrac{3}{2}$ est-il le maximum de f sur $\mathbb{R}$? Le réel 0 est-il son minimum ?

INDICE

Outil : un extremum est une valeur atteinte (définition des extremums, F13). Cherche un réel dont l'image vaut $\dfrac{3}{2}$, puis un réel dont l'image vaut 0.

Exercice 3

Une fonction de période 4 donnée par un motif

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 4, telle que, pour tout $x \in [-2, 2[$, $f(x) = 4 - x^2$.

1.

Calculer $f(5)$, $f(-7)$ et $f(9{,}5)$.

INDICE

Outil : multiples d'une période (F05) : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le réel $4n$ est une période. Ramène chaque réel dans $[-2, 2[$ en ajoutant ou en retranchant un multiple de 4.

2.

Montrer que, pour tout $x \in [2, 6[$, $f(x) = 4 - (x - 4)^2$.

INDICE

Outil : si $x \in [2, 6[$, le réel $x - 4$ appartient à $[-2, 2[$. Applique la relation de période au réel $x - 4$.

3.

Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[-2, 6[$.

INDICE

Outil : une disjonction des cas, selon que x appartient à $[-2, 2[$ ou à $[2, 6[$. Dans chaque cas, ne garde que les solutions de l'intervalle étudié.

Exercice 4

Résoudre des équations du second degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1.

$3x^2 - 7x + 2 = 0$, puis factoriser le trinôme $3x^2 - 7x + 2$.

INDICE

Outil : racines d'un trinôme (F06) : calcule $\Delta = b^2 - 4ac$ avec $a = 3$, $b = -7$ et $c = 2$.

2.

$x^2 + x + 3 = 0$.

INDICE

Outil : le signe du discriminant décide du nombre de solutions.

3.

$4x^2 - 12x + 9 = 0$.

INDICE

Outil : si $\Delta = 0$, la solution unique est $-\dfrac{b}{2a}$. Reconnais aussi une identité remarquable.

4.

Vérifier que 1 est solution de $5x^2 - 2x - 3 = 0$, puis trouver l'autre solution sans calculer le discriminant.

INDICE

Outil : le produit des racines vaut $\dfrac{c}{a}$ (racines d'un trinôme, F06). Justifie d'abord qu'il y a bien deux racines distinctes.

Exercice 5

Résoudre des inéquations du second degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes.

1.

$-x^2 + 2x + 8 > 0.$

INDICE

Outil : signe du trinôme (F07). Cherche les racines, puis repère le signe de a.

2.

$2x^2 + x + 1 \geq 0.$

INDICE

Rappel : quand le discriminant est négatif, le trinôme garde le signe de a sur tout $\mathbb{R}$ (signe du trinôme, F07).

3.

$x^2 - 6x + 9 \leq 0.$

INDICE

Outil : une racine double ; le trinôme s'écrit comme un carré.

4.

$x^2 < 3x + 10.$

INDICE

Outil : ramène tout dans un membre avant d'appliquer le signe du trinôme (F07).

Exercice 6

Une courbe et une droite : qui est au-dessus ?

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x$, et D la droite d'équation $y = 3x$.

1.

Montrer que, pour tout réel x, $f(x) - 3x = x(x-2)(x+2)$.

INDICE

Outil : factorise d'abord par x, puis reconnais une identité remarquable.

2.

Étudier le signe de $f(x) - 3x$ selon les valeurs de x. En déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de D.

INDICE

Outil : le signe de chacun des trois facteurs, intervalle par intervalle, puis l'interprétation graphique de la comparaison de deux fonctions (F08).

3.

Déterminer les coordonnées des points communs à $\mathcal{C}_f$ et à D.

INDICE

Outil : les abscisses des points communs sont les solutions de $f(x) - 3x = 0$ (comparaison de deux fonctions, F08).

Exercice 7

Monotonie d'une fonction homographique par le taux de variation

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x+4}{x-1}$.

1.

Déterminer D_f. Montrer que, pour tous réels distincts x et y de D_f, $T(x,y) = -\dfrac{5}{(x-1)(y-1)}$.

INDICE

Outil : réduis $f(x) - f(y)$ au même dénominateur ; le numérateur se factorise par $x - y$.

2.

En déduire le sens de variation de f sur $]1, +\infty[$, puis sur $]-\infty, 1[$.

INDICE

Outil : si x et y sont du même côté de 1, les facteurs $x-1$ et $y-1$ ont le même signe. Conclus par la propriété « taux de variation et monotonie » (F11).

3.

Calculer $f(0)$ et $f(2)$. La fonction f est-elle décroissante sur D_f ?

INDICE

Outil : compare l'ordre de 0 et 2 à l'ordre de leurs images (définition de la monotonie, F10).

Exercice 8

Lire des extremums sur des variations

Une fonction f est définie sur $[-3,5]$. Elle est croissante sur $[-3,1]$, décroissante sur $[1,4]$ et croissante sur $[4,5]$. De plus, $f(-3)=-2$, $f(1)=3$, $f(4)=-1$ et $f(5)=2$.

1.

Montrer que 3 est le maximum de f sur $[-3,4]$, puis sur $[-3,5]$.

INDICE

Outil : extremum et tableau de variations (F14) sur $[-3,4]$. Sur $[4,5]$, compare $f(x)$ à $f(5)$.

2.

Montrer que -2 est le minimum de f sur $[-3,5]$.

INDICE

Outil : découpe $[-3,5]$ en trois intervalles de monotonie, puis minore f sur chacun d'eux.

3.

Montrer que f admet un minimum local en 4, et donner sa valeur. Est-ce le minimum de f sur $[-3,5]$?

INDICE

Outil : extremum et tableau de variations (F14) sur un intervalle $[\alpha,\beta]$ qui contient 4 et sur lequel le sens de variation change en 4.

Exercice 9

Deux composées et leurs ensembles de définition

Soit f et g les fonctions définies par $f(x)=x^2-5$ et $g(x)=\dfrac{1}{x-4}$.

1.

Déterminer $D_{g\circ f}$ et exprimer $(g\circ f)(x)$ pour $x\in D_{g\circ f}$.

INDICE

Outil : définition de la composée (F15) : $x\in D_{g\circ f}$ si et seulement si $x\in D_f$ et $f(x)\in D_g$.

2.

Déterminer $D_{f\circ g}$ et exprimer $(f\circ g)(x)$ pour $x\in D_{f\circ g}$.

INDICE

Outil : la même méthode, avec les rôles de f et g échangés.

3.

Calculer $(g\circ f)(0)$ et $(f\circ g)(0)$. Que peut-on en conclure ?

INDICE

Outil : remplace x par 0 dans les expressions trouvées en 1. et en 2.

Exercice 10

Calculs de parties entières

Dans tout l'exercice, E désigne la fonction partie entière.

1.

Calculer $E(4{,}9)$, $E(-4{,}9)$, $E(-6)$, $E(\sqrt{10})$ et $E\left(-\dfrac{7}{3}\right)$.

INDICE

Outil : encadre chaque réel entre deux entiers consécutifs, $n \leq x < n+1$ (définition de la partie entière, F19). Prends garde aux réels négatifs.

2.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $E(x) = -3$ et $E(x) = \dfrac{5}{2}$.

INDICE

Outil : pour $n \in \mathbb{Z}$, $E(x) = n$ équivaut à $n \leq x < n+1$. Une partie entière est toujours un entier.

3.

Montrer que, pour tout réel x, $E(x) \geq 4$ équivaut à $x \geq 4$.

INDICE

Outil : propriétés de la partie entière (F20) : $E(x) \leq x$ pour tout réel x, et la fonction E est croissante.