BURHAN

Généralités sur les fonctions numériques : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/generalites-sur-les-fonctions/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Généralités sur les fonctions numériques	Application	10

Exercice 1

Un axe et un centre de symétrie

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = x^2 - 8x + 10$ et $g(x) = \dfrac{x+5}{x-2}$.

1.

Montrer que la droite d'équation $x = 4$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : caractérisation d'un axe de symétrie (F01), avec $a = 4$. Vérifie que $8 - x \in D_f$, puis calcule $f(8-x)$.

CORRIGÉ

D'après la caractérisation d'un axe de symétrie (F01), avec $a = 4$, il s'agit de montrer que, pour tout réel x, $8 - x \in D_f$ et $f(8-x) = f(x)$.

Ensemble de définition. $D_f = \mathbb{R}$: pour tout réel x, $8 - x \in D_f$.

Calcul. Soit $x \in \mathbb{R}$. On développe :

$$\begin{aligned} & f(8-x) \\ &= (8-x)^2 - 8(8-x) + 10 \\ &= 64 - 16x + x^2 \\ &\quad - 64 + 8x + 10 \\ &= x^2 - 8x + 10 = f(x). \end{aligned}$$

Conclusion. La droite d'équation $x = 4$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

2.

Déterminer D_g, puis montrer que le point $\Omega(2,1)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_g$.

INDICE

Outil : caractérisation d'un centre de symétrie (F01), avec $a=2$ et $b=1$. Commence par vérifier que $4-x \in D_g$ pour tout $x \in D_g$.

CORRIGÉ

Ensemble de définition. Le quotient $g(x)$ existe si et seulement si $x \neq 2$. Donc $D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Symétrie de D_g. Soit $x \in D_g$. Si l'on avait $4-x=2$, on aurait $x=2$, ce qui est exclu. Donc $4-x \in D_g$.

Calcul. Soit $x \in D_g$:

$$\begin{aligned} g(4-x) &= \frac{4-x+5}{4-x-2} \\ &= \frac{9-x}{2-x} = \frac{x-9}{x-2}. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} &g(4-x)+g(x) \\ &= \frac{x-9+x+5}{x-2} \\ &= \frac{2x-4}{x-2} = 2. \end{aligned}$$

Conclusion. $D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Comme $2 = 2 \times 1$, la caractérisation d'un centre de symétrie (F01, avec $a=2$ et $b=1$) montre que $\Omega(2,1)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_g$.

3.

Calculer $f(1)$ et $g(1)$. En déduire $f(7)$ et $g(3)$ à l'aide des questions précédentes.

INDICE

Outil : remarque que $7 = 8-1$ et que $3 = 4-1$.

CORRIGÉ

Calcul direct. $f(1) = 1-8+10 = 3$ et $g(1) = \dfrac{6}{-1} = -6$.

Par la symétrie de $\mathcal{C}_f$. D'après 1., $f(8-x) = f(x)$ pour tout réel x. Avec $x=1$:

$$f(7) = f(8-1) = f(1) = 3.$$

Par la symétrie de $\mathcal{C}_g$. D'après 2., $g(4-x) = 2 - g(x)$ pour tout $x \in D_g$. Avec $x=1$, qui appartient à D_g :

$$\begin{aligned} g(3) &= g(4-1) \\ &= 2 - g(1) = 8. \end{aligned}$$

Contrôle. $f(7) = 49-56+10 = 3$ et $g(3) = \dfrac{8}{1} = 8$.

Conclusion. $f(1)=3$ et $g(1)=-6$; on en déduit $f(7)=3$ et $g(3)=8$.

Exercice 2

Majorer et minorer un quotient

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{x^2+2}$.

1.

Montrer que, pour tout réel x, $0 < f(x) \leq \dfrac{3}{2}$.

INDICE

Outil : pars de $x^2 \geq 0$, puis passe aux inverses de deux réels strictement positifs.

CORRIGÉ

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Majoration. On a $x^2 \geq 0$, donc $x^2 + 2 \geq 2 > 0$. La fonction inverse est décroissante sur $]0, +\infty[$, donc :

$$\frac{1}{x^2+2} \leq \frac{1}{2}.$$

En multipliant par $3 > 0$, on obtient $f(x) \leq \dfrac{3}{2}$.

Minoration. $f(x)$ est le quotient de deux réels strictement positifs, donc $f(x) > 0$.

Conclusion. Pour tout réel x :

$$0 < f(x) \leq \frac{3}{2}.$$

2.

En déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}$. Donner un réel $k \geq 0$ tel que $|f(x)| \leq k$ pour tout réel x.

INDICE

Outil : la définition d'une fonction bornée (F02), puis la caractérisation par la valeur absolue (F03). Les bornes trouvées en 1. ne dépendent pas de x.

CORRIGÉ

Bornée. D'après 1., le réel $\dfrac{3}{2}$ majore f sur $\mathbb{R}$ et le réel 0 la minore. Ces deux réels ne dépendent pas de x. D'après la définition d'une fonction bornée (F02), f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Un réel k. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $f(x) > 0$:

$$|f(x)| = f(x) \leq \frac{3}{2}.$$

Conclusion. f est bornée sur $\mathbb{R}$, et le réel $k = \dfrac{3}{2}$ vérifie $|f(x)| \leq k$ pour tout réel x, comme l'annonce la propriété « fonction bornée et valeur absolue » (F03).

3.

Le réel $\frac{3}{2}$ est-il le maximum de f sur $\mathbb{R}$? Le réel 0 est-il son minimum ?

INDICE

Outil : un extremum est une valeur atteinte (définition des extremums, F13). Cherche un réel dont l'image vaut $\frac{3}{2}$, puis un réel dont l'image vaut 0.

CORRIGÉ

Le réel $\frac{3}{2}$. On a $f(0) = \frac{3}{2}$ et, d'après 1., $f(x) \leq f(0)$ pour tout réel x. D'après la définition d'un maximum (F13), $\frac{3}{2}$ est le maximum de f sur $\mathbb{R}$, atteint en 0.

Le réel 0. Pour tout réel x, $f(x) > 0$: aucun réel n'a pour image 0. Le réel 0 minore f, mais il n'est pas atteint.

Conclusion. $\frac{3}{2}$ est le maximum de f sur $\mathbb{R}$; 0 est un minorant de f, mais ce n'est pas son minimum.

Exercice 3

Une fonction de période 4 donnée par un motif

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 4, telle que, pour tout $x \in [-2,2[$, $f(x) = 4 - x^2$.

1.

Calculer $f(5)$, $f(-7)$ et $f(9{,}5)$.

INDICE

Outil : multiples d'une période (F05) : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le réel $4n$ est une période. Ramène chaque réel dans $[-2,2[$ en ajoutant ou en retranchant un multiple de 4.

CORRIGÉ

On ramène chaque réel dans $[-2,2[$, où l'expression de f est connue.

Calcul de $f(5)$. On a $5 = 1 + 4$ et $1 \in [-2,2[$. Comme 4 est une période de f :

$$f(5) = f(1) = 4 - 1 = 3.$$

Calcul de $f(-7)$. D'après la propriété des multiples d'une période (F05), $8 = 2 \times 4$ est une période de f. Comme $-7 + 8 = 1$:

$$\begin{aligned} f(-7) &= f(-7+8) \\ &= f(1) = 3. \end{aligned}$$

Calcul de $f(9{,}5)$. On a $9{,}5 = 1{,}5 + 8$ et $1{,}5 \in [-2,2[$:

$$\begin{aligned} f(9{,}5) &= f(1{,}5) \\ &= 4 - 2{,}25 = 1{,}75. \end{aligned}$$

Conclusion. $f(5) = 3$, $f(-7) = 3$ et $f(9{,}5) = 1{,}75$.

2.

Montrer que, pour tout $x \in [2,6[$, $f(x) = 4 - (x-4)^2$.

INDICE

Outil : si $x \in [2,6[$, le réel $x - 4$ appartient à $[-2,2[$. Applique la relation de période au réel $x - 4$.

CORRIGÉ

Soit $x \in [2,6[$. Alors $-2 \leq x - 4 < 2$, c'est-à-dire $x - 4 \in [-2,2[$. Donc :

$$f(x-4) = 4 - (x-4)^2.$$

Comme 4 est une période de f, $f(x) = f\big((x-4)+4\big) = f(x-4)$.

Conclusion. Pour tout $x \in [2,6[$:

$$f(x) = 4 - (x-4)^2.$$

3.

Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[-2, 6[$.

INDICE

Outil : une disjonction des cas, selon que x appartient à $[-2, 2[$ ou à $[2, 6[$. Dans chaque cas, ne garde que les solutions de l'intervalle étudié.

CORRIGÉ

L'intervalle $[-2, 6[$ est la réunion de $[-2, 2[$ et de $[2, 6[$. Raisonnons par disjonction des cas.

Si $x \in [-2, 2[$**.** L'équation s'écrit $4 - x^2 = 0$, soit $x = -2$ ou $x = 2$. Seul -2 appartient à $[-2, 2[$.

Si $x \in [2, 6[$**.** D'après 2., l'équation s'écrit $(x - 4)^2 = 4$, soit $x - 4 = -2$ ou $x - 4 = 2$. Donc $x = 2$ ou $x = 6$, et seul 2 appartient à $[2, 6[$.

Conclusion. Sur $[-2, 6[$, l'ensemble des solutions de $f(x) = 0$ est :

$$S = \{-2, 2\}.$$

Exercice 4

Résoudre des équations du second degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1.

$3x^2 - 7x + 2 = 0$, puis factoriser le trinôme $3x^2 - 7x + 2$.

INDICE

Outil : racines d'un trinôme (F06) : calcule $\Delta = b^2 - 4ac$ avec $a = 3$, $b = -7$ et $c = 2$.

CORRIGÉ

Discriminant. Avec $a = 3$, $b = -7$ et $c = 2$:

$$\begin{aligned}\Delta &= (-7)^2 - 4 \times 3 \times 2 \\ &= 49 - 24 = 25.\end{aligned}$$

Solutions. On a $\Delta > 0$ et $\sqrt{\Delta} = 5$. D'après les racines d'un trinôme (F06), l'équation a deux solutions :

$$x_1 = \frac{7 - 5}{6} = \frac{1}{3},$$
$$x_2 = \frac{7 + 5}{6} = 2.$$

Factorisation. La même propriété (F06, racines d'un trinôme) donne $3x^2 - 7x + 2 = 3(x - x_1)(x - x_2)$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&3x^2 - 7x + 2 \\ &= 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 2) \\ &= (3x - 1)(x - 2).\end{aligned}$$

Conclusion. $S = \left\{\frac{1}{3}, 2\right\}$ et, pour tout réel x, $3x^2 - 7x + 2 = (3x - 1)(x - 2)$.

2.

$x^2 + x + 3 = 0$.

INDICE

Outil : le signe du discriminant décide du nombre de solutions.

CORRIGÉ

Avec $a = 1$, $b = 1$ et $c = 3$:

$$\Delta = 1 - 12 = -11.$$

Comme $\Delta < 0$, l'équation n'a aucune solution réelle (racines d'un trinôme, F06).

Conclusion. $S = \varnothing$.

3.

$4x^2 - 12x + 9 = 0$.

INDICE

Outil : si $\Delta = 0$, la solution unique est $-\dfrac{b}{2a}$. Reconnais aussi une identité remarquable.

CORRIGÉ

Discriminant. Avec $a = 4$, $b = -12$ et $c = 9$:

$$\Delta = 144 - 144 = 0.$$

Solution. D'après les racines d'un trinôme (F06), l'équation a une seule solution :

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}.$$

Contrôle. On reconnaît une identité remarquable : pour tout réel x, $4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$, qui ne s'annule qu'en $\dfrac{3}{2}$.

Conclusion. $S = \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.

4.

Vérifier que 1 est solution de $5x^2 - 2x - 3 = 0$, puis trouver l'autre solution sans calculer le discriminant.

INDICE

Outil : le produit des racines vaut $\dfrac{c}{a}$ (racines d'un trinôme, F06). Justifie d'abord qu'il y a bien deux racines distinctes.

CORRIGÉ

Le réel 1 est solution. $5 \times 1^2 - 2 \times 1 - 3 = 0$.

Deux racines distinctes. Rappelons le résultat sur les racines d'un trinôme : si l'on avait $\Delta < 0$, l'équation n'aurait aucune solution (F06). Or 1 est solution, donc $\Delta \geq 0$. Si l'on avait $\Delta = 0$, la seule solution serait $-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$, différente de 1. Donc $\Delta > 0$.

Produit des racines. Notons $x_1 = 1$ et x_2 l'autre solution. D'après les racines d'un trinôme (F06) :

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{3}{5}.$$

Comme $x_1 = 1$, on obtient $x_2 = -\dfrac{3}{5}$.

Contrôle.

$$\begin{aligned} &5 \times \frac{9}{25} + \frac{6}{5} - 3 \\ &= \frac{9 + 6 - 15}{5} = 0. \end{aligned}$$

Conclusion. L'autre solution de $5x^2 - 2x - 3 = 0$ est $-\dfrac{3}{5}$.

Exercice 5

Résoudre des inéquations du second degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes.

1.

$-x^2 + 2x + 8 > 0$.

INDICE

Outil : signe du trinôme (F07). Cherche les racines, puis repère le signe de a.

CORRIGÉ

Racines. Avec $a = -1$, $b = 2$ et $c = 8$: $\Delta = 4 + 32 = 36$, et $\sqrt{\Delta} = 6$. Les racines sont :

$$x_1 = \frac{-2 + 6}{-2} = -2,$$

$$x_2 = \frac{-2 - 6}{-2} = 4.$$

Signe. Ici $a = -1 < 0$. D'après le signe du trinôme (F07), le trinôme est strictement positif entre ses racines, où il est du signe contraire de a ; il est négatif ou nul ailleurs.

Conclusion. L'ensemble des solutions est :

$$S =]-2, 4[\,.$$

2.

$2x^2 + x + 1 \geq 0$.

INDICE

Rappel : quand le discriminant est négatif, le trinôme garde le signe de a sur tout $\mathbb{R}$ (signe du trinôme, F07).

CORRIGÉ

Avec $a = 2$, $b = 1$ et $c = 1$:

$$\Delta = 1 - 8 = -7.$$

Comme $\Delta < 0$ et $a = 2 > 0$, le trinôme est strictement positif pour tout réel x (signe du trinôme, F07).

Conclusion. $S = \mathbb{R}$.

3.

$x^2 - 6x + 9 \leq 0.$

INDICE

Outil : une racine double ; le trinôme s'écrit comme un carré.

CORRIGÉ

Avec $a = 1, b = -6$ et $c = 9$: $\Delta = 36 - 36 = 0$, et la racine double est $x_0 = 3$. Pour tout réel x :

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2.$$

Ce carré est strictement positif pour $x \neq 3$ et nul en 3 : il n'est négatif ou nul qu'en 3.

Conclusion. $S = \{3\}$.

4.

$x^2 < 3x + 10.$

INDICE

Outil : ramène tout dans un membre avant d'appliquer le signe du trinôme (F07).

CORRIGÉ

Un trinôme. Pour tout réel x, $x^2 < 3x + 10$ équivaut à :

$$x^2 - 3x - 10 < 0.$$

Racines. $\Delta = 9 + 40 = 49$ et $\sqrt{\Delta} = 7$:

$$x_1 = \frac{3 - 7}{2} = -2,$$

$$x_2 = \frac{3 + 7}{2} = 5.$$

Signe. Comme $a = 1 > 0$, le trinôme est strictement négatif entre ses racines, et positif ou nul ailleurs (signe du trinôme, F07).

Conclusion. L'ensemble des solutions est :

$$S =]-2, 5[\,.$$

Exercice 6

Une courbe et une droite : qui est au-dessus ?

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x$, et D la droite d'équation $y = 3x$.

1.

Montrer que, pour tout réel x, $f(x) - 3x = x(x-2)(x+2)$.

INDICE

Outil : factorise d'abord par x, puis reconnais une identité remarquable.

CORRIGÉ

Soit x un réel. On factorise par x, puis on reconnaît une différence de deux carrés :

$$\begin{aligned} f(x) - 3x &= x^3 - 4x \\ &= x(x^2 - 4) \\ &= x(x-2)(x+2). \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $f(x) - 3x = x(x-2)(x+2)$.

2.

Étudier le signe de $f(x) - 3x$ selon les valeurs de x. En déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de D.

INDICE

Outil : le signe de chacun des trois facteurs, intervalle par intervalle, puis l'interprétation graphique de la comparaison de deux fonctions (F08).

CORRIGÉ

Signe de $f(x) - 3x$. Les facteurs $x+2$, x et $x-2$ s'annulent en -2, 0 et 2.

- Sur $]-\infty, -2[$, les trois facteurs sont strictement négatifs : le produit est strictement négatif.
- Sur $]-2, 0[$, seuls x et $x-2$ sont strictement négatifs : le produit est strictement positif.
- Sur $]0, 2[$, seul $x-2$ est strictement négatif : le produit est strictement négatif.
- Sur $]2, +\infty[$, les trois facteurs sont strictement positifs : le produit aussi.

Le produit est nul en -2, en 0 et en 2.

Position relative. D'après la comparaison de deux fonctions (F08), le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x est au-dessus du point de D de même abscisse lorsque $f(x) - 3x \geq 0$, au-dessous lorsque $f(x) - 3x \leq 0$.

Conclusion. $f(x) - 3x$ est positif ou nul sur $[-2, 0]$ et sur $[2, +\infty[$, négatif ou nul sur $]-\infty, -2]$ et sur $[0, 2]$. Donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de D sur $[-2, 0]$ et sur $[2, +\infty[$, et au-dessous de D sur $]-\infty, -2]$ et sur $[0, 2]$.

3.

Déterminer les coordonnées des points communs à $\mathcal{C}_f$ et à D.

INDICE

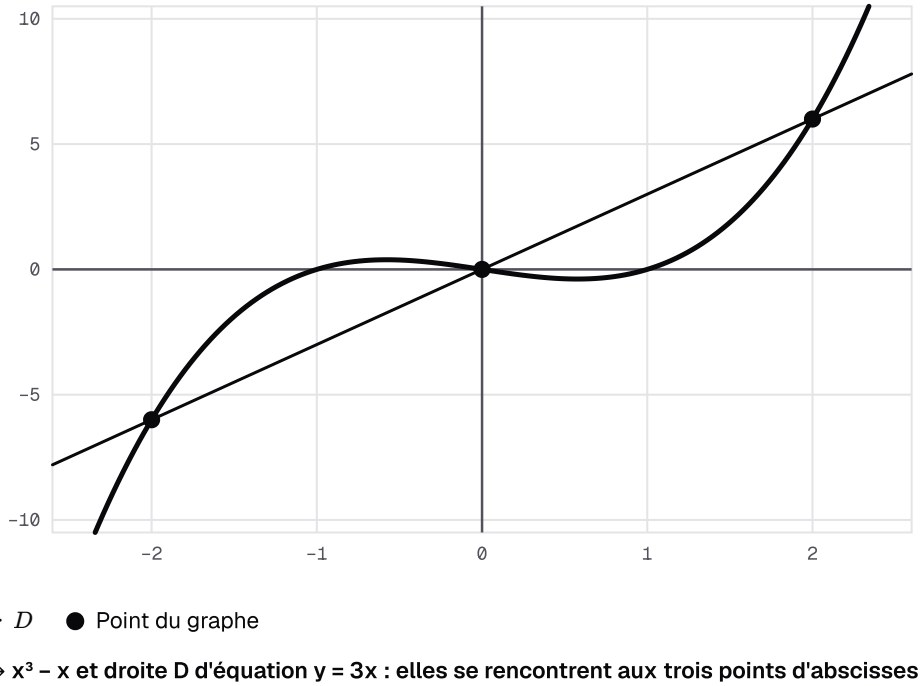
Outil : les abscisses des points communs sont les solutions de $f(x) - 3x = 0$ (comparaison de deux fonctions, F08).

CORRIGÉ

Un point $M(x, y)$ est commun à $\mathcal{C}_f$ et à D si et seulement si $y = f(x)$ et $y = 3x$, c'est-à-dire $f(x) - 3x = 0$ et $y = 3x$.

D'après 1., $x(x-2)(x+2) = 0$ équivaut à $x = -2$, $x = 0$ ou $x = 2$. Les ordonnées correspondantes valent $3x$, soit -6, 0 et 6.

Conclusion. Les points communs à $\mathcal{C}_f$ et à D sont $(-2, -6)$, $(0, 0)$ et $(2, 6)$.



Courbe de f : x ↦ x³ − x et droite D d'équation y = 3x : elles se rencontrent aux trois points d'abscisses −2, 0 et 2 trouvés au calcul.

Exercice 7

Monotonie d'une fonction homographique par le taux de variation

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x+4}{x-1}$.

1.

Déterminer D_f. Montrer que, pour tous réels distincts x et y de D_f, $T(x,y) = -\dfrac{5}{(x-1)(y-1)}$.

INDICE

Outil : réduis $f(x) - f(y)$ au même dénominateur ; le numérateur se factorise par $x - y$.

CORRIGÉ

Ensemble de définition. Le quotient existe si et seulement si $x \neq 1$: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Différence des images. Soit x et y deux réels distincts de D_f. On réduit $f(x) - f(y)$ au dénominateur $(x-1)(y-1)$; son numérateur N vaut :

$$\begin{aligned} N &= (x+4)(y-1) \\ &\quad - (y+4)(x-1) \\ &= (xy - x + 4y - 4) \\ &\quad - (xy - y + 4x - 4) \\ &= -5x + 5y = -5(x-y). \end{aligned}$$

Taux de variation. Comme $x - y \neq 0$:

$$\begin{aligned} T(x,y) &= \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \\ &= -\frac{5}{(x-1)(y-1)}. \end{aligned}$$

Conclusion. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et, pour tous réels distincts x et y de D_f, $T(x,y) = -\dfrac{5}{(x-1)(y-1)}$.

2.

En déduire le sens de variation de f sur $]1, +\infty[$, puis sur $]-\infty, 1[$.

INDICE

Outil : si x et y sont du même côté de 1, les facteurs $x - 1$ et $y - 1$ ont le même signe. Conclus par la propriété « taux de variation et monotonie » (F11).

CORRIGÉ

Sur $]1, +\infty[$**.** Soit x et y distincts dans $]1, +\infty[$. Alors $x - 1 > 0$ et $y - 1 > 0$, donc $(x-1)(y-1) > 0$ et $T(x,y) < 0$.

Sur $]-\infty, 1[$**.** Soit x et y distincts dans $]-\infty, 1[$. Alors $x - 1 < 0$ et $y - 1 < 0$: le produit $(x-1)(y-1)$ est encore strictement positif, et $T(x,y) < 0$.

Conclusion. D'après la propriété « taux de variation et monotonie » (F11), f est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$, et strictement décroissante sur $]-\infty, 1[$.

3.

Calculer $f(0)$ et $f(2)$. La fonction f est-elle décroissante sur D_f ?

INDICE

Outil : compare l'ordre de 0 et 2 à l'ordre de leurs images (définition de la monotonie, F10).

CORRIGÉ

Images. $f(0) = \dfrac{4}{-1} = -4$ et $f(2) = \dfrac{6}{1} = 6$.

Comparaison. On a $0 < 2$ et $f(0) < f(2)$. Si f était décroissante sur D_f, on aurait $f(0) \geq f(2)$ (définition de la monotonie, F10) : ce n'est pas le cas.

Conclusion. $f(0) = -4$, $f(2) = 6$, et f n'est pas décroissante sur D_f. Cela ne contredit pas 2. : D_f n'est pas un intervalle, et f n'est décroissante que sur chacun des intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$ pris séparément.

Exercice 8

Lire des extremums sur des variations

Une fonction f est définie sur $[-3,5]$. Elle est croissante sur $[-3,1]$, décroissante sur $[1,4]$ et croissante sur $[4,5]$. De plus, $f(-3)=-2$, $f(1)=3$, $f(4)=-1$ et $f(5)=2$.

1.

Montrer que 3 est le maximum de f sur $[-3,4]$, puis sur $[-3,5]$.

INDICE

Outil : extremum et tableau de variations (F14) sur $[-3,4]$. Sur $[4,5]$, compare $f(x)$ à $f(5)$.

CORRIGÉ

Sur $[-3,4]$. La fonction f est croissante sur $[-3,1]$ et décroissante sur $[1,4]$. D'après la propriété « extremum et tableau de variations » (F14), $f(1)=3$ est le maximum de f sur $[-3,4]$.

Sur $[4,5]$. Soit $x\in[4,5]$. Comme f est croissante sur $[4,5]$:

$$f(x)\leq f(5)=2<3.$$

Sur $[-3,5]$. Tout $x\in[-3,5]$ appartient à $[-3,4]$ ou à $[4,5]$. Dans les deux cas, $f(x)\leq 3=f(1)$.

Conclusion. D'après la définition d'un maximum (F13), 3 est le maximum de f sur $[-3,4]$, et aussi sur $[-3,5]$; il est atteint en 1.

2.

Montrer que -2 est le minimum de f sur $[-3,5]$.

INDICE

Outil : découpe $[-3,5]$ en trois intervalles de monotonie, puis minore f sur chacun d'eux.

CORRIGÉ

Soit $x\in[-3,5]$. Raisonnons par disjonction des cas.

- Si $x\in[-3,1]$: f y est croissante, donc $f(x)\geq f(-3)=-2$.
- Si $x\in[1,4]$: f y est décroissante, donc $f(x)\geq f(4)=-1>-2$.
- Si $x\in[4,5]$: f y est croissante, donc $f(x)\geq f(4)=-1>-2$.

Dans tous les cas, $f(x)\geq -2=f(-3)$.

Conclusion. D'après la définition d'un minimum (F13), -2 est le minimum de f sur $[-3,5]$, atteint en -3.

3.

Montrer que f admet un minimum local en 4, et donner sa valeur. Est-ce le minimum de f sur $[-3,5]$?

INDICE

Outil : extremum et tableau de variations (F14) sur un intervalle $[\alpha,\beta]$ qui contient 4 et sur lequel le sens de variation change en 4.

CORRIGÉ

Minimum local. La fonction f est décroissante sur $[1,4]$ et croissante sur $[4,5]$. D'après la propriété « extremum et tableau de variations » (F14), avec $\alpha=1$, $a=4$ et $\beta=5$, $f(4)=-1$ est le minimum de f sur $[1,5]$, et f admet un minimum local en 4.

Comparaison. $f(-3)=-2<-1$: la valeur -1 n'est pas le minimum de f sur $[-3,5]$.

Conclusion. f admet en 4 un minimum local égal à -1 ; ce n'est pas le minimum de f sur $[-3,5]$, qui vaut -2.

Exercice 9

Deux composées et leurs ensembles de définition

Soit f et g les fonctions définies par $f(x) = x^2 - 5$ et $g(x) = \dfrac{1}{x-4}$.

1.

Déterminer $D_{g\circ f}$ et exprimer $(g \circ f)(x)$ pour $x \in D_{g\circ f}$.

INDICE

Outil : définition de la composée (F15) : $x \in D_{g\circ f}$ si et seulement si $x \in D_f$ et $f(x) \in D_g$.

CORRIGÉ

Ensemble de définition. On a $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R} \setminus \{4\}$. D'après la définition de la composée (F15), un réel x appartient à $D_{g\circ f}$ si et seulement si $f(x) \neq 4$, c'est-à-dire $x^2 - 5 \neq 4$, soit $x^2 \neq 9$. Donc $D_{g\circ f} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$.

Expression. Pour tout $x \in D_{g\circ f}$:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= \frac{1}{x^2 - 5 - 4} \\ &= \frac{1}{x^2 - 9}.\end{aligned}$$

Conclusion. $D_{g\circ f} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$ et, pour tout $x \in D_{g\circ f}$, $(g \circ f)(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9}$.

2.

Déterminer $D_{f\circ g}$ et exprimer $(f \circ g)(x)$ pour $x \in D_{f\circ g}$.

INDICE

Outil : la même méthode, avec les rôles de f et g échangés.

CORRIGÉ

Ensemble de définition. D'après la définition de la composée (F15), $x \in D_{f\circ g}$ si et seulement si $x \in D_g$ et $g(x) \in D_f$. La seconde condition est toujours vraie, car $D_f = \mathbb{R}$. Donc $D_{f\circ g} = \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

Expression. Pour tout $x \in D_{f\circ g}$:

$$(f \circ g)(x) = \frac{1}{(x-4)^2} - 5.$$

Conclusion. $D_{f\circ g} = \mathbb{R} \setminus \{4\}$ et, pour tout $x \in D_{f\circ g}$, $(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{(x-4)^2} - 5$.

3.

Calculer $(g \circ f)(0)$ et $(f \circ g)(0)$. Que peut-on en conclure ?

INDICE

Outil : remplace x par 0 dans les expressions trouvées en 1. et en 2.

CORRIGÉ

Calculs. Le réel 0 appartient à $D_{g\circ f}$ et à $D_{f\circ g}$. D'après 1. et 2. :

$$(g \circ f)(0) = \frac{1}{0-9} = -\frac{1}{9},$$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(0) &= \frac{1}{16} - 5 \\ &= -\frac{79}{16}.\end{aligned}$$

Conclusion. $(g \circ f)(0) = -\dfrac{1}{9}$ et $(f \circ g)(0) = -\dfrac{79}{16}$. Ces deux nombres sont différents, donc $g \circ f \neq f \circ g$: l'ordre de la composition compte. Les deux ensembles de définition diffèrent d'ailleurs aussi.

Exercice 10

Calculs de parties entières

Dans tout l'exercice, E désigne la fonction partie entière.

1.

Calculer $E(4{,}9)$, $E(-4{,}9)$, $E(-6)$, $E(\sqrt{10})$ et $E\left(-\dfrac{7}{3}\right)$.

INDICE

Outil : encadre chaque réel entre deux entiers consécutifs, $n \leq x < n+1$ (définition de la partie entière, F19). Prends garde aux réels négatifs.

CORRIGÉ

Pour chaque réel x, on cherche l'entier n tel que $n \leq x < n+1$; alors $E(x) = n$ (définition de la partie entière, F19).

- $4 \leq 4{,}9 < 5$, donc $E(4{,}9) = 4$.
- $-5 \leq -4{,}9 < -4$, donc $E(-4{,}9) = -5$.
- -6 est un entier, donc $E(-6) = -6$ (propriétés de la partie entière, F20).
- $9 \leq 10 < 16$ et la racine carrée est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, donc $3 \leq \sqrt{10} < 4$ et $E(\sqrt{10}) = 3$.
- $-9 \leq -7 < -6$; en divisant par $3 > 0$, $-3 \leq -\dfrac{7}{3} < -2$, donc $E\left(-\dfrac{7}{3}\right) = -3$.

Conclusion. $E(4{,}9) = 4$, $E(-4{,}9) = -5$, $E(-6) = -6$, $E(\sqrt{10}) = 3$ et $E\left(-\dfrac{7}{3}\right) = -3$.

2.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $E(x) = -3$ et $E(x) = \dfrac{5}{2}$.

INDICE

Outil : pour $n \in \mathbb{Z}$, $E(x) = n$ équivaut à $n \leq x < n+1$. Une partie entière est toujours un entier.

CORRIGÉ

Équation $E(x) = -3$. D'après la définition de la partie entière (F19), pour tout réel x, $E(x) = -3$ équivaut à $-3 \leq x < -2$.

Équation $E(x) = \dfrac{5}{2}$. Pour tout réel x, $E(x)$ est un entier, alors que $\dfrac{5}{2}$ n'en est pas un. Cette équation n'a donc aucune solution.

Conclusion. L'ensemble des solutions de $E(x) = -3$ est $[-3, -2[$; l'équation $E(x) = \dfrac{5}{2}$ n'a aucune solution.

3.

Montrer que, pour tout réel x, $E(x) \geq 4$ équivaut à $x \geq 4$.

INDICE

Outil : propriétés de la partie entière (F20) : $E(x) \leq x$ pour tout réel x, et la fonction E est croissante.

CORRIGÉ

Soit x un réel. On démontre les deux implications.

Si $E(x) \geq 4$. D'après les propriétés de la partie entière (F20), $E(x) \leq x$. Donc $x \geq E(x) \geq 4$.

Si $x \geq 4$. La fonction E est croissante sur $\mathbb{R}$ (propriétés de la partie entière, F20). Donc $E(x) \geq E(4) = 4$.

Conclusion. Pour tout réel x, $E(x) \geq 4$ équivaut à $x \geq 4$.