BURHAN

Généralités sur les fonctions numériques

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/generalites-sur-les-fonctions/cours

Chapitre	Semestre
Généralités sur les fonctions numériques	Semestre 1

Pourquoi étudier une fonction avant de la tracer

Voici deux fonctions : $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ et $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

Pour x égal à 0, 1, 2 et 3, la première donne 0, $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{4}{5}$ et $\dfrac{9}{10}$. La seconde donne 0, $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{3}{4}$.

Les deux tableaux se ressemblent : les valeurs montent, sans atteindre 1. Les deux fonctions se comportent-elles de la même façon ?

Devine : Une prédiction

L'une de ces deux fonctions prend-elle une valeur strictement supérieure à 1 ?

A. Aucune : les tableaux montrent qu'elles restent sous 1.

Faux.

Un tableau ne montre que quelques valeurs. Ici, $g(-2) = 2$.

B. Seulement f, car x^2 grandit plus vite que x.

Faux.

Pour tout réel x, $x^2 < x^2 + 1$, donc $f(x) < 1$.

C. Seulement g, pour certaines valeurs négatives de x.

Juste.

Juste : $g(-2) = \dfrac{-2}{-1} = 2$.

D. Les deux, pour x assez grand.

Faux.

Pour $x \geq 0$, chaque numérateur est plus petit que son dénominateur, qui est strictement positif : les deux valeurs restent sous 1.

Correction

Pour tout réel x, $x^2 < x^2 + 1$ et $x^2 + 1 > 0$, donc $f(x) < 1$: f ne dépasse jamais 1.

En revanche, g n'est pas définie en -1, et :

$$g(-2) = \frac{-2}{-2+1} = 2.$$

Les deux fonctions se ressemblent pour $x \geq 0$, et plus du tout ailleurs. Un tableau de valeurs ne suffit donc pas : il faut **étudier** une fonction avant de la tracer.

Dans ce chapitre, tu apprends à justifier, sans calculatrice, ce qu'une courbe suggère. Une fonction est-elle bornée ? Périodique ? Croissante ? Où atteint-elle son maximum ? Quelle courbe est au-dessus de l'autre ?

Tu emploies pour cela les raisonnements du chapitre « Notions de logique ». Tu retrouves aussi la composée du chapitre « Ensembles et applications ».

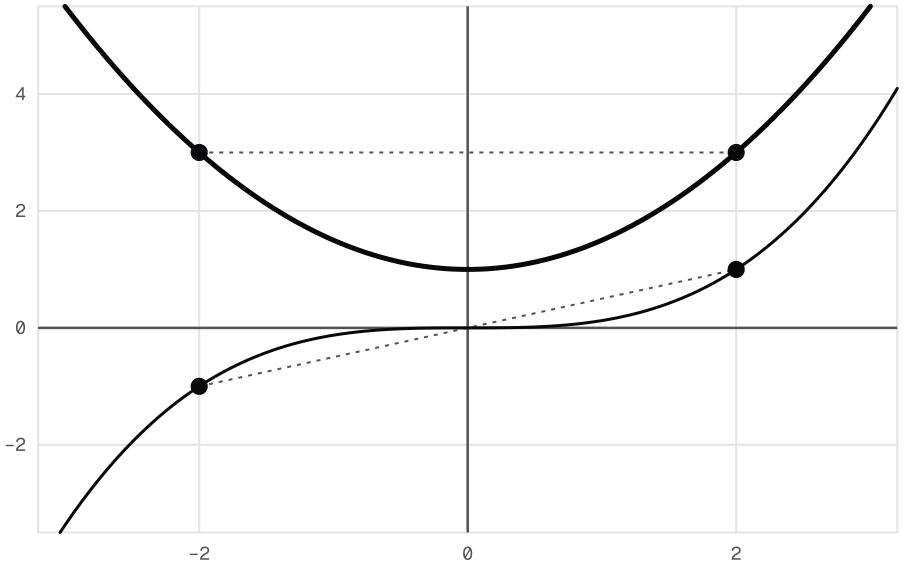
Rappels : ensemble de définition et parité

Ce que tu sais déjà

Petit rappel. L'ensemble de définition D_f d'une fonction f est l'ensemble des réels x pour lesquels $f(x)$ existe.

La fonction f est **paire** si, pour tout $x \in D_f$: $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$. Elle est **impaire** si, pour tout $x \in D_f$: $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

Dans un repère orthogonal, la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Celle d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine O.



$y = \frac{x^2}{2} + 1$ $y = \frac{x^3}{8}$ Point plein M Point plein M' Point plein N Point plein N' Point du graphe

Une fonction paire et une fonction impaire : x ↦ x²/2 + 1, dont la courbe a pour axe de symétrie l'axe des ordonnées, et x ↦ x³/8, dont la courbe a pour centre de symétrie l'origine O.

Vérifie : Paire, impaire ou aucune ?

Laquelle de ces fonctions est impaire ?

A. $x \mapsto \dfrac{x^2}{x^2+1}$

Faux.
Elle est paire : $(-x)^2 = x^2$, donc l'image de $-x$ est celle de x.

B. $x \mapsto x^2 - 4x$
Faux.
En 1, elle vaut -3 ; en -1, elle vaut 5. Or $5 \neq -3$ et $5 \neq 3$.

C. $x \mapsto \sqrt{x+2}$
Faux.
Son ensemble de définition, $[-2, +\infty[$, n'est pas symétrique par rapport à 0 : 3 y est, -3 non.

D. $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$
Juste.
Juste : $\mathbb{R}^*$ est symétrique par rapport à 0, et $-\dfrac{1}{-x} = \dfrac{1}{x}$.

Correction
Soit $f : x \mapsto -\dfrac{1}{x}$, définie sur $\mathbb{R}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Alors $-x \in \mathbb{R}^*$, et :

$$\begin{aligned} f(-x) &= -\frac{1}{-x} \\ &= \frac{1}{x} = -f(x). \end{aligned}$$

Donc f est impaire. Pour les trois autres, un contre-exemple suffit, ou un ensemble de définition qui n'est pas symétrique.

Rédiger une parité

Exemple : paire, ou ni paire ni impaire

Une fonction paire. Soit $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$. Ici $D_f = \mathbb{R}$, car $x^2 + 1 > 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$: $-x \in \mathbb{R}$ et

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2+1} = f(x).$$

Donc f est paire.

Une fonction ni paire, ni impaire. Soit $g(x) = x^2 - 4x$, définie sur $\mathbb{R}$. On a $g(1) = -3$ et $g(-1) = 5$. Comme $g(-1) \neq g(1)$, g n'est pas paire. Comme $g(-1) \neq -g(1)$, elle n'est pas impaire.

À toi : Étudier une parité

Étudie la parité de $f : x \mapsto 2x^3$, puis celle de $g : x \mapsto \dfrac{x+3}{x+1}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Commence par l'ensemble de définition : est-il symétrique par rapport à 0 ?

Indice 2
Pour f, calcule $f(-x)$, et compare-le à $f(x)$ et à $-f(x)$.
Indice 3
Point délicat : pour g, compare D_g et son symétrique par rapport à 0.

Réponse
Parité de f. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $-x \in \mathbb{R}$, et :

$$\begin{aligned} f(-x) &= 2(-x)^3 \\ &= -2x^3 = -f(x). \end{aligned}$$

Donc f est impaire.

Parité de g. On a $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Or $1 \in D_g$ et $-1 \notin D_g$: D_g n'est pas symétrique par rapport à 0.

Conclusion. f est impaire ; g n'est ni paire, ni impaire.

Axe et centre de symétrie d'une courbe

Plier ou faire tourner

En clair. Plie la feuille le long d'une droite verticale. Si les deux moitiés de la courbe se superposent, cette droite est un **axe de symétrie**.

Fais tourner la feuille d'un demi-tour autour d'un point. Si la courbe retombe sur elle-même, ce point est un **centre de symétrie**.

Une fonction paire a pour axe l'axe des ordonnées ; une fonction impaire, pour centre l'origine.

Devine : Où plier ?

Soit $f(x) = x^2 - 2x + 3$. On a $f(0) = 3$ et $f(2) = 3$. Quelle droite te semble être un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$?

A. La droite d'équation $x = 0$
Faux.
$f(-1) = 6$ et $f(1) = 2$: les points d'abscisses -1 et 1 ne sont pas à la même hauteur.

B. La droite d'équation $x = 1$
Juste.
Juste : 1 est le milieu de 0 et 2, deux abscisses de même image.

C. La droite d'équation $x = 2$
Faux.
$f(1) = 2$ et $f(3) = 6$: les points d'abscisses 1 et 3 ne sont pas à la même hauteur.

D. La droite d'équation $y = 3$
Faux.
Le symétrique de $(1, 2)$ par rapport à cette droite est $(1, 4)$, qui n'est pas sur la courbe.

Correction
Les points $(0,3)$ et $(2,3)$ de $\mathcal{C}_f$ sont à la même hauteur. La droite verticale à mi-chemin a pour équation $x=1$. De même, $f(-1)=f(3)=6$, et 1 est le milieu de -1 et 3.

Reste à le **démontrer** pour tout x : c'est l'objet du résultat qui suit.

Le critère

Une courbe a une infinité de points : on ne peut pas les plier un par un.

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve calcule les coordonnées du symétrique d'un point $M(x,y)$. Elle traduit ensuite la symétrie de la courbe par une égalité entre deux images.

Propriété : Axe de symétrie, centre de symétrie d'une courbe

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit a et b deux réels.

- La droite d'équation $x=a$ est un **axe de symétrie** de $\mathcal{C}_f$ si et seulement si, pour tout $x\in D_f$: $2a-x\in D_f$ et $f(2a-x)=f(x)$.
- Le point $\Omega(a,b)$ est un **centre de symétrie** de $\mathcal{C}_f$ si et seulement si, pour tout $x\in D_f$: $2a-x\in D_f$ et $f(2a-x)+f(x)=2b$.

Pour $a=0$, on retrouve une fonction paire ; pour $a=0$ et $b=0$, une fonction impaire.

Démonstration
Étape 1. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x=a$, et $M(x,y)$ un point. Son symétrique par rapport à $\mathcal{D}$ est $M'(2a-x,y)$: si $x=a$, $M'=M$; sinon, le milieu de $[MM']$ est sur $\mathcal{D}$, et (MM') est parallèle à l'axe des abscisses, donc perpendiculaire à $\mathcal{D}$ car le repère est orthogonal. Par rapport à Ω, c'est $M''(2a-x,2b-y)$, car Ω est le milieu de $[MM'']$.

Étape 2. Par définition, $\mathcal{D}$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$ lorsque le symétrique de tout point de $\mathcal{C}_f$ appartient à $\mathcal{C}_f$. Soit $x\in D_f$ et $M(x,f(x))$. Son symétrique $M'(2a-x,f(x))$ appartient à $\mathcal{C}_f$ si et seulement si $2a-x\in D_f$ et $f(2a-x)=f(x)$. D'où : $\big(\forall x\in D_f,\ 2a-x\in D_f \text{ et } f(2a-x)=f(x)\big)\Leftrightarrow \mathcal{D}$ est un axe.

Étape 3. De même, $M''(2a-x,2b-f(x))$ appartient à $\mathcal{C}_f$ si et seulement si $2a-x\in D_f$ et $f(2a-x)+f(x)=2b$: d'où la seconde équivalence.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La géométrie devient un calcul. Le symétrique de $M(x,y)$ par rapport à la droite d'équation $x=a$ est $M'(2a-x,y)$. Par rapport au point $\Omega(a,b)$, c'est $M''(2a-x,2b-y)$.

Il reste deux vérifications : $2a - x \in D_f$, puis l'égalité des images.

Vérifie : Le rôle du repère

Dans la preuve, à quoi sert l'hypothèse « repère orthogonal » ?

A. À placer le milieu de $[MM']$ sur la droite.

Faux.

Le milieu se calcule dans tout repère : l'orthogonalité n'y sert pas.

B. À démontrer le critère du centre de symétrie.

Faux.

Pour le centre, seul le milieu compte : aucun angle droit n'intervient.

C. À rendre (MM') perpendiculaire à la droite d'équation $x = a$.

Juste.

Juste : (MM') est parallèle à l'axe des abscisses, donc perpendiculaire à la droite d'équation $x = a$, parallèle à l'axe des ordonnées.

D. À garantir que $f(2a - x)$ existe.

Faux.

C'est la condition $2a - x \in D_f$ qui le garantit, pas le repère.

Correction

Le symétrique de M par rapport à une droite est le point M' tel que la droite soit la médiatrice de $[MM']$ (si M est sur la droite, $M' = M$). Il faut donc un milieu sur la droite **et** un angle droit.

Dans un repère orthogonal, (MM'), parallèle à l'axe des abscisses, est perpendiculaire à la droite d'équation $x = a$. Le centre de symétrie, lui, n'exige qu'un milieu.

Un axe, un centre

Exemple **: Exemple guidé : l'axe d'une parabole**

Énoncé. Soit $f(x) = x^2 - 2x + 3$, dans un repère orthogonal. Montrons que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

Ensemble de définition. Ici $D_f = \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$: alors $2 - x \in \mathbb{R}$.

Calcul de $f(2 - x)$.

$$\begin{aligned} & f(2 - x) \\ & = (2 - x)^2 - 2(2 - x) + 3 \\ & = 4 - 4x + x^2 - 4 + 2x + 3 \\ & = x^2 - 2x + 3. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $f(2-x) = f(x)$. D'après le critère, avec $a = 1$, la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.



Courbe de f : x ↦ x² − 2x + 3 sur [−1, 3]. Les points d'abscisses 0 et 2 ont la même ordonnée 3, ceux d'abscisses −1 et 3 la même ordonnée 6. La droite d'équation x = 1 est un axe de symétrie ; le point le plus bas est (1, 2).

Exemple : le centre d'une courbe homographique

Soit $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-1}$, avec $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Montrons que $\Omega(1, 2)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

Ensemble de définition. Soit $x \in D_f$. Comme $x \neq 1$, on a $2 - x \neq 1$: $2 - x \in D_f$.

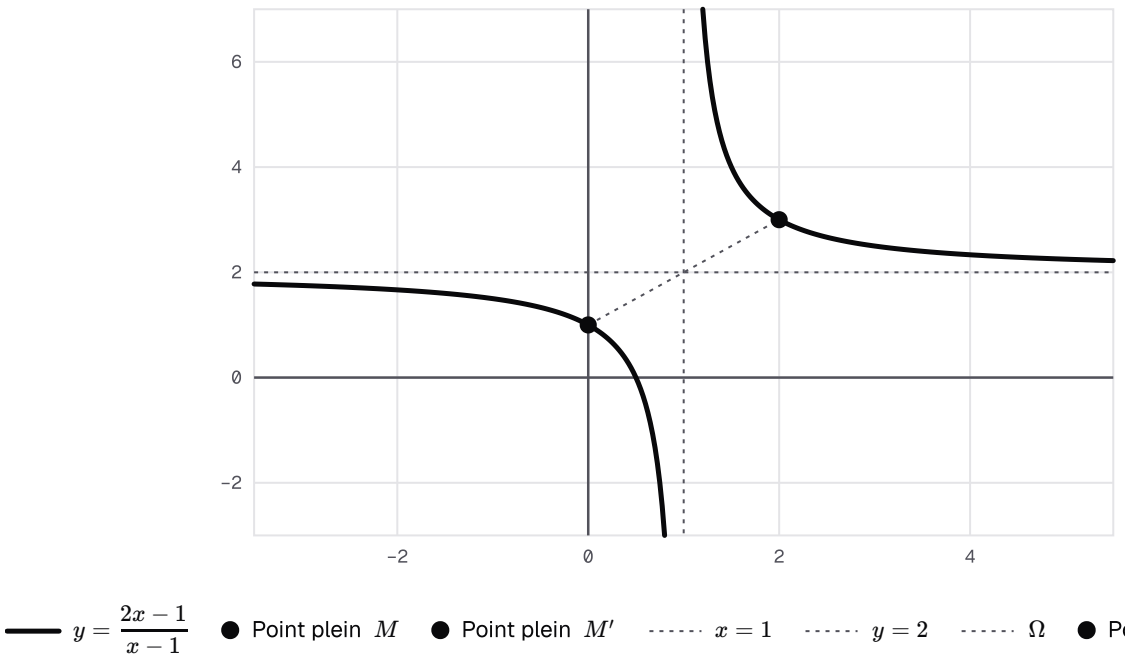
Calcul de $f(2-x)$.

$$\begin{aligned} f(2-x) &= \frac{2(2-x)-1}{(2-x)-1} \\ &= \frac{3-2x}{1-x} \\ &= \frac{2x-3}{x-1}. \end{aligned}$$

Somme des images.

$$\begin{aligned} &f(2-x) + f(x) \\ &= \frac{2x-3+2x-1}{x-1} \\ &= \frac{4(x-1)}{x-1} \\ &= 4 = 2 \times 2. \end{aligned}$$

Conclusion. D'après le critère, avec $a = 1$ et $b = 2$, le point $\Omega(1, 2)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.



Courbe de f : x ↦ (2x − 1)/(x − 1), en deux morceaux séparés par la droite d'équation x = 1. Le point Ω(1, 2) est le milieu du segment qui joint M(0, 1) et M'(2, 3), deux points de la courbe d'abscisses symétriques par rapport à 1.

Méthode et piège

Attention : l'ensemble de définition d'abord

✗ « Soit g la restriction de $x \mapsto x^2 - 2x + 3$ à $[0, 3]$. Comme $g(2 - x) = g(x)$, la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_g$. »

✓ $3 \in [0, 3]$, mais $2 - 3 = -1$ et $-1 \notin [0, 3]$. Le point $(3, 6)$ de $\mathcal{C}_g$ a pour symétrique $(-1, 6)$, qui n'est pas sur $\mathcal{C}_g$.

Vérifie toujours $2a - x \in D_f$ avant de calculer.

Méthode : prouver un axe ou un centre de symétrie

1. **Vérifier** que $2a - x$ appartient à D_f pour chaque $x \in D_f$.
2. **Calculer** $f(2a - x)$. Pour un axe d'équation $x = a$, montrer qu'il vaut $f(x)$. Pour un centre $\Omega(a, b)$, montrer que $f(2a - x) + f(x) = 2b$.
3. **Conclure** par le critère. Tu peux ensuite n'étudier f que d'un côté de a.

À toi : Un centre de symétrie

Soit $f(x) = \dfrac{x+3}{x+1}$. Montre que le point $\Omega(-1, 1)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Écris D_f, puis vérifie que $-2-x \in D_f$ pour tout $x \in D_f$.

Indice 2

Calcule $f(-2-x)$, et écris-le avec le dénominateur $x+1$.

Indice 3

Point délicat : ici $2a = -2$ et $2b = 2$; c'est la somme $f(-2-x) + f(x)$ qu'il faut comparer à 2.

Réponse

Ensemble de définition. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Soit $x \in D_f$. Si l'on avait $-2-x = -1$, on aurait $x = -1$: c'est exclu. Donc $-2-x \in D_f$.

Calcul de $f(-2-x)$.

$$\begin{aligned} & f(-2-x) \\ &= \frac{-2-x+3}{-2-x+1} \\ &= \frac{1-x}{-1-x} \\ &= \frac{x-1}{x+1}. \end{aligned}$$

Somme des images.

$$\begin{aligned} & f(-2-x) + f(x) \\ &= \frac{x-1+x+3}{x+1} \\ &= \frac{2(x+1)}{x+1} = 2. \end{aligned}$$

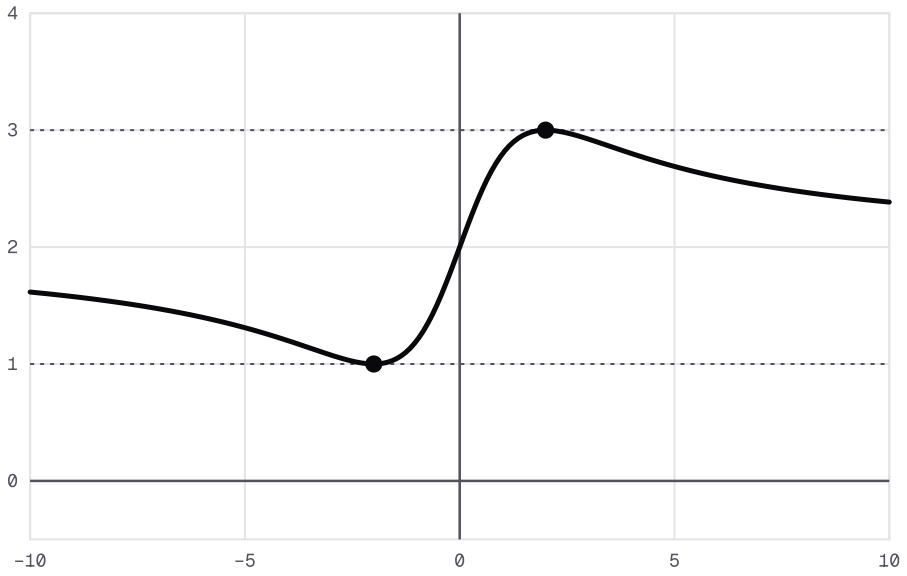
Conclusion. Ici $a = -1$, $b = 1$ et $2b = 2$. D'après le critère, $\Omega(-1, 1)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

Fonctions majorées, minorées, bornées

Un plafond, un plancher

En clair. Une fonction est **majorée** quand ses valeurs restent sous un plafond fixe. Elle est **minorée** quand elles restent au-dessus d'un plancher fixe.

Le mot important est **fixe** : le plafond est le même pour tous les x. Sur la courbe, la droite horizontale du plafond reste au-dessus de tous les points.



$y = 2 + \dfrac{4x}{x^2+4}$ $y = 3$ $y = 1$ Point du graphe

Courbe de x ↦ 2 + 4x/(x² + 4) : elle reste entre le plancher d'équation y = 1 et le plafond d'équation y = 3, qu'elle touche aux abscisses −2 et 2. Ces deux nombres fixes conviennent pour tous les réels x.

Devine : Un plafond pour la courbe ?

Soit $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$, définie sur $\mathbb{R}$. Laquelle de ces affirmations est vraie ?

A. Pour tout réel x, $f(x) \leq \dfrac{1}{2}$.

Faux.

$f(2) = \dfrac{4}{5}$, et $\dfrac{4}{5} > \dfrac{1}{2}$.

B. Pour tout réel x, $0 \leq f(x) \leq 1$.

Juste.

Juste : c'est un quotient de deux réels positifs, et $x^2 \leq x^2 + 1$.

C. Aucun plafond : x^2 devient aussi grand qu'on veut.

Faux.

Le numérateur grandit, mais le dénominateur aussi : leur quotient reste sous 1.

D. Pour tout réel x, $f(x) \geq 1$.

Faux.

$f(0) = 0$, et $0 < 1$.

Correction

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $x^2 \geq 0$ et $x^2 + 1 > 0$, donc $f(x) \geq 0$.

De plus $x^2 \leq x^2 + 1$; en divisant par $x^2 + 1 > 0$, on obtient $f(x) \leq 1$.

Les réels 0 et 1 ne dépendent pas de x : ce sont un plancher et un plafond. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq f(x) \leq 1.$$

La définition

Définition : Fonction majorée, minorée, bornée

Soit f une fonction et I une partie de son ensemble de définition D_f.

- f est **majorée** sur I s'il existe un réel M tel que : $\forall x \in I,\ f(x) \leq M$. On dit que M est un **majorant** de f sur I.
- f est **minorée** sur I s'il existe un réel m tel que : $\forall x \in I,\ f(x) \geq m$. On dit que m est un **minorant** de f sur I.
- f est **bornée** sur I si elle est à la fois majorée et minorée sur I.

Le réel M est choisi **avant** x : il ne dépend pas de x.

Attention : un majorant est un nombre fixe

✗ « Pour tout réel x, $\dfrac{x^2}{x^2+1} \leq x^2$, donc la fonction est majorée par x^2. »

✓ Le second membre x^2 change avec x : ce n'est pas un majorant. Un majorant est un réel M choisi **avant** x :

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) \leq M.$$

Dans l'autre ordre, la proposition suivante est toujours vraie, car il suffit de prendre $M = f(x)$:

$$\forall x \in I,\ \exists M \in \mathbb{R},\ f(x) \leq M.$$

Majorer pas à pas

Méthode : majorer, minorer, borner

1. **Introduire** la variable : « Soit $x \in I$. »
2. **Encadrer** $f(x)$ pas à pas, par les règles des inégalités ou par une forme canonique.
3. **Contrôler** que le réel obtenu ne dépend pas de x, puis conclure.
4. **Réfuter** « f est majorée sur I » : pour un réel M quelconque, trouver $x \in I$ tel que $f(x) > M$.

Exemple : Exemple guidé : borner une fraction

Énoncé. Soit $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$. Montrons que f est bornée sur $[0, +\infty[$.

Minorant. Soit $x \in [0, +\infty[$. Alors $x + 1 \geq 1 > 0$: $f(x)$ existe, et $f(x) \geq 0$ comme quotient de deux réels positifs.

Majorant. De plus $x < x + 1$; en divisant par $x + 1 > 0$, on obtient $f(x) < 1$.

Conclusion. Pour tout $x \geq 0$:

$$0 \leq f(x) < 1.$$

Les réels 0 et 1 ne dépendent pas de x : f est minorée par 0 et majorée par 1. Elle est donc bornée sur $[0, +\infty[$.

Avec une valeur absolue

Borner, c'est encadrer $f(x)$ entre deux réels. Peut-on se contenter d'un seul réel k, avec $|f(x)| \leq k$?

Pourquoi est-ce vrai ? Dans un sens, $|f(x)| \leq k$ se lit $-k \leq f(x) \leq k$. Dans l'autre, la preuve choisit pour k le plus grand de deux réels.

Propriété : Fonction bornée et valeur absolue

Soit f une fonction et I une partie de D_f. La fonction f est bornée sur I si et seulement s'il existe un réel $k \geq 0$ tel que : $\forall x \in I,\ |f(x)| \leq k$.

Démonstration

Étape 1. Supposons qu'il existe $k \geq 0$ tel que $|f(x)| \leq k$ pour tout $x \in I$. Pour tout $x \in I$, cette inégalité équivaut à $-k \leq f(x) \leq k$. Donc f est majorée par k et minorée par $-k$ sur I : elle est bornée (F02).

Étape 2. Réciproquement, supposons f bornée sur I : il existe deux réels m et M tels que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in I$ (F02). Soit k le plus grand des deux réels $|m|$ et $|M|$; alors $k \geq 0$.

Étape 3. Soit $x \in I$. D'une part $f(x) \leq M \leq |M| \leq k$; d'autre part $f(x) \geq m \geq -|m| \geq -k$. Donc $-k \leq f(x) \leq k$, c'est-à-dire $|f(x)| \leq k$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Un encadrement $m \leq f(x) \leq M$ se ramène à une seule inégalité. On prend pour k le plus grand des réels $|m|$ et $|M|$. Ce k ne dépend pas de x.

Puis $f(x) \leq M \leq k$ et $f(x) \geq m \geq -k$.

Vérifie : Le bon réel

Pour tout $x \in I$, on sait que $-5 \leq f(x) \leq 2$. Quel réel k la preuve choisit-elle pour écrire $|f(x)| \leq k$?

A. $k = 2$

Faux.

Rien n'empêche $f(x)$ de valoir -5, et $|-5| = 5 > 2$.

B. $k = -5$

Faux.

Une valeur absolue est positive : il faut $k \geq 0$.

C. $k = 3$

Faux.

Rien n'empêche $f(x)$ de valoir -5, et $|-5| > 3$.

D. $k = 5$

Juste.

Juste : 5 est le plus grand des réels $|-5| = 5$ et $|2| = 2$.

Correction

La preuve prend pour k le plus grand des réels $|m| = 5$ et $|M| = 2$: $k = 5$.

Alors, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq 2 \leq 5$ et $f(x) \geq -5$. Donc $-5 \leq f(x) \leq 5$, c'est-à-dire $|f(x)| \leq 5$.

Le choix de k compte : avec $k = 2$, la valeur $f(x) = -5$, permise par l'encadrement, contredirait $|f(x)| \leq k$.

Réfuter, puis s'exercer

Exemple : une fonction qui n'est pas majorée

Soit $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-1}$. Pour $x \neq 1$, $\dfrac{2x-1}{x-1} = 2 + \dfrac{1}{x-1}$. Montrons que f n'est pas majorée sur $]1, +\infty[$.

Soit M un réel. Posons $c = |M| + 1$ et $x = 1 + \dfrac{1}{c}$. Alors $c > 0$, donc $x > 1$, et :

$$f(x) = 2 + c = |M| + 3 > M.$$

Aucun réel M n'est donc un majorant de f sur $]1, +\infty[$. En revanche, f y est minorée par 2, car $\dfrac{1}{x-1} > 0$.

À toi : Borner une fraction

Soit $f(x) = \dfrac{x+3}{x+1}$. Montre que, pour tout $x \geq 0$, $1 < f(x) \leq 3$. Déduis-en un réel $k \geq 0$ tel que $|f(x)| \leq k$ sur $[0, +\infty[$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Écris $x + 3 = (x + 1) + 2$, puis sépare la fraction en deux.

Indice 2

Pour $x \geq 0$, encadre $\dfrac{2}{x+1}$: son dénominateur vaut au moins 1.

Indice 3

Point délicat : ton majorant et ton minorant ne doivent pas dépendre de x.

Réponse

Soit $x \geq 0$. Alors $x+1 \geq 1$, et :

$$\frac{x+3}{x+1} = 1 + \frac{2}{x+1}.$$

Minoration. Comme $x+1 > 0$, $\dfrac{2}{x+1} > 0$, donc $f(x) > 1$.

Majoration. Comme $x+1 \geq 1$, $\dfrac{2}{x+1} \leq 2$, donc $f(x) \leq 3$.

Ainsi, pour tout $x \geq 0$:

$$1 < f(x) \leq 3.$$

Conclusion. On en déduit $-3 \leq f(x) \leq 3$: $k = 3$ convient, et $|f(x)| \leq 3$ sur $[0, +\infty[$. La valeur 3 est atteinte en 0.

Fonctions périodiques

Un motif qui se répète

En clair. Un papier peint répète le même motif à intervalles réguliers. Une fonction **périodique** fait de même.

Sa courbe se reproduit quand on la décale horizontalement d'une longueur fixe : la **période**. Il suffit alors de connaître un motif pour tout connaître.

Devine : Prolonger un motif

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(2-x)$ pour $x \in [0, 2[$, et $f(x+2) = f(x)$ pour tout réel x. Combien vaut $f(5)$?

A. $f(5) = 5 \times (2-5) = -15$

Faux.

La formule $x(2-x)$ ne vaut que sur $[0, 2[$, et $5 \notin [0, 2[$.

B. $f(5) = 1$

Juste.

Juste : $f(5) = f(3) = f(1) = 1 \times 1$.

C. $f(5) = 0$

Faux.

$f(4) = f(2) = f(0) = 0$, mais 5 n'est pas un multiple de 2.

D. $f(5) = 3$

Faux.

En reculant de 2 en 2, on arrive à 1 : $f(5) = f(1)$.

Correction

La relation $f(x+2) = f(x)$, appliquée à $x = 3$ puis à $x = 1$, donne $f(5) = f(3) = f(1)$.

Or $1 \in [0, 2[$, donc $f(1) = 1 \times (2 - 1) = 1$. Ainsi $f(5) = 1$.

Le motif de $[0, 2[$ se répète : c'est l'idée de période.

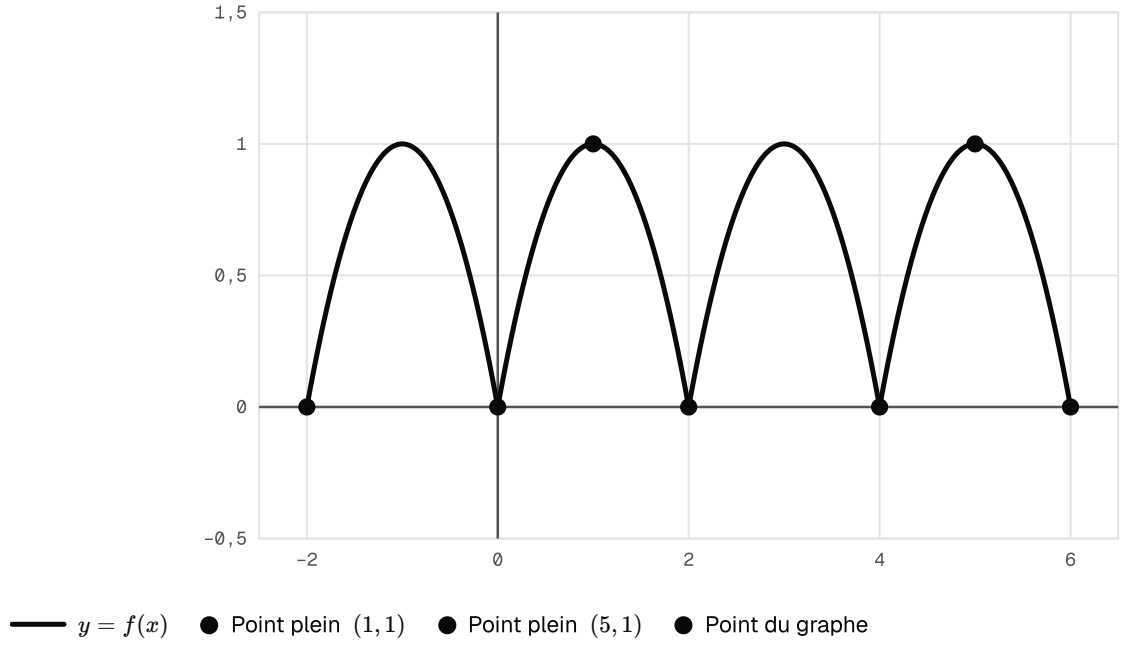
Période

Définition : Fonction périodique

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f, et T un réel strictement positif. La fonction f est **périodique de période** T si, pour tout $x \in D_f$:

$$x + T \in D_f, \quad x - T \in D_f \quad \text{et} \quad f(x+T) = f(x).$$

Appliquée au réel $x - T$, la définition donne aussi $f(x - T) = f(x)$. Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est donc invariante par les translations de vecteurs $T\vec{i}$ et $-T\vec{i}$: il suffit de la tracer sur un intervalle de longueur T.



Courbe de la fonction f de période 2, égale à x(2 − x) sur [0, 2[, tracée sur [−2, 6]. La même arche se répète sur chaque intervalle de longueur 2 : f(5) = f(1) = 1.

Les multiples d'une période

Si 2 est une période, 4 en est-elle une ? Décaler de 4, c'est décaler deux fois de 2.

Pourquoi est-ce vrai ? Pour traiter tous les multiples à la fois, la preuve raisonne par récurrence sur l'entier n.

Propriété : Multiples d'une période

Soit f une fonction périodique de période T. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le réel nT est une période de f : pour tout $x \in D_f$, $x + nT \in D_f$, $x - nT \in D_f$ et $f(x + nT) = f(x)$.

Démonstration

Étape 1. Raisonnons par récurrence (chapitre « Notions de logique »). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathcal{P}(n)$: « pour tout $x \in D_f$, $x + nT \in D_f$, $x - nT \in D_f$ et $f(x + nT) = f(x)$ ».

Initialisation. $\mathcal{P}(1)$ est la définition de la période T (F04).

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, et soit $x \in D_f$. D'après $\mathcal{P}(n)$, $x + nT \in D_f$; d'après F04 appliquée à $x + nT$, $x + (n+1)T \in D_f$ et $f\big(x + (n+1)T\big) = f(x + nT) = f(x)$. De même, $x - nT \in D_f$, donc $x - (n+1)T \in D_f$ (F04). Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; comme $nT > 0$, nT est une période de f (F04).

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La récurrence porte sur n. L'initialisation est la définition de la période.

Pour l'hérédité, on applique la définition au réel $x + nT$, qui appartient à D_f. On n'oublie pas la condition sur $x - nT$: elle fait partie de la définition.

Vérifie : Où s'applique la définition ?

Dans l'hérédité, on suppose $P(n)$ vraie. À quel réel applique-t-on la définition de la période pour obtenir $f\big(x + (n+1)T\big) = f(x + nT)$?

A. Au réel x

Faux.
Appliquée à x, elle donne $f(x + T) = f(x)$: on n'avance que d'une période.

B. Au réel nT

Faux.
nT n'appartient pas forcément à D_f, et ce n'est pas le point de départ.

C. Au réel $x + nT$

Juste.
Juste : $x + nT \in D_f$ d'après $P(n)$, et $(x + nT) + T = x + (n+1)T$.

D. Au réel $x + T$

Faux.

Cela donne $f(x + 2T) = f(x + T)$: utile pour passer de 1 à 2 seulement.

Correction

D'après $P(n)$, $x + nT \in D_f$. La définition de la période, appliquée à ce réel, donne $x + nT + T \in D_f$ et :

$$f(x + nT + T) = f(x + nT).$$

Or $f(x + nT) = f(x)$, d'après $P(n)$. Donc :

$$f\big(x + (n+1)T\big) = f(x).$$

Exemple : calculer avec une période

Reprenons la fonction f de période 2, égale à $x(2 - x)$ sur $[0, 2[$. D'après le résultat, les réels 4, 6 et 10 sont aussi des périodes de f.

Avec la période 6.

$$f(7) = f(1 + 6) = f(1) = 1.$$

Avec la période 4.

$$\begin{aligned} f(-3{,}5) &= f(-3{,}5 + 4) \\ &= f(0{,}5) \\ &= 0{,}5 \times 1{,}5 \\ &= 0{,}75. \end{aligned}$$

Avec la période 10.

$$f(10) = f(0 + 10) = f(0) = 0.$$

Montrer qu'une fonction n'est pas périodique

Méthode : étudier une périodicité

1. **Vérifier**, pour tout $x \in D_f$, que $x + T$ et $x - T$ appartiennent à D_f.
2. **Calculer** $f(x + T)$, et montrer qu'il vaut $f(x)$.
3. **Réfuter** une périodicité par l'absurde : supposer qu'une période $T > 0$ existe, puis choisir un x bien placé.
4. **Tracer** la courbe sur un intervalle de longueur T, puis la reproduire par translation.

Exemple : Exemple guidé : une fonction non périodique

Énoncé. Soit $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$, définie sur $\mathbb{R}$. Montrons que f n'est pas périodique.

Hypothèse. Raisonnons par l'absurde : supposons que f admette une période $T > 0$.

Contradiction. Avec $x = 0$, on obtient $f(T) = f(0) = 0$, c'est-à-dire $\dfrac{T^2}{T^2+1} = 0$. Donc $T^2 = 0$, puis $T = 0$. C'est absurde, car $T > 0$.

Conclusion. La fonction f n'est pas périodique.

À toi : Une période impossible

Montre, par l'absurde, que la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ n'est pas périodique. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Suppose qu'il existe une période $T > 0$, et écris ce que la définition exige pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
Indice 2
Écris ce que la définition exige de x et de $x + T$. Cherche un $x \in \mathbb{R}^*$ pour lequel $x + T$ pose problème.
Indice 3
Point délicat : vérifie d'abord ce qu'on te demande sur l'ensemble de définition, avant tout calcul.

Réponse
Hypothèse. Raisonnons par l'absurde : supposons que $f : x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ admette une période $T > 0$.

Contradiction. Le réel $x = -T$ est non nul, donc $x \in \mathbb{R}^*$. La définition exige alors $x + T \in \mathbb{R}^*$. Or $x + T = 0$: contradiction.

Conclusion. La fonction f n'est pas périodique.

Reprise : équation et signe du trinôme

Un outil du tronc commun

Petit rappel. Comparer deux fonctions revient souvent à étudier le signe d'une différence. Cette différence est souvent un trinôme $ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

Au tronc commun, tu as résolu $ax^2 + bx + c = 0$ et étudié son signe. En voici une reprise courte.

Pourquoi est-ce vrai ? Tout repose sur une écriture qui fait apparaître un carré : la forme canonique.

Devine : Combien de solutions ?

Combien de solutions réelles l'équation $x^2 - 2x + 3 = 0$ a-t-elle ?

A. Deux, comme toute équation du second degré.
Faux.

Une équation du second degré peut n'avoir aucune solution réelle.

B. Une seule : $x = 1$.

Faux.

$1^2 - 2 \times 1 + 3 = 2$, et non 0.

C. Une seule : $x = 3$.

Faux.

$3^2 - 2 \times 3 + 3 = 6$, et non 0.

D. Aucune.

Juste.

Juste : $x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 \geq 2$.

Correction

Pour tout réel x :

$$x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2.$$

Un carré est positif, donc $x^2 - 2x + 3 \geq 2 > 0$: l'équation n'a aucune solution.

Avec le discriminant, on retrouve ce résultat :

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 3 = -8 < 0.$$

Forme canonique et racines

Propriété : Trinôme du second degré : forme canonique et racines

Soit a, b et c trois réels, avec $a \neq 0$, et $P(x) = ax^2 + bx + c$. On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le **discriminant** du trinôme. Pour tout réel x :

$$P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

- Si $\Delta > 0$, l'équation $P(x) = 0$ a deux solutions distinctes, $\dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$; en les notant x_1 et x_2, $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Si $\Delta = 0$, elle a une seule solution $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, et $P(x) = a(x - x_0)^2$.
- Si $\Delta < 0$, elle n'a aucune solution réelle.

Si $\Delta > 0$: $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$.

Démonstration

Étape 1. Comme $a \neq 0$, $P(x) = a\left(x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a}\right)$ et $x^2 + \dfrac{b}{a}x = \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{4a^2}$, d'où la forme canonique.

Étape 2. Comme $a \neq 0$, $P(x) = 0$ équivaut à $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2}$. Si $\Delta < 0$, un carré serait strictement négatif : aucune solution. Si $\Delta = 0$, on obtient $x = -\dfrac{b}{2a}$. Si $\Delta > 0$, $\dfrac{\Delta}{4a^2} = \left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$, donc $x + \dfrac{b}{2a} = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x + \dfrac{b}{2a} = -\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$: deux solutions, distinctes car $\sqrt{\Delta} \neq 0$.

Étape 3. Si $\Delta > 0$, la forme canonique est une différence de deux carrés, qui se factorise en $a(x - x_1)(x - x_2)$; si $\Delta = 0$, elle vaut $a(x - x_0)^2$. Enfin $x_1 + x_2 = \dfrac{-2b}{2a} = -\dfrac{b}{a}$ et $x_1 x_2 = \dfrac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \dfrac{4ac}{4a^2} = \dfrac{c}{a}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On factorise par a, puis on complète le carré : $x^2 + \dfrac{b}{a}x$ est le début de $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$.

L'équation devient : un carré est égal à $\dfrac{\Delta}{4a^2}$. Le signe de Δ décide alors de tout.

Vérifie : Le rôle du discriminant

D'après la forme canonique, $P(x) = 0$ équivaut à $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2}$. Pourquoi n'y a-t-il aucune solution quand $\Delta < 0$?

A. Un carré n'est jamais strictement négatif.

Juste.

Juste : le second membre $\dfrac{\Delta}{4a^2}$ est strictement négatif.

B. Parce que $\sqrt{\Delta}$ serait un nombre négatif.

Faux.

Si $\Delta < 0$, $\sqrt{\Delta}$ n'existe pas : ce n'est pas un nombre négatif.

C. Parce que le coefficient a est négatif.

Faux.

Le signe de a n'intervient pas : $4a^2 > 0$ dans tous les cas.

D. Parce que le coefficient b est nul.

Faux.

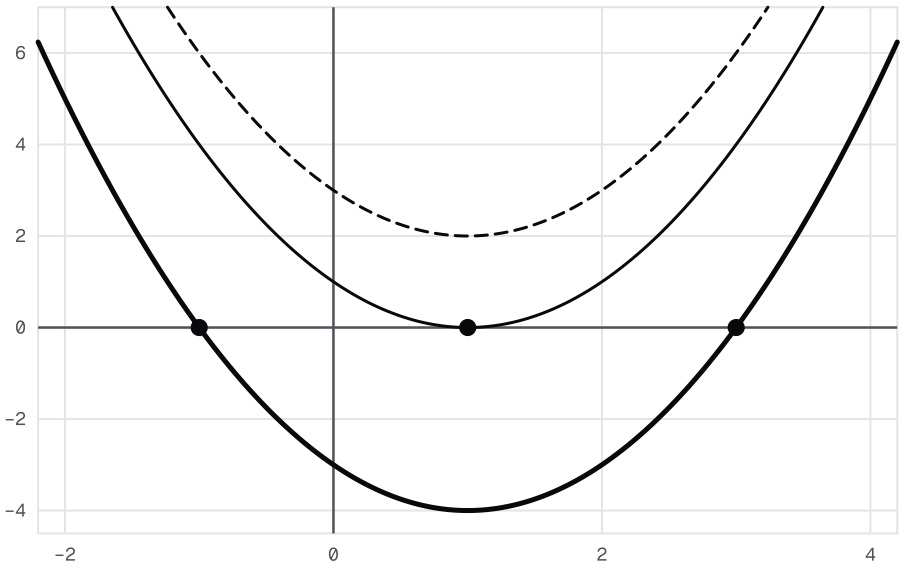
Rien n'oblige b à être nul : pour $x^2 - 2x + 3$, $b = -2$ et $\Delta < 0$.

Correction

Comme $a \neq 0$, $4a^2 > 0$. Si $\Delta < 0$, alors $\dfrac{\Delta}{4a^2} < 0$. Or le premier membre est un carré, donc positif. L'égalité est impossible : l'équation n'a aucune solution réelle.

Reste le signe de $P(x)$. Pense à la parabole : à l'extérieur des racines, elle est du côté où elle s'ouvre ; entre les racines, de l'autre côté.

> **Pourquoi est-ce vrai ?** Le résultat qui suit le démontre, en lisant ce signe sur une forme factorisée.



Trois paraboles tournées vers le haut, de même forme : x ↦ x² − 2x − 3 (discriminant positif, deux racines −1 et 3), x ↦ x² − 2x + 1 (discriminant nul, racine double 1) et x ↦ x² − 2x + 3 (discriminant négatif, aucune racine).

Le signe du trinôme

Propriété : Signe du trinôme du second degré

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta < 0$, $P(x)$ est du signe de a pour tout réel x.
- Si $\Delta = 0$, $P(x)$ est du signe de a pour tout réel $x \neq x_0$, et $P(x_0) = 0$.
- Si $\Delta > 0$, on note $x_1 < x_2$ les deux racines : $P(x)$ est du signe de a pour $x < x_1$ et pour $x > x_2$, du signe contraire de a pour $x_1 < x < x_2$, et nul en x_1 et en x_2.

Démonstration

Étape 1. Si $\Delta < 0$, d'après la forme canonique (F06), $P(x) = a \times Q(x)$ avec $Q(x) = \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}$. Un carré est positif et $-\dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$, donc $Q(x) > 0$: $P(x)$ est du signe de a.

Étape 2. Si $\Delta = 0$, $P(x) = a(x - x_0)^2$ (F06). Pour $x \neq x_0$, $(x - x_0)^2 > 0$: $P(x)$ est du signe de a ; et $P(x_0) = 0$.

Étape 3. Si $\Delta > 0$, $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ (F06). Raisonnons par disjonction des cas. Si $x < x_1$, les deux facteurs sont strictement négatifs ; si $x > x_2$, ils sont strictement positifs : leur produit est strictement positif et $P(x)$ est du signe de a. Si $x_1 < x < x_2$, $x - x_1 > 0$ et $x - x_2 < 0$: le produit est strictement négatif et $P(x)$ est du signe contraire de a. Enfin $P(x_1) = P(x_2) = 0$, car x_1 et x_2 sont les solutions de $P(x) = 0$ (F06).

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le signe se lit sur une forme factorisée. Hors des racines, les deux facteurs ont le même signe : $P(x)$ a le signe de a.

Entre les racines, ils sont de signes contraires : $P(x)$ a le signe contraire de a. Sans racine, la forme canonique suffit.

Vérifie : Entre les racines

Dans la preuve, on prend $x_1 < x < x_2$. Pourquoi le produit $(x - x_1)(x - x_2)$ est-il strictement négatif ?

A. Parce que $x - x_1 > 0$ et $x - x_2 < 0$.

Juste.

Juste : deux facteurs de signes contraires ont un produit négatif.

B. Parce que $\Delta > 0$.

Faux.

$\Delta > 0$ donne l'existence des racines, pas le signe du produit en x.

C. Parce que $a < 0$.

Faux.

Le produit $(x - x_1)(x - x_2)$ ne contient pas a : son signe ne dépend que de x.

D. Parce que les deux facteurs sont négatifs.

Faux.

Comme $x > x_1$, le facteur $x - x_1$ est strictement positif.

Correction

Comme $x > x_1$, $x - x_1 > 0$. Comme $x < x_2$, $x - x_2 < 0$. Le produit de deux facteurs de signes contraires est strictement négatif. Donc $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ est du signe contraire de a.

Exemple : une inéquation du second degré

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-x^2 + 4x - 1 > 0$.

Discriminant. Ici $a = -1$, $b = 4$ et $c = -1$, donc $\Delta = 16 - 4 = 12 > 0$.

Racines. Comme $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, les racines sont $x_1 = 2 - \sqrt{3}$ et $x_2 = 2 + \sqrt{3}$.

Signe. Comme $a < 0$, le trinôme est strictement positif entre les racines.

Conclusion. L'ensemble des solutions est :

$$S = \left]2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}\right[.$$

Méthode

Méthode : équation ou inéquation du second degré

1. **Ramener** tout dans un membre : $ax^2 + bx + c = 0$, ou > 0, ou ≤ 0, avec $a \neq 0$.
2. **Calculer** $\Delta = b^2 - 4ac$, puis les racines s'il y en a.
3. **Conclure** avec le signe de a : à l'extérieur des racines, le signe de a ; entre elles, le signe contraire.
4. **Écrire** l'ensemble des solutions, avec des intervalles pour une inéquation.

Attention : un discriminant négatif

✗ « Pour $-x^2 + x - 1$, $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, donc le trinôme est positif. »

✓ Sans racine, le trinôme a **le signe de** a. Ici $a = -1$: $-x^2 + x - 1 < 0$ pour tout réel x.

Contrôle sur une valeur : en 0, il vaut -1.

À toi : Une inéquation

Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 - 4x < 5$. Écris aussi le trinôme obtenu sous forme factorisée. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Ramène tout dans un membre : $x^2 - 4x - 5 < 0$.
Indice 2
Calcule Δ, puis les deux racines.
Indice 3
Point délicat : regarde le signe de a ; pense à l'inégalité stricte quand tu écris les crochets.

Réponse
Un seul membre. L'inéquation équivaut à $x^2 - 4x - 5 < 0$.

Racines. Ici $\Delta = 16 + 20 = 36$, et $\sqrt{36} = 6$. Les racines sont :

$$x_1 = \frac{4 - 6}{2} = -1,$$

$$x_2 = \frac{4+6}{2} = 5.$$

Donc $x^2 - 4x - 5 = (x+1)(x-5)$.

Signe. Comme $a = 1 > 0$, le trinôme est strictement négatif entre les racines.

Conclusion. L'ensemble des solutions est $S =]-1, 5[$.

Comparer deux fonctions

Quelle courbe est au-dessus ?

En clair. Deux courbes tracées dans le même repère se croisent, se touchent ou s'évitent. Pour chaque abscisse x, on compare deux hauteurs : $f(x)$ et $g(x)$.

Comparer deux fonctions, c'est comparer ces nombres. Le plus simple est d'étudier le signe de leur différence.

Devine : Deux paraboles

Soit $f(x) = x^2 - 2x + 3$ et $g(x) = -x^2 + 4x - 1$. Combien de points communs leurs courbes ont-elles ?

A. Aucun : l'une est tournée vers le haut, l'autre vers le bas.
Faux.
Deux paraboles tournées en sens contraires peuvent se couper : $f(1) = g(1) = 2$.

B. Un seul, le point $(1, 2)$.
Faux.
Il y en a un autre : $f(2) = g(2) = 3$.

C. Deux points.
Juste.
Juste : les courbes se coupent aux abscisses 1 et 2.

D. Une infinité.
Faux.
$f(0) = 3$ et $g(0) = -1$: les courbes ne sont pas confondues.

Correction
L'équation $x^2 - 2x + 3 = -x^2 + 4x - 1$ équivaut à $2x^2 - 6x + 4 = 0$, c'est-à-dire à $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Ici $\Delta = 9 - 8 = 1$: les solutions sont 1 et 2.

Comme $f(1) = 2$ et $f(2) = 3$, les points communs sont $(1, 2)$ et $(2, 3)$.

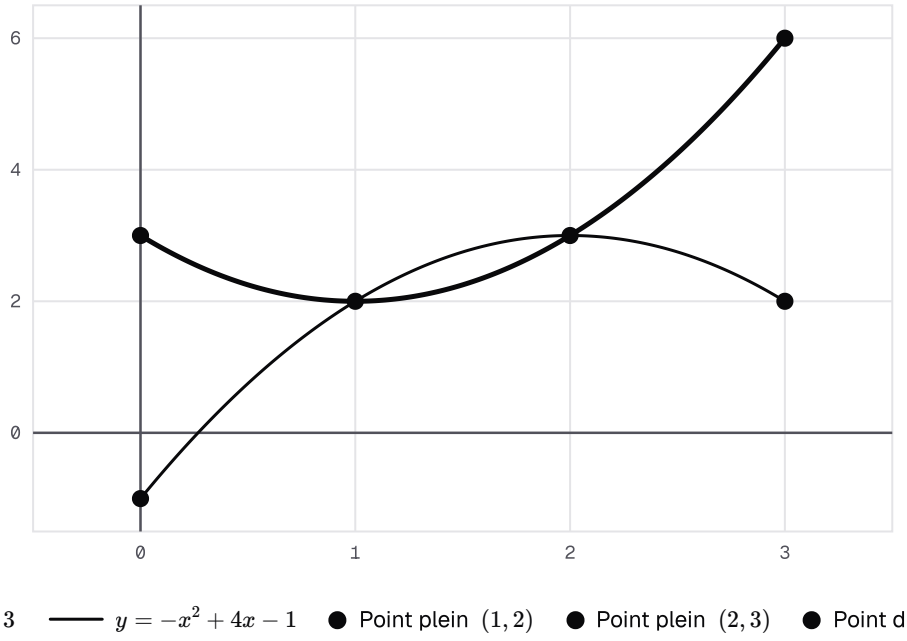
Comparer deux fonctions

Définition : Comparaison de deux fonctions ; interprétation graphique

Soit f et g deux fonctions, et I une partie de $D_f \cap D_g$.

- f est **inférieure** à g sur I, et on écrit $f \leq g$ sur I, si : $\forall x \in I,\ f(x) \leq g(x)$.
- f et g sont **égales** sur I si : $\forall x \in I,\ f(x) = g(x)$.
- f est **positive** sur I si : $\forall x \in I,\ f(x) \geq 0$.

Interprétation graphique. $f \leq g$ sur I signifie que, pour tout $x \in I$, le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x est au-dessous du point de $\mathcal{C}_g$ de même abscisse, ou confondu avec lui : $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{C}_g$ sur I. Les abscisses des points communs aux deux courbes sont les solutions dans I de l'équation $f(x) = g(x)$.



Avant de lire : entre quelles abscisses la parabole tournée vers le bas passe-t-elle au-dessus ? Courbes de f : x ↦ x² − 2x + 3 et de g : x ↦ −x² + 4x − 1 sur [0, 3]. Elles se coupent aux points (1, 2) et (2, 3). La courbe de g est au-dessus de celle de f entre les abscisses 1 et 2, au-dessous ailleurs.

Étudier une position relative

Méthode : comparer deux fonctions

1. **Calculer** la différence $f(x) - g(x)$, puis la factoriser si possible.
2. **Étudier son signe** sur I : tableau de signes, ou signe d'un trinôme.
3. **Conclure** : $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ là où la différence est positive, au-dessous là où elle est négative.

4. **Trouver** les points communs : leurs abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) - g(x) = 0$.

Exemple : Exemple guidé : la position de deux paraboles

Énoncé. Avec les fonctions f et g de l'activité, étudions la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Différence. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= 2x^2 - 6x + 4 \\ &= 2(x-1)(x-2). \end{aligned}$$

Signe. Ce trinôme a pour racines 1 et 2, et $a = 2 > 0$. Il est donc strictement positif hors de $[1, 2]$, et strictement négatif sur $]1, 2[$.

Conclusion. $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $]-\infty, 1]$ et sur $[2, +\infty[$. Elle est strictement au-dessous sur $]1, 2[$. Les points communs sont $(1, 2)$ et $(2, 3)$.

Comparaison et opérations

Une inégalité $f \leq g$ sur I se transforme comme une inégalité entre nombres.

Pourquoi est-ce vrai ? On fixe $x \in I$, on applique les règles des inégalités aux réels $f(x)$ et $g(x)$. Puis on conclut pour tout x.

Propriété : Comparaison et opérations

Soit f, g et h trois fonctions, I une partie de $D_f \cap D_g \cap D_h$ et k un réel. On suppose $f \leq g$ sur I. Alors :

- $f + h \leq g + h$ sur I ;
- si $k \geq 0$, $kf \leq kg$ sur I ; si $k \leq 0$, $kf \geq kg$ sur I ;
- si g est majorée par M sur I, alors f est majorée par M sur I ; si f est minorée par m sur I, alors g est minorée par m sur I.

Démonstration

Étape 1. Soit $x \in I$. Par hypothèse, $f(x) \leq g(x)$ (F08). En ajoutant $h(x)$ aux deux membres, $f(x) + h(x) \leq g(x) + h(x)$.

Étape 2. Multiplier les deux membres d'une inégalité par un réel positif conserve son sens ; par un réel négatif, le renverse. Donc $kf(x) \leq kg(x)$ si $k \geq 0$, et $kf(x) \geq kg(x)$ si $k \leq 0$.

Étape 3. Si $g(x) \leq M$ pour tout $x \in I$, alors $f(x) \leq g(x) \leq M$ pour tout $x \in I$: f est majorée par M sur I (F02). De même, si $m \leq f(x)$ pour tout $x \in I$, alors $m \leq f(x) \leq g(x)$.

Étape 4. Chaque inégalité vaut pour tout $x \in I$: c'est la conclusion (F08).

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On revient toujours aux nombres : soit $x \in I$. Ajouter un même réel conserve le sens. Multiplier par un réel positif le conserve ; par un réel négatif, le renverse.

Un majorant de g majore aussi f, car $f(x) \leq g(x) \leq M$.

Vérifie : Multiplier par un négatif

On sait que $f \leq g$ sur I. Que peut-on dire de $-3f$ et de $-3g$ sur I ?

A. $-3f \leq -3g$ sur I

Faux.
Multiplier par $-3 < 0$ renverse le sens de l'inégalité.

B. Rien sans connaître f et g.

Faux.
La règle vaut pour tout $x \in I$, quelles que soient f et g.

C. $-3f = -3g$ sur I

Faux.
Rien n'oblige f et g à être égales.

D. $-3f \geq -3g$ sur I

Juste.
Juste : pour tout $x \in I$, $-3f(x) \geq -3g(x)$.

Correction
Soit $x \in I$. Par hypothèse, $f(x) \leq g(x)$. En multipliant par $-3 < 0$, on renverse le sens : $-3f(x) \geq -3g(x)$. Ceci vaut pour tout $x \in I$: $-3f \geq -3g$ sur I.

Majorer par comparaison, puis s'exercer

Exemple : majorer par comparaison

Reprenons f et g. D'après l'exemple guidé, $f \leq g$ sur $[1, 2]$.

Or, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} 3 - g(x) &= x^2 - 4x + 4 \\ &= (x-2)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Donc g est majorée par 3, et f est majorée par 3 sur $[1, 2]$.

De même, en multipliant par -1, on obtient $-f \geq -g$ sur $[1, 2]$.

À toi : Position de deux courbes

Soit $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ et $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$. Étudie la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur $[0, +\infty[$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Réduis $f(x) - g(x)$ au même dénominateur $(x+1)(x^2+1)$.

Indice 2

Développe le numérateur et cherche un facteur commun.

Indice 3

Point délicat : étudie le signe du numérateur et celui du dénominateur sur $[0, +\infty[$.

Réponse

Différence. Soit $x \geq 0$. On réduit au même dénominateur $(x+1)(x^2+1)$. Le numérateur vaut :

$$\begin{aligned} &x(x^2+1) - x^2(x+1) \\ &= x(1-x). \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} &f(x) - g(x) \\ &= \frac{x(1-x)}{(x+1)(x^2+1)}. \end{aligned}$$

Signe. Le dénominateur est strictement positif. Sur $[0, 1]$, $x \geq 0$ et $1 - x \geq 0$: la différence est positive. Sur $]1, +\infty[$, $x > 0$ et $1 - x < 0$: elle est strictement négative.

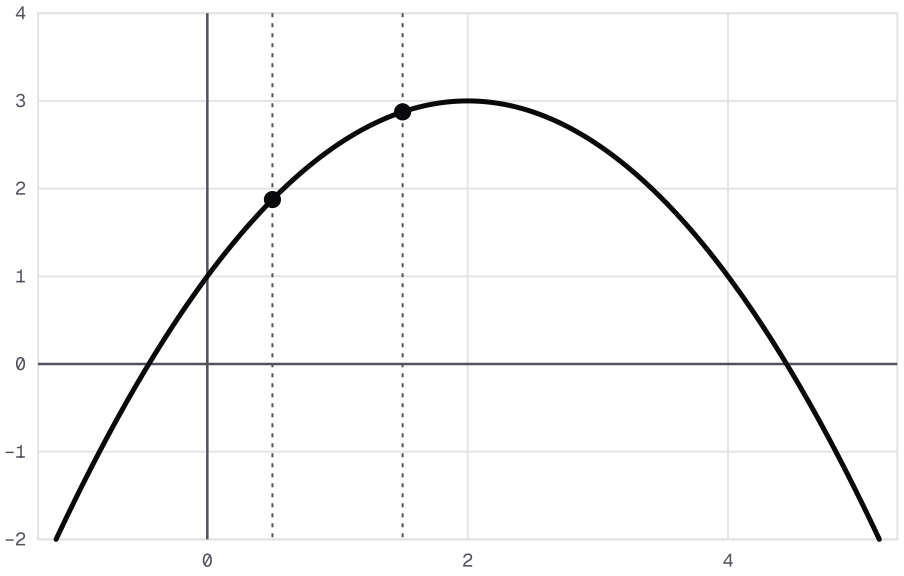
Conclusion. $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $[0, 1]$, et strictement au-dessous sur $]1, +\infty[$. Les points communs ont pour abscisses 0 et 1.

Monotonie et taux de variation

Monter, descendre

En clair. Parcours une courbe de gauche à droite. Si elle monte, la fonction est **croissante** : quand x augmente, $f(x)$ augmente aussi. Si elle descend, elle est **décroissante**.

Pour le démontrer, on compare deux images $f(x)$ et $f(y)$, avec $x < y$ quelconques.



$y = -\frac{x^2}{2} + 2x + 1$ ● Point plein P ● Point plein Q x y ● Point du graphe

Courbe de x ↦ −x²/2 + 2x + 1 parcourue de gauche à droite : elle monte jusqu'à l'abscisse 2, puis descend. Pour x = 1/2 et y = 3/2, deux réels pris dans la partie qui monte, f(x) < f(y).

Devine : Monte ou descend ?

Soit $f(x) = -\frac{1}{x}$. Sur $]0, +\infty[$, comment varie f ?

A. Elle décroît, comme $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Faux.

Le signe moins renverse le sens : $f(1) = -1$ et $f(2) = -\frac{1}{2}$.

B. Elle est constante.

Faux.

$f(1) = -1$ et $f(2) = -\frac{1}{2}$: les valeurs changent.

C. Elle est croissante.

Juste.

Juste : $f(1) = -1 < -\frac{1}{2} = f(2)$, et la preuve suit.

D. Elle monte, puis elle descend.

Faux.

Aucun changement de sens : $x \mapsto \frac{1}{x}$ décroît sur tout $]0, +\infty[$, donc f croît.

Correction

Soit $0 < x < y$. La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$: $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$.

En multipliant par -1, $-\dfrac{1}{x} < -\dfrac{1}{y}$, c'est-à-dire $f(x) < f(y)$. Donc f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Croissante, décroissante

Définition : Monotonie d'une fonction

Soit f une fonction et I un intervalle inclus dans D_f.

- f est **croissante** sur I si : $\forall (x, y) \in I^2,\ \big(x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)\big)$.
- f est **strictement croissante** sur I si : $\forall (x, y) \in I^2,\ \big(x < y \Rightarrow f(x) < f(y)\big)$.
- f est **décroissante** sur I si : $\forall (x, y) \in I^2,\ \big(x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)\big)$; **strictement décroissante** si, de plus, l'inégalité est stricte : $f(x) > f(y)$.
- f est **constante** sur I si : $\forall (x, y) \in I^2,\ f(x) = f(y)$.
- f est **monotone** sur I si elle est croissante sur I ou décroissante sur I ; **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur I.

Une fonction croissante conserve l'ordre ; une fonction décroissante l'inverse.

Vérifie : Traduire une définition

Soit f une fonction et I un intervalle inclus dans D_f. Laquelle de ces propositions signifie « f est strictement décroissante sur I » ?

A. $\forall (x, y) \in I^2,\ \big(x < y \Rightarrow f(x) > f(y)\big)$

Juste.

Juste : l'ordre des images est l'inverse de l'ordre des réels.

B. $\forall (x, y) \in I^2,\ \big(x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)\big)$

Faux.

C'est « décroissante » : l'égalité $f(x) = f(y)$ y est permise.

C. $\exists (x, y) \in I^2,\ \big(x < y \text{ et } f(x) > f(y)\big)$

Faux.

Un seul couple ne suffit pas : il faut tous les couples de I^2.

D. $\forall (x, y) \in I^2,\ \big(f(x) > f(y) \Rightarrow x > y\big)$

Faux.

Pour une fonction strictement décroissante, $f(x) > f(y)$ entraîne au contraire $x < y$.

Correction

> « Strictement décroissante sur I » signifie : pour tous x et y de I, si $x < y$, alors $f(x) > f(y)$. C'est la première proposition. La deuxième définit « décroissante », sans « strictement ». La troisième ne parle que d'un couple.

Attention : une monotonie se dit sur un intervalle

✗ « $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ est croissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, donc sur $\mathbb{R}^*$. »

✓ $-1 < 1$, mais l'image de -1 est 1 et l'image de 1 est -1. L'ordre est renversé : la fonction n'est pas croissante sur $\mathbb{R}^*$.

La monotonie s'énonce sur **un intervalle**, et $\mathbb{R}^*$ n'en est pas un.

Le taux de variation

Comparer $f(x)$ et $f(y)$ demande souvent de factoriser $f(x) - f(y)$. Le quotient par $x - y$ simplifie alors le calcul.

Pourquoi est-ce vrai ? Quand $x < y$, le dénominateur $x - y$ est strictement négatif. Le signe du quotient donne donc l'ordre de $f(x)$ et $f(y)$.

Exemple : pour la fonction carré, $\dfrac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y$.

Propriété : Taux de variation et monotonie

Soit f une fonction et I un intervalle inclus dans D_f. Pour x et y deux éléments distincts de I, le **taux de variation** de f entre x et y est le réel

$$T(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

- f est croissante sur I si et seulement si $T(x, y) \geq 0$ pour tous x et y distincts de I.
- f est strictement croissante sur I si et seulement si $T(x, y) > 0$ pour tous x et y distincts de I.
- f est décroissante (respectivement strictement décroissante) sur I si et seulement si $T(x, y) \leq 0$ (respectivement $T(x, y) < 0$) pour tous x et y distincts de I.

Démonstration

Étape 1. Pour $x \neq y$, $T(y, x) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} = T(x, y)$: le taux ne dépend pas de l'ordre des deux réels. Il suffit donc d'étudier les couples (x, y) de I^2 tels que $x < y$.

Étape 2. Soit $x < y$ dans I. Alors $x - y < 0$, donc $T(x, y) \geq 0$ équivaut à $f(x) - f(y) \leq 0$, c'est-à-dire à $f(x) \leq f(y)$. De même, $T(x, y) > 0$ équivaut à $f(x) < f(y)$, $T(x, y) \leq 0$ à $f(x) \geq f(y)$ et $T(x, y) < 0$ à $f(x) > f(y)$.

Étape 3. Par l'étape 1, « $T(x,y) \geq 0$ pour tous $x \neq y$ de I » équivaut à « $T(x,y) \geq 0$ pour tous $x < y$ de I », donc, par l'étape 2, à « $f(x) \leq f(y)$ pour tous $x < y$ de I » : c'est la croissance de f sur I (F10). Les trois autres équivalences se démontrent de la même façon.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le taux ne change pas si l'on échange x et y : il suffit de traiter $x < y$.

Alors $x - y < 0$, et le signe de $T(x,y)$ est le contraire de celui de $f(x) - f(y)$. Un taux positif signifie donc $f(x) \leq f(y)$.

Vérifie : Un seul ordre suffit

Dans la preuve, pourquoi suffit-il d'étudier les couples tels que $x < y$?

A. Parce que $T(y,x) = T(x,y)$.
Juste.
Juste : échanger les deux réels change le signe du numérateur et celui du dénominateur.

B. Parce que la définition de la croissance l'impose.
Faux.
La définition parle de $x < y$, mais le résultat porte sur tous les couples distincts : il faut un lien.

C. Parce que les couples avec $x > y$ n'existent pas.
Faux.
Ils existent : $(2,1)$ en est un.

D. Parce que $x - y$ est toujours positif.
Faux.
Pour $x < y$, $x - y$ est strictement négatif.

Correction
Par définition :

$$T(y,x) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

On multiplie le numérateur et le dénominateur par -1 : on retrouve $T(x,y)$. Le taux est donc le même pour (x,y) et pour (y,x).

Étudier les couples tels que $x < y$ suffit.

Méthode et exemple

Méthode : étudier une monotonie par le taux

1. **Prendre** x et y distincts dans I, et écrire $T(x, y)$.
2. **Factoriser** $f(x) - f(y)$ pour simplifier par $x - y$.
3. **Étudier le signe** du résultat quand x et y sont dans I.
4. **Conclure** : un taux strictement positif donne une fonction strictement croissante ; strictement négatif, strictement décroissante.

Exemple **: Exemple guidé : une fonction homographique**

Énoncé. Soit $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x - 1}$. Étudions sa monotonie sur $]1, +\infty[$.

Écriture utile. Pour $x \neq 1$, $\dfrac{2x - 1}{x - 1} = 2 + \dfrac{1}{x - 1}$.

Taux de variation. Soit x et y distincts dans $]1, +\infty[$. Alors :

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{y - 1} \\ &= \frac{y - x}{(x - 1)(y - 1)}. \end{aligned}$$

On divise par $x - y$:

$$T(x, y) = \frac{-1}{(x - 1)(y - 1)}.$$

Conclusion. Comme $x - 1 > 0$ et $y - 1 > 0$, $T(x, y) < 0$. Donc f est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.

À toi : Monotonie par le taux

Soit $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$. Étudie la monotonie de f sur $]-1, +\infty[$ à l'aide du taux de variation. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Réduis $f(x) - f(y)$ au même dénominateur $(x + 1)(y + 1)$.

Indice 2

Développe $x(y + 1) - y(x + 1)$: que reste-t-il ?

Indice 3

Point délicat : sur $]-1, +\infty[$, les deux facteurs $x + 1$ et $y + 1$ sont strictement positifs.

Réponse

Taux de variation. Soit x et y distincts dans $]-1, +\infty[$. Alors :

$$\begin{aligned} & f(x)-f(y) \\ & =\frac{x(y+1)-y(x+1)}{(x+1)(y+1)} \\ & =\frac{x-y}{(x+1)(y+1)}. \end{aligned}$$

On divise par $x-y$:

$$\begin{aligned} & T(x,y) \\ & =\frac{1}{(x+1)(y+1)}. \end{aligned}$$

Signe. Comme $x+1>0$ et $y+1>0$, $T(x,y)>0$.

Conclusion. f est strictement croissante sur $]-1,+\infty[$.

Monotonie et parité

Une moitié suffit-elle ?

En clair. La courbe d'une fonction paire ou impaire est symétrique. Si tu connais le sens de variation sur une moitié de D_f, connais-tu celui de l'autre moitié ?

Fais d'abord une prédiction : la symétrie va répondre.

Devine : Le reflet d'une montée

Une fonction paire f est strictement croissante sur $[0,3]$. Comment varie-t-elle sur $[-3,0]$?

A. Elle est strictement croissante aussi.

Faux.

C'est le cas d'une fonction impaire. Pour une fonction paire, le reflet dans l'axe des ordonnées renverse le sens.

B. Elle est strictement décroissante.

Juste.

Juste : $f(-x)=f(x)$, et l'ordre de $-x$ et $-y$ est l'inverse de celui de x et y.

C. On ne peut rien en dire.

Faux.

La parité suffit à conclure : c'est le résultat qui suit.

D. Elle est constante.

Faux.

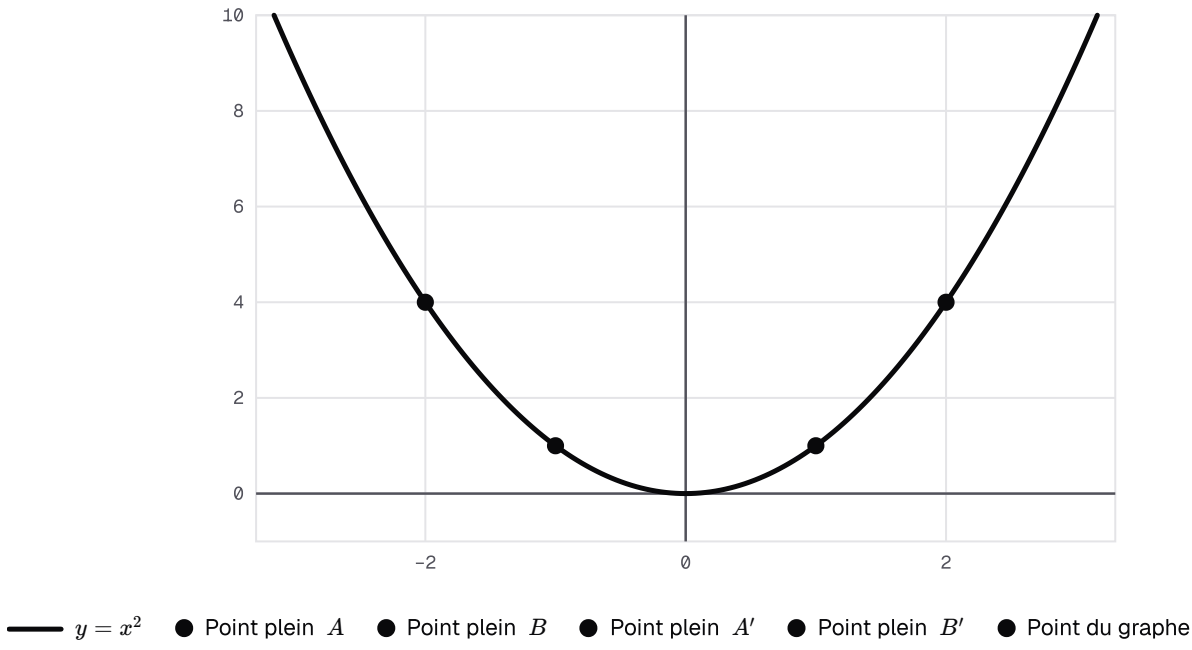
Rien ne l'impose : la parité transporte le sens de variation, elle ne l'efface pas.

Correction

Soit $u<v$ dans $[-3,0]$. Alors $-v<-u$, et ces deux réels sont dans $[0,3]$.

Comme f est strictement croissante sur $[0,3]$, $f(-v)<f(-u)$. Or f est paire : $f(v)<f(u)$.

Donc f est strictement décroissante sur $[-3, 0]$.



Courbe de la fonction paire x ↦ x² sur [−3, 3] : elle monte sur [0, 3], et son reflet par rapport à l'axe des ordonnées descend sur [−3, 0]. Les points A(1, 1) et B(2, 4) ont pour reflets A'(−1, 1) et B'(−2, 4).

Monotonie et parité

Le calcul de l'activité vaut pour toute fonction paire, et s'adapte aux fonctions impaires.

Pourquoi est-ce vrai ? Le passage de x à $-x$ renverse l'ordre. Une fonction paire garde les images : le sens s'inverse. Une fonction impaire change aussi le signe des images : le sens est conservé.

Propriété : Monotonie et parité

Soit f une fonction paire ou impaire, et I un intervalle inclus dans $D_f \cap [0, +\infty[$. On note $-I = \{-x \,/\, x \in I\}$.

- Si f est **paire** : f est croissante sur I si et seulement si elle est décroissante sur $-I$.
- Si f est **impaire** : f est croissante sur I si et seulement si elle est croissante sur $-I$.

Les mêmes équivalences valent pour la monotonie stricte, et en échangeant « croissante » et « décroissante ».

Démonstration

Étape 1. L'ensemble D_f est symétrique par rapport à 0, donc $-I \subset D_f$. Soit u et v dans $-I$ tels que $u < v$: alors $-u$ et $-v$ appartiennent à I, et $-v < -u$.

Étape 2. Supposons f paire et croissante sur I. Alors $f(-v) \leq f(-u)$ (F10), c'est-à-dire $f(v) \leq f(u)$: f est décroissante sur $-I$. Réciproquement, si f est décroissante sur $-I$, soit $x < y$ dans I : $-y < -x$ dans $-I$, donc $f(-y) \geq f(-x)$, c'est-à-dire $f(y) \geq f(x)$.

Étape 3. Supposons f impaire et croissante sur I. Alors $f(-v) \leq f(-u)$, c'est-à-dire $-f(v) \leq -f(u)$, donc $f(u) \leq f(v)$: f est croissante sur $-I$. La réciproque se démontre comme à l'étape 2.

Étape 4. Avec des inégalités strictes, ou en échangeant les sens, les mêmes calculs donnent les autres cas.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Tout repose sur une remarque : $u < v$ équivaut à $-v < -u$. On ramène deux réels de $-I$ à deux réels de I. On applique la monotonie sur I, puis la parité.

Pour une fonction impaire, l'ordre est renversé deux fois : il est donc conservé.

Vérifie : Une fonction impaire

Une fonction impaire f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. Comment varie-t-elle sur $]-\infty, 0]$?

A. Elle est strictement croissante.
Faux.
C'est ce qui se passe pour une fonction paire, pas pour une fonction impaire.

B. On ne peut rien en dire.
Faux.
Le résultat permet de conclure, car f est impaire.

C. Elle est strictement décroissante.
Juste.
Juste : une fonction impaire a le même sens de variation sur I et sur $-I$.

D. Elle est constante.
Faux.
Rien ne l'impose : le résultat donne le même sens de variation que sur $[0, +\infty[$.

Correction
Le résultat s'applique avec $I = [0, +\infty[$ et $-I =]-\infty, 0]$. Pour une fonction impaire, le sens de variation est le même sur I et sur $-I$. Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$.

Étudier une moitié

Exemple : étudier sur une moitié, conclure sur l'autre

Soit $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$, paire sur $\mathbb{R}$. Soit x et y distincts dans $[0, +\infty[$. Alors :

$$f(x) - f(y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+1)(y^2+1)}.$$

Comme $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$, on divise par $x - y$:

$$T(x,y) = \frac{x+y}{(x^2+1)(y^2+1)}.$$

Les réels x et y sont positifs et distincts : $x + y > 0$. Donc $T(x,y) > 0$, et f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Comme f est paire, elle est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$.

À toi : Taux, puis parité

Soit $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$, sur $\mathbb{R}^*$. Étudie le sens de variation de f sur $]0, +\infty[$ par le taux de variation. Déduis-en, par la parité, son sens de variation sur $]-\infty, 0[$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Réduis $f(x) - f(y)$ au même dénominateur xy.
Indice 2
Le taux se simplifie par $x - y$.
Indice 3
Point délicat : vérifie d'abord si f est paire ou impaire.

Réponse
Sur $]0, +\infty[$**.** Soit x et y distincts dans $]0, +\infty[$. Alors :

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= x - y + \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \\ &= (x-y) + \frac{x-y}{xy}. \end{aligned}$$

On divise par $x - y$:

$$T(x,y) = 1 + \frac{1}{xy}.$$

Comme $xy > 0, T(x,y) > 0$: f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Parité. $\mathbb{R}^*$ est symétrique par rapport à 0 et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(-x) = -x + \dfrac{1}{x} = -f(x)$: f est impaire.

Conclusion. f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, donc aussi sur $]-\infty, 0[$.

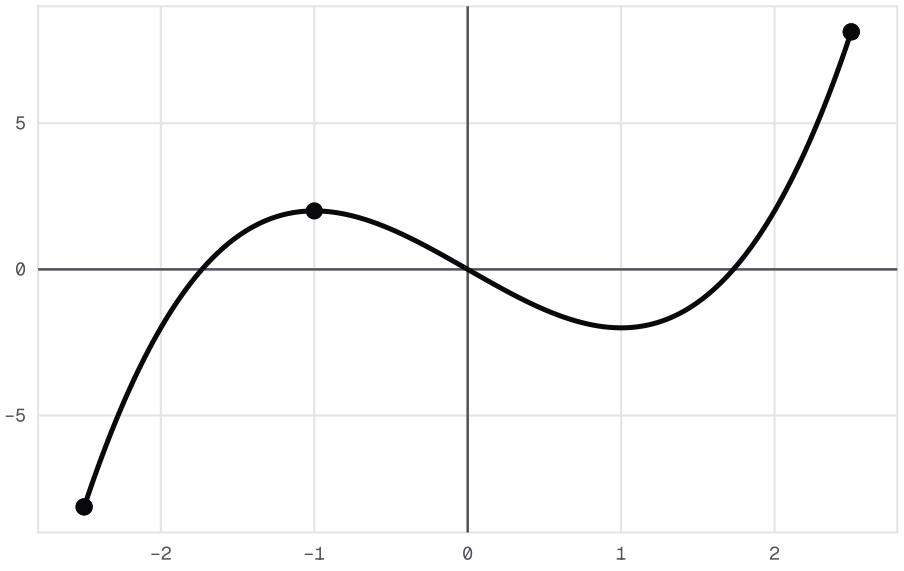
Extremums

Le point le plus haut

En clair. Sur une courbe, cherche le point le plus haut. Son ordonnée est le **maximum** de la fonction : une valeur effectivement **atteinte**. Le point le plus bas donne le **minimum**.

Un tableau de variations permet souvent de les repérer, sans tracer la courbe.

Une colline peut être le point le plus haut de son voisinage sans être le plus haut du paysage : c'est un extremum **local**.



Courbe de x ↦ x³ − 3x sur [−5/2, 5/2]. Le point A, le plus haut, donne le maximum ; le point B, le plus bas, donne le minimum. Le point C est une colline : le plus haut de son voisinage, mais pas de toute la courbe.

Devine : Lire des variations

Une fonction f est définie sur $[-1, 4]$. Elle est croissante sur $[-1, 2]$ et décroissante sur $[2, 4]$. De plus $f(-1) = -6$, $f(2) = 3$ et $f(4) = -1$. Quel est le maximum de f sur $[-1, 4]$?

A. 2

Faux.

2 est l'abscisse où le maximum est atteint, pas sa valeur.

B. 3

Juste.

Juste : la valeur $3 = f(2)$ est atteinte, et aucune image ne la dépasse.

C. -1

Faux.

$f(4) = -1$ est la valeur au bout de l'intervalle ; $f(2) = 3$ est plus grand.

D. 4

Faux.
4 est la borne de l'intervalle, pas une valeur de f.

Correction
Maximum. Sur $[-1, 2]$, f croît : $f(x) \leq f(2)$. Sur $[2, 4]$, elle décroît : $f(x) \leq f(2)$. Donc $f(x) \leq 3$ pour tout $x \in [-1, 4]$, et $f(2) = 3$. Le maximum est 3, atteint en 2.

Minimum. Sur $[-1, 2]$, $f(x) \geq f(-1) = -6$; sur $[2, 4]$, $f(x) \geq f(4) = -1 > -6$. Le minimum est donc -6, atteint en -1.

Maximum, minimum

Définition : Extremums d'une fonction

Soit f une fonction, I un intervalle inclus dans D_f, et $a \in I$.

- $f(a)$ est le **maximum** de f sur I si : $\forall x \in I,\ f(x) \leq f(a)$.
- $f(a)$ est le **minimum** de f sur I si : $\forall x \in I,\ f(x) \geq f(a)$.
- Un maximum ou un minimum est un **extremum**.
- f admet un **maximum local** (respectivement un **minimum local**) en a s'il existe un intervalle ouvert J contenant a et inclus dans D_f tel que $f(a)$ soit le maximum (respectivement le minimum) de f sur J.

Un maximum est une valeur **atteinte** : sur la courbe, c'est l'ordonnée du point le plus haut de $\mathcal{C}_f$ au-dessus de I.

Vérifie : Minimum ou maximum ?

Soit $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$, sur $\mathbb{R}$. Laquelle de ces affirmations est vraie ?

A. Le maximum de f sur $\mathbb{R}$ est 1.

Faux.
$f(x) = 1$ donnerait $x^2 = x^2 + 1$: la valeur 1 n'est jamais atteinte.

B. Le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est $\dfrac{1}{2}$.

Faux.
$f(0) = 0$, et $0 < \dfrac{1}{2}$.

C. Le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est 0, atteint en 0.

Juste.
Juste : $f(x) \geq 0 = f(0)$ pour tout réel x.

D. f n'a ni maximum, ni minimum sur $\mathbb{R}$.

Faux.

Elle a un minimum : $f(0) = 0$, et $f(x) \geq 0$ partout.

Correction

Minimum. Pour tout réel x, $f(x) \geq 0 = f(0)$: le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est 0, atteint en 0.

Pas de maximum. La fonction est majorée par 1, mais 1 n'est pas une valeur de f. Pour tout réel a, $f(a) < 1$, et $f(|a| + 1) > f(a)$, car f est paire et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Aucune valeur n'est donc la plus grande : f n'a pas de maximum.

Attention : majorée ne veut pas dire « a un maximum »

✗ « $x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$ est majorée par 1 sur $[0, +\infty[$, donc son maximum est 1. »

✓ Un maximum est une valeur **atteinte**. Or, pour $x \geq 0$, l'égalité $\dfrac{x}{x+1} = 1$ donnerait $x = x + 1$: c'est impossible.

Le réel 1 est un majorant, mais pas un maximum.

Un extremum sur un tableau

Dans l'activité du début, tu as comparé chaque image à $f(2)$, de chaque côté de 2.

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve fait exactement cela. Elle sépare trois cas : $x < a$, $x = a$ et $x > a$.

Propriété : Extremum et tableau de variations

Soit f une fonction, et α, a, β trois réels tels que $\alpha < a < \beta$ et $[\alpha, \beta] \subset D_f$.

- Si f est croissante sur $[\alpha, a]$ et décroissante sur $[a, \beta]$, alors $f(a)$ est le maximum de f sur $[\alpha, \beta]$, et f admet un maximum local en a.
- Si f est décroissante sur $[\alpha, a]$ et croissante sur $[a, \beta]$, alors $f(a)$ est le minimum de f sur $[\alpha, \beta]$, et f admet un minimum local en a.

Démonstration

Étape 1. Supposons f croissante sur $[\alpha, a]$ et décroissante sur $[a, \beta]$. Soit $x \in [\alpha, \beta]$. Raisonnons par disjonction des cas. Si $x = a$, $f(x) = f(a)$. Si $\alpha \leq x < a$, la croissance sur $[\alpha, a]$ donne $f(x) \leq f(a)$ (F10). Si $a < x \leq \beta$, la décroissance sur $[a, \beta]$ donne $f(a) \geq f(x)$.

Étape 2. Ainsi, $f(x) \leq f(a)$ pour tout $x \in [\alpha, \beta]$: $f(a)$ est le maximum de f sur $[\alpha, \beta]$ (F13).

Étape 3. L'intervalle $]\alpha, \beta[$ est ouvert, contient a et est inclus dans D_f ; comme $]\alpha, \beta[\subset [\alpha, \beta]$, $f(a)$ est aussi le maximum de f sur $]\alpha, \beta[$: f admet un maximum local en a (F13).

Étape 4. Le second point se démontre de la même façon, les inégalités étant renversées.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Une disjonction des cas suffit. À gauche de a, la croissance donne $f(x) \leq f(a)$; à droite, la décroissance donne la même inégalité.

Le maximum est local, car $]\alpha, \beta[$ est un intervalle ouvert qui contient a et qui est inclus dans D_f.

Vérifie : Pourquoi local ?

Dans la preuve, pourquoi f admet-elle un maximum **local** en a ?

A. Car $]\alpha, \beta[$ est ouvert, contient a et est inclus dans D_f.
Juste.
Juste : c'est exactement ce que demande la définition du maximum local.

B. Car $[\alpha, \beta]$ est un intervalle fermé.
Faux.
La définition du maximum local demande un intervalle **ouvert** qui contient a.

C. Car $f(a)$ est le plus grand des réels.
Faux.
$f(a)$ est seulement la plus grande valeur de f sur $[\alpha, \beta]$.

D. Car a est une borne de l'intervalle.
Faux.
Au contraire : $\alpha < a < \beta$, donc a est à l'intérieur.

Correction
La définition demande un intervalle ouvert J, qui contient a et qui est inclus dans D_f, tel que $f(a)$ soit le maximum de f sur J.

L'intervalle $]\alpha, \beta[$ convient : il est ouvert, $\alpha < a < \beta$, et $]\alpha, \beta[\subset [\alpha, \beta] \subset D_f$.

Méthode et rédaction

Méthode : déterminer un extremum

1. **Par un tableau de variations** : repérer un changement de sens de variation en a, puis conclure par le résultat précédent.
2. **Par la définition** : pour un maximum en a, montrer que $f(x) - f(a) \leq 0$ pour tout $x \in I$; pour un minimum, que $f(x) - f(a) \geq 0$.

3. **Donner** la valeur de l'extremum **et** le réel où il est atteint.

Exemple : Exemple guidé : un maximum par le signe d'une différence

Énoncé. Soit $f(x) = -x^2 + 4x - 1$. Montrons que f admet un maximum sur $\mathbb{R}$.

Candidat. On a $f(2) = -4 + 8 - 1 = 3$.

Différence. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} f(x) - f(2) &= -x^2 + 4x - 4 \\ &= -(x-2)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $f(x) \leq f(2)$. Le maximum de f sur $\mathbb{R}$ est 3, atteint en 2.

À toi : Un minimum

Soit $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Montre que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$; précise sa valeur et le point où il est atteint. La fonction f est-elle majorée sur $\mathbb{R}$? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Pense à l'axe de symétrie de la parabole, trouvé plus haut : il passe par le point le plus bas.
Indice 2
Calcule $f(x) - f(1)$, et reconnais un carré.
Indice 3
Point délicat : pour la seconde question, cherche, pour un réel M quelconque, un x tel que $f(x) > M$.

Réponse
Minimum. On a $f(1) = 2$. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &f(x) - f(1) \\ &= x^2 - 2x + 1 \\ &= (x-1)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Donc $f(x) \geq f(1)$ pour tout réel x : le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est 2, atteint en 1.

Majoration. Soit M un réel. Posons $x = |M| + 2$. Alors $x - 1 = |M| + 1 \geq 1$, donc :

$$(x-1)^2 \geq x - 1 > M.$$

Ainsi $(x-1)^2 + 2 > M$, c'est-à-dire $f(x) > M$: aucun réel n'est un majorant de f.

Conclusion. Le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est 2, atteint en 1, et f n'est pas majorée sur $\mathbb{R}$.

Remarque : Coin devoir : justifier un extremum

En devoir, un extremum se justifie : il ne se lit pas seulement sur une figure.

Écris : « Pour tout $x \in I$, $f(x) - f(a) = \cdots \leq 0$. Donc $f(a)$ est le maximum de f sur I, atteint en a. »

Ou bien : « f est croissante sur $[\alpha, a]$ et décroissante sur $[a, \beta]$, donc $f(a)$ est le maximum de f sur $[\alpha, \beta]$. »

Donne toujours la valeur **et** le point.

Composée de deux fonctions

Enchaîner deux machines

En clair. Au chapitre « Ensembles et applications », tu as composé deux applications : on applique la première, puis la seconde au résultat.

Pour deux fonctions numériques, l'idée est la même. Une précaution s'ajoute : le résultat de la première doit être accepté par la seconde.

Devine : Une racine après une addition

On applique à un réel x la fonction $x \mapsto x + 2$, puis la racine carrée au résultat. Pour quels réels x ce calcul est-il possible ?

A. Pour $x \geq 0$ seulement.
Faux.
Pour $x = -1$, $x + 2 = 1$, et $\sqrt{1}$ existe.

B. Pour tous les réels x.
Faux.
Pour $x = -3$, $x + 2 = -1$, et $\sqrt{-1}$ n'existe pas.

C. Pour $x \geq -2$.
Juste.
Juste : il faut $x + 2 \geq 0$.

D. Pour $x \geq 2$ seulement.
Faux.
Pour $x = 0$, $x + 2 = 2$, et $\sqrt{2}$ existe.

Correction
La racine carrée n'accepte que les réels positifs. Il faut donc $x + 2 \geq 0$, c'est-à-dire $x \geq -2$. Le calcul donne alors $\sqrt{x + 2}$.

Composée de deux fonctions

Définition : Composée de deux fonctions

Soit f une fonction définie sur une partie I de $\mathbb{R}$, et g une fonction définie sur une partie J de $\mathbb{R}$, telles que $f(I) \subset J$, c'est-à-dire : $\forall x \in I,\ f(x) \in J$. La **composée** de f suivie de g est la fonction $g \circ f$ définie sur I par :

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big).$$

Plus généralement, l'ensemble de définition de $g \circ f$ est $D_{g\circ f} = \{x \in D_f \,/\, f(x) \in D_g\}$. On applique d'abord f, puis g.

Exemple : l'ensemble de définition d'une composée

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$ et $g : t \mapsto \sqrt{t}$. Alors $(g \circ f)(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$.

Un réel x est dans $D_{g\circ f}$ si et seulement si $x \neq -1$ et $\dfrac{x}{x+1} \geq 0$. Un tableau de signes donne $\dfrac{x}{x+1} \geq 0$ pour $x < -1$ ou $x \geq 0$. Donc :

$$D_{g\circ f} =]-\infty, -1[\cup [0, +\infty[\,.$$

Cet ensemble est plus petit que $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Attention : l'ordre de la composition compte

✗ « Avec $u : x \mapsto x+2$ et $r : t \mapsto \sqrt{t}$, on a $r \circ u = u \circ r$. »

✓ $(r \circ u)(x) = \sqrt{x+2}$, sur $[-2, +\infty[$. Mais $(u \circ r)(x) = \sqrt{x} + 2$, sur $[0, +\infty[$. En 2, la première vaut $\sqrt{4} = 2$, la seconde $\sqrt{2} + 2$.

Dans $g \circ f$, on applique d'abord f. Vérifie aussi que $f(x)$ appartient à D_g.

Décomposer une fonction

Exemple : reconnaître une composée

Soit $h : x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x + 3}$. Posons $f(x) = x^2 - 2x + 3$ et $r : t \mapsto \sqrt{t}$. Alors $h = r \circ f$.

Pour tout réel x, $f(x) - 2 = (x-1)^2 \geq 0$, donc $f(x) \geq 2$ et $f(x) \in [0, +\infty[$.

Ainsi $D_h = \mathbb{R}$, bien que D_r soit seulement $[0, +\infty[$.

Vérifie : Dans quel ordre ?

Soit $f : x \mapsto x^2 - 4x$ et $g : t \mapsto -\dfrac{1}{t}$. Combien vaut $(g \circ f)(1)$?

A. 5

Faux.

C'est $(f \circ g)(1) = f(-1) = 5$: l'ordre est inversé.

B. -3

Faux.

$-3 = f(1)$: il reste à appliquer g.

C. $-\dfrac{1}{3}$

Faux.

$g(-3) = -\dfrac{1}{-3}$: les deux signes moins se compensent.

D. $\dfrac{1}{3}$

Juste.

Juste : $f(1) = -3$, puis $g(-3) = \dfrac{1}{3}$.

Correction

On applique d'abord f : $f(1) = 1 - 4 = -3$. Puis g : $g(-3) = -\dfrac{1}{-3} = \dfrac{1}{3}$. Donc $(g \circ f)(1) = \dfrac{1}{3}$.

Dans l'autre ordre, $(f \circ g)(1) = f(-1) = 1 + 4 = 5$.

À toi : Ensemble de définition d'une composée

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x+3}{x+1}$ et $g : t \mapsto \sqrt{t}$. Détermine $D_{g\circ f}$, puis écris $(g \circ f)(x)$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Écris les deux conditions : $x \in D_f$, et $f(x) \in D_g$.

Indice 2

Étudie le signe de $\dfrac{x+3}{x+1}$ par un tableau de signes.

Indice 3

Point délicat : traite à part le cas où le quotient est nul et le cas où le dénominateur est nul.

Réponse

Conditions. Il faut $x \neq -1$ et $\dfrac{x+3}{x+1} \geq 0$.

Signe du quotient. Il est positif quand $x + 3$ et $x + 1$ sont de même signe, ou quand $x + 3 = 0$.

Cela donne $x \leq -3$ ou $x > -1$.

Conclusion.

$$D_{g\circ f} =]-\infty, -3] \cup]-1, +\infty[,$$

et, pour tout $x \in D_{g\circ f}$, $(g \circ f)(x) = \sqrt{\dfrac{x+3}{x+1}}$.

Monotonie d'une composée

Deux sens de variation

Devine : Croissante, puis décroissante

Soit $h(x) = 3 - x^2$ sur $[0, +\infty[$. On calcule d'abord x^2, qui croît avec x sur $[0, +\infty[$, puis $3 - t$ avec $t = x^2$, qui décroît avec t. Comment varie h sur $[0, +\infty[$?

A. Elle est croissante.

Faux.
$h(1) = 2$ et $h(2) = -1$: les valeurs baissent.

B. Elle est décroissante.

Juste.
Juste : x^2 conserve l'ordre, puis $3 - t$ le renverse.

C. On ne peut rien en dire.

Faux.
L'ordre est conservé, puis renversé : on peut conclure.

D. Elle est constante.

Faux.
$h(0) = 3$ et $h(1) = 2$: les valeurs changent.

Correction
Soit $0 \leq x < y$. Alors $x^2 < y^2$, donc $3 - x^2 > 3 - y^2$: h est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

Le même enchaînement vaut pour deux fonctions quelconques. Soit f croissante sur un intervalle I, et g décroissante sur un intervalle J, avec $f(I) \subset J$.

Soit $x < y$ dans I. Comme f est croissante, $f(x) \leq f(y)$, et ces deux réels sont dans J.

- Si $f(x) = f(y)$, leurs images par g sont égales.
- Sinon $f(x) < f(y)$ et, comme g décroît sur J, $g\big(f(x)\big) \geq g\big(f(y)\big)$.

Donc $g \circ f$ est décroissante sur I.

Le calcul de l'activité se répète pour les quatre combinaisons de sens.

Pourquoi est-ce vrai ? On suit deux réels $x < y$. La fonction f les range d'une certaine façon ; puis g conserve ou renverse cet ordre.

Monotonie d'une composée

Propriété : Monotonie d'une composée

Soit f une fonction monotone sur un intervalle I, et g une fonction monotone sur un intervalle J, avec $f(I) \subset J$.

- Si f et g ont le **même** sens de variation (toutes deux croissantes, ou toutes deux décroissantes), alors $g \circ f$ est croissante sur I.
- Si f et g ont des sens de variation **contraires**, alors $g \circ f$ est décroissante sur I.

Si f et g sont strictement monotones, la monotonie de $g \circ f$ est stricte.

Démonstration

Étape 1. Soit x et y dans I tels que $x < y$. Comme $f(I) \subset J$, $f(x)$ et $f(y)$ appartiennent à J (F15).

Étape 2. Supposons f et g croissantes. Alors $f(x) \leq f(y)$ (F10). Si $f(x) = f(y)$, $g(f(x)) = g(f(y))$; sinon $f(x) < f(y)$ et la croissance de g donne $g(f(x)) \leq g(f(y))$. Donc $g \circ f$ est croissante. Si f et g sont décroissantes : $f(x) \geq f(y)$, donc $g(f(x)) \leq g(f(y))$ de la même façon.

Étape 3. Si f est croissante et g décroissante : $f(x) \leq f(y)$, donc $g(f(x)) \geq g(f(y))$. Si f est décroissante et g croissante : $f(x) \geq f(y)$, donc $g(f(x)) \geq g(f(y))$. Dans les deux cas, $g \circ f$ est décroissante.

Étape 4. Si f et g sont strictement monotones, $f(x) \neq f(y)$ et chaque inégalité est stricte.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Même sens : l'ordre est conservé deux fois, ou renversé deux fois. Sens contraires : il est renversé une seule fois.

Le cas $f(x) = f(y)$ se traite à part : les images par g sont alors égales.

Vérifie : Un cas à part

Dans la preuve, pourquoi traite-t-on à part le cas $f(x) = f(y)$?

A. La monotonie de g compare deux réels $u < v$.

Juste.
Juste : si $f(x) = f(y)$, il n'y a pas de tels réels, mais les images sont égales.

B. Parce que ce cas est impossible.

Faux.
Il est possible si f n'est pas strictement monotone, par exemple si f est constante.

C. Parce que f est strictement croissante.

Faux.
Pour une fonction strictement croissante, ce cas ne se produirait jamais.

D. Parce que g n'est pas définie en $f(x)$.

Faux.
$f(x) \in J$, où g est définie, car $f(I) \subset J$.

Correction
La croissance de g dit : si $u < v$ dans J, alors $g(u) \leq g(v)$. Elle ne s'applique qu'à deux réels distincts.

Quand $f(x) = f(y)$, on conclut directement : $g\big(f(x)\big) = g\big(f(y)\big)$, ce qui convient.

Méthode et exemples

Méthode : étudier une composée

1. **Nommer** les deux fonctions : $h = g \circ f$, souvent avec des fonctions de référence.
2. **Déterminer** D_h : $x \in D_f$ et $f(x) \in D_g$.
3. **Choisir** un intervalle I où f est monotone, et un intervalle J où g est monotone, avec $f(I) \subset J$.
4. **Conclure** : même sens, h croissante sur I ; sens contraires, h décroissante sur I.

Exemple : Exemple guidé : un trinôme vu comme une composée

Énoncé. Étudions le sens de variation de $x \mapsto x^2 - 2x + 3$ par une composée.

Décomposition. Pour tout réel x, $x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$. Posons $u : x \mapsto x - 1$ et $v : t \mapsto t^2 + 2$: la fonction étudiée est $v \circ u$.

Sur $[1, +\infty[$. u est strictement croissante, à valeurs dans $[0, +\infty[$, où v est strictement croissante. Donc $v \circ u$ est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

Sur $]-\infty, 1]$. u est strictement croissante, à valeurs dans $]-\infty, 0]$, où v est strictement décroissante. Les sens sont contraires : $v \circ u$ est strictement décroissante sur $]-\infty, 1]$.

À toi : Variations d'une composée

Soit $h : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x}$. Détermine D_h, puis le sens de variation de h sur $[4, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0]$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Écris $h = r \circ f$, avec $f(x) = x^2 - 4x$ et $r : t \mapsto \sqrt{t}$.
Indice 2
Pour D_h, résous $x^2 - 4x \geq 0$. Pour les variations, rappelle-toi le sens de variation de f de part et d'autre de 2.
Indice 3
Point délicat : vérifie que f envoie chaque intervalle dans $[0, +\infty[$, où r est croissante.

Réponse

Décomposition. $h = r \circ f$, avec $f(x) = x^2 - 4x$ et $r : t \mapsto \sqrt{t}$.

Ensemble de définition. Comme $x^2 - 4x = x(x-4)$, il faut $x(x-4) \geq 0$, donc :

$$D_h =]-\infty, 0] \cup [4, +\infty[\,.$$

Sur $[4, +\infty[$**.** Cet intervalle est inclus dans $[2, +\infty[$, où f est strictement croissante, et $f(x) \geq 0$. La racine carrée est strictement croissante sur $[0, +\infty[$: h est strictement croissante sur $[4, +\infty[$.

Sur $]-\infty, 0]$**.** f est strictement décroissante et $f(x) \geq 0$: les sens sont contraires, donc h y est strictement décroissante.

Remarque : Coin devoir : une monotonie par composée

En devoir, nomme les fonctions et vérifie l'inclusion.

Écris : « Posons $f : x \mapsto \ldots$ et $g : t \mapsto \ldots$, de sorte que $h = g \circ f$. Sur I, f est croissante et $f(I) \subset J$. Sur J, g est décroissante. Donc h est décroissante sur I. »

L'inclusion $f(I) \subset J$ est une étape à part entière : ne la saute pas.

Les fonctions x ↦ √(x + a) et x ↦ ax³

Glisser une courbe connue

Petit rappel. La fonction racine carrée est définie et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Sa courbe part de l'origine. Pour un réel a, la fonction $x \mapsto \sqrt{x + a}$ fait le même calcul, avec un décalage.

Pourquoi est-ce vrai ? C'est une composée : $x \mapsto x + a$, puis la racine carrée. La preuve s'appuie donc sur la monotonie d'une composée.

Devine : Où commence la courbe ?

Où commence la courbe de la fonction $x \mapsto \sqrt{x + 2}$?

A. Au point $(2, 0)$.

Faux.

En $x = 2$, $\sqrt{2 + 2} = 2$: le point $(2, 0)$ n'est pas sur la courbe.

B. Au point $(-2, 0)$.

Juste.

Juste : la courbe part de l'abscisse -2, où $\sqrt{0} = 0$.

C. Au point $(0, 2)$.

Faux.

En 0, la fonction vaut $\sqrt{2}$, et non 2.

D. Au point $(0, \sqrt{2})$.

Faux.

Ce point est sur la courbe, mais elle commence avant : -1 est aussi permis.

Correction

Il faut $x + 2 \geq 0$, c'est-à-dire $x \geq -2$. En -2, la fonction vaut $\sqrt{0} = 0$.

La courbe part donc du point $(-2, 0)$: c'est la courbe de la racine carrée, décalée de 2 vers la gauche.

La racine décalée

Propriété : La fonction x ↦ √(x + a)

Soit a un réel et f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x + a}$. Alors :

- $D_f = [-a, +\infty[$;
- f est strictement croissante sur $[-a, +\infty[$, et $f(-a) = 0$ est son minimum sur D_f ;
- dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $\mathcal{C}_f$ est l'image de la courbe de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ par la translation de vecteur $-a\vec{i}$.

Démonstration

Étape 1. $\sqrt{x + a}$ existe si et seulement si $x + a \geq 0$, c'est-à-dire $x \geq -a$: $D_f = [-a, +\infty[$.

Étape 2. Soit $u : x \mapsto x + a$ et $r : t \mapsto \sqrt{t}$. Alors $f = r \circ u$ sur $[-a, +\infty[$. Si $-a \leq x < y$, alors $x + a < y + a$: u est strictement croissante sur $[-a, +\infty[$; et, pour $x \geq -a$, $u(x) = x + a \geq 0$, donc $u\big([-a, +\infty[\big) \subset [0, +\infty[$. La fonction r est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ (tronc commun). D'après F16, f est strictement croissante sur $[-a, +\infty[$.

Étape 3. Pour tout $x \geq -a$, $f(x) \geq 0 = f(-a)$: $f(-a)$ est le minimum de f sur D_f (F13).

Étape 4. Soit $N(t, \sqrt{t})$, avec $t \geq 0$, un point de la courbe de r. Son image par la translation de vecteur $-a\vec{i}$ est $N'(t - a, \sqrt{t})$. En posant $x = t - a$, on a $x \geq -a$ et $\sqrt{t} = \sqrt{x + a} = f(x)$: N' est le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x. Inversement, tout point $(x, f(x))$ de $\mathcal{C}_f$ est l'image de $(x + a, \sqrt{x + a})$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La monotonie vient de la composée : $x \mapsto x + a$ et la racine carrée sont strictement croissantes.

Le minimum vient du signe : une racine carrée est positive, et $f(-a) = 0$.

Enfin, le point $(t, \sqrt{t})$ glisse en $(t - a, \sqrt{t})$: c'est la translation de vecteur $-a\vec{i}$.

Vérifie : L'inclusion utile

Dans la preuve, $x \mapsto \sqrt{x+a}$ est la composée de $u : x \mapsto x+a$, suivie de la racine carrée. Quelle inclusion permet d'appliquer la monotonie d'une composée ?

A. $[0, +\infty[\subset [-a, +\infty[$

Faux.

Elle est fausse si $a < 0$, et elle ne parle pas des images par u.

B. $[-a, +\infty[\subset [0, +\infty[$

Faux.

Elle est fausse si $a > 0$: il faut une inclusion des images par u.

C. $u\big([-a, +\infty[\big) \subset [0, +\infty[$

Juste.

Juste : pour $x \geq -a$, le réel $x+a$ est positif.

D. $u(\mathbb{R}) \subset [0, +\infty[$

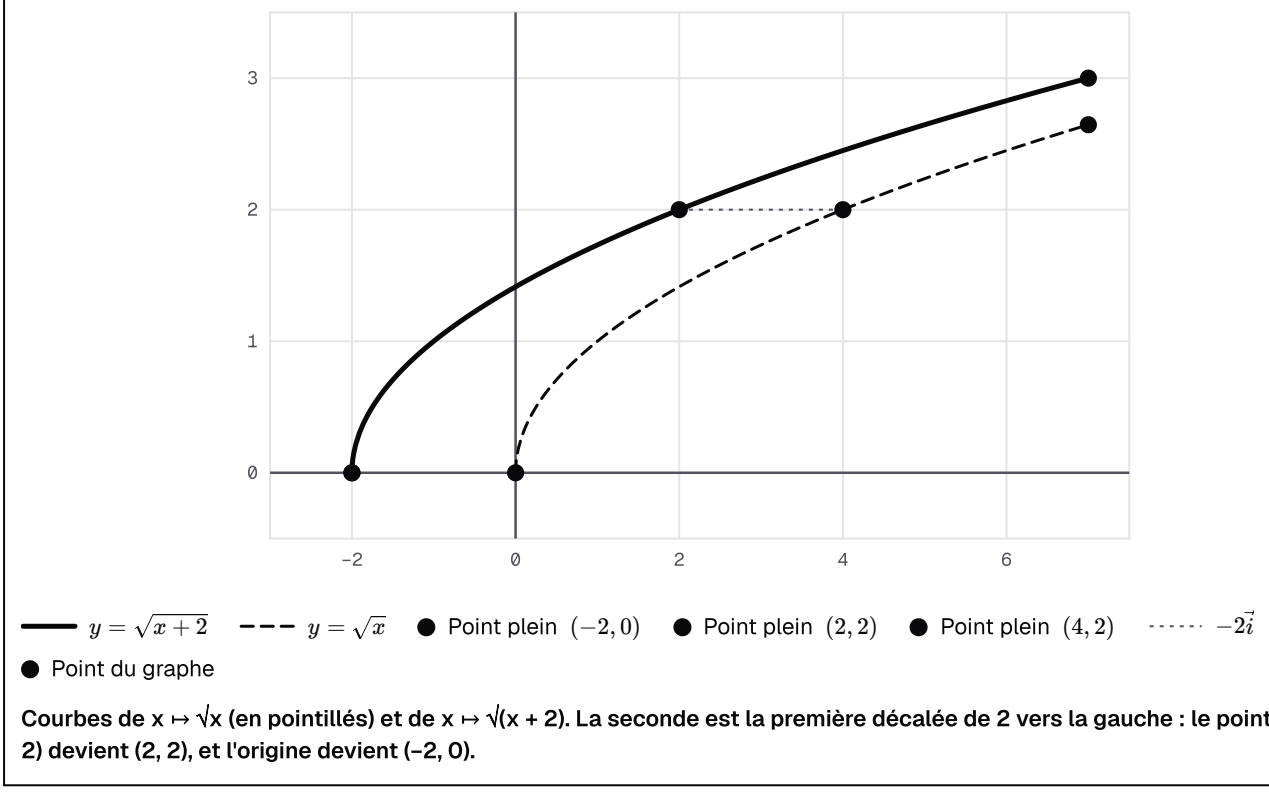
Faux.

$u(-a-1) = -1$: sur $\mathbb{R}$, u prend des valeurs négatives.

Correction

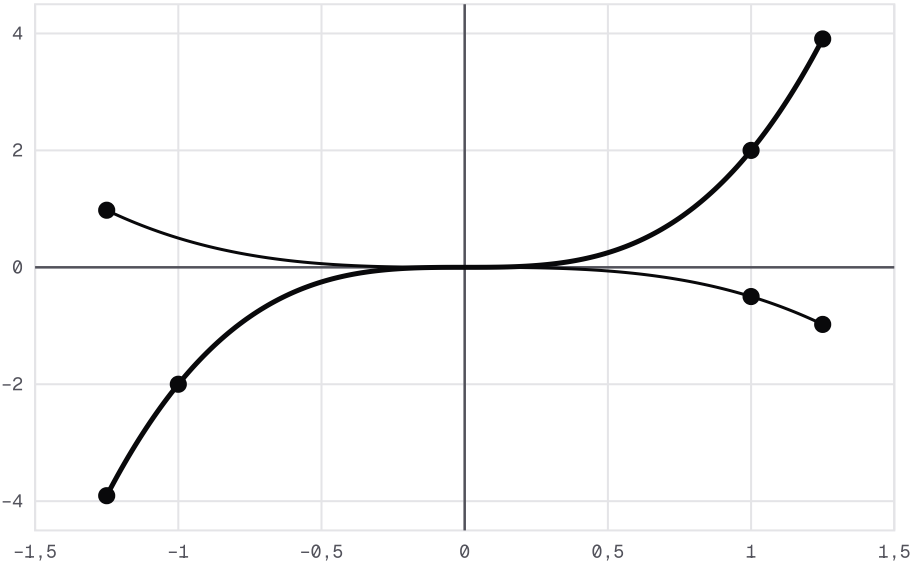
On applique la monotonie d'une composée avec $I = [-a, +\infty[$ et $J = [0, +\infty[$, où la racine carrée est strictement croissante. Il faut que u envoie I dans J.

Or, pour $x \geq -a$, on a $x + a \geq 0$. Donc $u\big([-a, +\infty[\big) \subset [0, +\infty[$.



Courbes de x ↦ √x (en pointillés) et de x ↦ √(x + 2). La seconde est la première décalée de 2 vers la gauche : le point (4, 2) devient (2, 2), et l'origine devient (–2, 0).

La fonction cube et ses multiples



$y = 2x^3$ $y = -\frac{x^3}{2}$ Point plein $(-1, -2)$ Point plein $(1, 2)$ Point plein $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ Point du graphe

Avant de lire : quelle courbe monte, quelle courbe descend ? Courbes de x ↦ 2x³ et de x ↦ −x³/2 sur [−5/4, 5/4]. Chacune est symétrique par rapport à l'origine O.

Sur la figure, l'une des courbes monte et l'autre descend. Qu'est-ce qui décide, dans $x \mapsto ax^3$, avec $a \neq 0$? Le cas $a = 1$ est la fonction cube.

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve calcule le taux de variation, grâce à l'identité :

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2).$$

Le point délicat est le signe de $x^2 + xy + y^2$.

Propriété : La fonction x ↦ ax³

Soit a un réel non nul et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3$. Alors :

- f est impaire, et l'origine O est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$;
- si $a > 0$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; si $a < 0$, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

Étape 1. Pour tout réel x, $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = a(-x)^3 = -ax^3 = -f(x)$: f est impaire. Donc $f(-x) + f(x) = 0$, et $O(0, 0)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$ (FO1).

Étape 2. Soit x et y deux réels distincts. Comme $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$, le taux de variation vaut $T(x, y) = \dfrac{a(x^3 - y^3)}{x - y} = a(x^2 + xy + y^2)$.

Étape 3. Or $x^2+xy+y^2=\left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3y^2}{4}\geq 0$, avec égalité seulement si $y=0$ et $x+\dfrac{y}{2}=0$, c'est-à-dire $x=y=0$, ce qui est exclu. Donc $x^2+xy+y^2>0$, et $T(x,y)$ est du signe de a.

Étape 4. D'après F11, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si $a>0$, strictement décroissante si $a<0$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le taux vaut $a(x^2+xy+y^2)$. Une forme canonique montre que $x^2+xy+y^2>0$ dès que $x\neq y$.

Le taux a donc le signe de a. L'imparité donne en plus la symétrie par rapport à O.

Comprendre et s'exercer

Vérifie : Le signe délicat

Dans la preuve, pourquoi a-t-on $x^2+xy+y^2>0$ quand $x\neq y$?

A. C'est $\left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3y^2}{4}$, nul seulement si $x=y=0$.

Juste.

Juste : une somme de deux carrés, qui ne s'annulent pas ensemble.

B. Parce que x^2 et y^2 sont positifs.

Faux.

Le terme xy peut être négatif : il faut un argument de plus.

C. Parce que $xy>0$ pour tous réels x et y.

Faux.

$1\times(-2)=-2$: un produit peut être négatif.

D. Parce que $a>0$.

Faux.

Le réel a n'apparaît pas dans x^2+xy+y^2.

Correction

On écrit :

$$x^2+xy+y^2=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}.$$

C'est une somme de deux carrés, donc elle est positive. Elle n'est nulle que si $y=0$ et $x+\dfrac{y}{2}=0$, donc si $x=y=0$. Ce cas est exclu, car $x\neq y$.

Exemple : deux inéquations

Une racine carrée. Résolvons $\sqrt{x+2}\leq 3$. Il faut $x\geq -2$. Sur $[-2,+\infty[$, deux réels positifs sont rangés comme leurs carrés : l'inéquation équivaut à $x+2\leq 9$. L'ensemble des solutions est $[-2,7]$.

Un cube. Résolvons $-\dfrac{x^3}{2} \geq 4$. Elle équivaut à $x^3 \leq -8$, c'est-à-dire $x^3 \leq (-2)^3$. La fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Si $x \leq -2$, alors $x^3 \leq (-2)^3$; si $x > -2$, alors $x^3 > (-2)^3$. L'ensemble des solutions est donc $]-\infty, -2]$.

À toi : Avec une fonction cube

Soit $f(x) = 2x^3$. (a) Sans calculer, compare $f(-1{,}5)$ et $f(1{,}2)$. (b) Résous $f(x) \geq 16$. (c) Le point O est-il un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Ici $a = 2 > 0$: quel est le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$?
Indice 2
Pour (b), cherche un réel dont l'image par f vaut 16.
Indice 3
Point délicat : pour (c), O est un centre de symétrie quand $f(-x) + f(x) = 0$ pour tout réel x.

Réponse
(a) f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, car $a = 2 > 0$. Comme $-1{,}5 < 1{,}2$, on a $f(-1{,}5) < f(1{,}2)$.

(b) On a $f(2) = 16$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \geq 2$, alors $f(x) \geq f(2) = 16$, car f est croissante sur $\mathbb{R}$. Si $x < 2$, alors $f(x) < f(2) = 16$, car f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Donc $f(x) \geq 16$ équivaut à $x \geq 2$: l'ensemble des solutions est $[2, +\infty[$.

(c) Pour tout réel x, $f(-x) + f(x) = -2x^3 + 2x^3 = 0$. Donc O est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

La fonction partie entière

Arrondir vers le bas

En clair. Dans un immeuble, l'étage est un nombre entier. Si l'ascenseur est entre le deuxième et le troisième étage, l'écran affiche « 2 » : on arrondit vers le bas.

La **partie entière** d'un réel fait la même chose. Elle donne le plus grand entier qui ne dépasse pas ce réel.

Devine : Arrondir un négatif

Quel est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à $-2{,}3$?

A. -2
Faux.
$-2 > -2{,}3$: cet entier est trop grand.

B. -3

Juste.
Juste : $-3 \leq -2{,}3 < -2$.

C. $-2{,}3$
Faux.
$-2{,}3$ n'est pas un entier.

D. 2
Faux.
2 est strictement supérieur à $-2{,}3$.

Correction
Les entiers inférieurs ou égaux à $-2{,}3$ sont -3, -4, -5, et tous les entiers plus petits. Le plus grand est -3, car $-3 \leq -2{,}3 < -3 + 1$.

Arrondir vers le bas un réel négatif l'éloigne de 0.

La partie entière

Propriété : Partie entière d'un réel

Pour tout réel x, il existe un **unique** entier relatif n tel que $n \leq x < n + 1$. Cet entier est appelé la **partie entière** de x et noté $E(x)$.

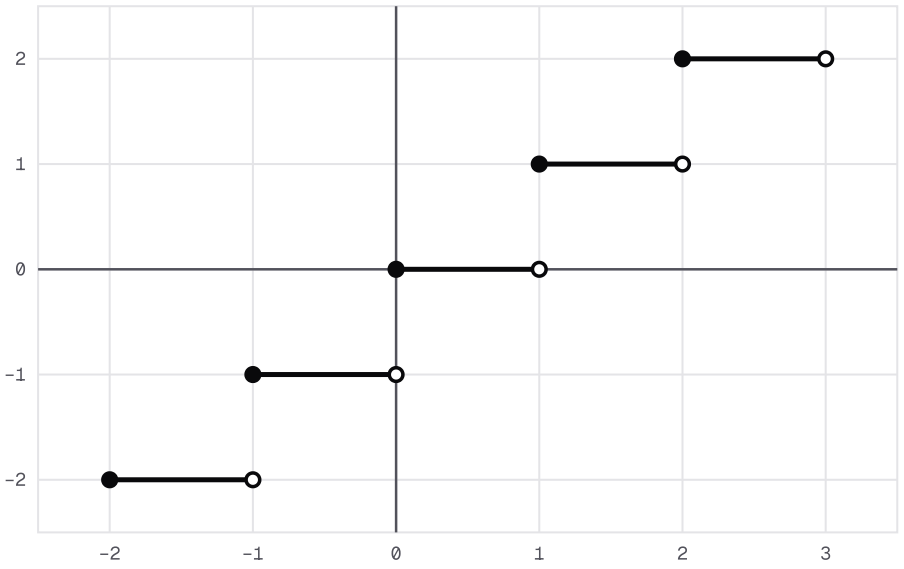
La **fonction partie entière** est la fonction E définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto E(x)$. Par exemple, $E(2{,}7) = 2$, $E(3) = 3$ et $E(-1{,}4) = -2$.

Démonstration
Idée de la preuve. **Unicité.** Soit n et m deux entiers relatifs tels que $n \leq x < n + 1$ et $m \leq x < m + 1$. Alors $n \leq x < m + 1$, donc $n < m + 1$, c'est-à-dire $n \leq m$ puisque ce sont des entiers. De même, $m \leq n$. Donc $n = m$.

Existence. Étape omise, admise dans ce chapitre : elle repose sur deux propriétés non étudiées, « tout réel est dépassé par un entier » (appliquée à x et à $-x$) et « toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément ». Le plus grand entier n tel que $n \leq x$ convient alors : $n + 1$, entier strictement plus grand que n, ne vérifie pas $n + 1 \leq x$, donc $x < n + 1$.

Remarque : ce qui est admis

Sous l'énoncé, seule l'**unicité** de l'entier n est démontrée. Son **existence** est admise : elle repose sur une propriété de $\mathbb{R}$ que tu n'étudies pas cette année. On s'en sert sans la démontrer.



$y = E(x)$ ● Point du graphe ○ Point exclu du graphe

Avant de lire : à quel bout de chaque marche le point appartient-il à la courbe ? Courbe de la fonction partie entière sur [−2, 3[. Sur chaque intervalle [n, n + 1[, la fonction est constante, égale à n : un segment horizontal, avec un point plein à gauche et un point creux à droite.

Borne exclue en x = −1 : point creux à l'ordonnée estimée ≈ −2.

Borne exclue en x = 0 : point creux à l'ordonnée estimée ≈ −1.

Borne exclue en x = 1 : point creux à l'ordonnée estimée ≈ 0.

Borne exclue en x = 2 : point creux à l'ordonnée estimée ≈ 1.

Borne exclue en x = 3 : point creux à l'ordonnée estimée ≈ 2.

Propriétés de la partie entière

La partie entière vérifie des propriétés utiles : encadrement, valeurs entières, croissance.

Pourquoi est-ce vrai ? Chaque propriété découle de l'encadrement $n \leq x < n+1$ et de l'unicité de n. La croissance se démontre par l'absurde.

Propriété : Propriétés de la partie entière

Soit x un réel. Alors :

- $E(x) \leq x < E(x) + 1$ et $x - 1 < E(x) \leq x$;
- $E(x) = x$ si et seulement si $x \in \mathbb{Z}$;
- pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $t \in [n, n+1[$, $E(t) = n$: la fonction E est constante sur chaque intervalle $[n, n+1[$;
- la fonction E est croissante sur $\mathbb{R}$, mais elle n'est pas strictement croissante.

Démonstration

Étape 1. Par définition (F19), $E(x) \leq x < E(x)+1$. L'inégalité $x < E(x)+1$ s'écrit aussi $x-1 < E(x)$.

Étape 2. Si $E(x) = x$, alors x est un entier relatif. Réciproquement, si $x \in \mathbb{Z}$, l'entier x vérifie $x \leq x < x+1$; par unicité (F19), $E(x) = x$.

Étape 3. Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $t \in [n, n+1[$: $n \leq t < n+1$, donc $E(t) = n$ par unicité (F19).

Étape 4. Soit x et y deux réels tels que $x < y$. Supposons par l'absurde que $E(y) < E(x)$. Ce sont des entiers, donc $E(y)+1 \leq E(x) \leq x < y$, ce qui contredit $y < E(y)+1$. Donc $E(x) \leq E(y)$: E est croissante (F10). Elle n'est pas strictement croissante, car $0 < \dfrac{1}{2}$ et $E(0) = E\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour montrer que $E(t) = n$, il suffit de vérifier $n \leq t < n+1$: l'unicité fait le reste.

La croissance se démontre par l'absurde. Si $E(y) < E(x)$ avec $x < y$, deux entiers distincts diffèrent d'au moins 1, et l'encadrement est contredit.

Vérifie : Strictement croissante ?

La fonction E est croissante sur $\mathbb{R}$. Pourquoi n'est-elle pas strictement croissante ?

A. Parce que $E(-1{,}4) = -2$.

Faux.

Cette valeur est juste, mais elle ne compare pas deux images.

B. Parce que sa courbe fait des sauts.

Faux.

Un saut n'empêche pas une stricte croissance : il faut deux réels distincts de même image.

C. Parce que $E(x) \leq x$ pour tout réel x.

Faux.

Cette inégalité est vraie, mais elle ne dit rien de l'ordre de deux images.

D. Parce que $0 < 0{,}5$ et $E(0) = E(0{,}5) = 0$.

Juste.

Juste : deux réels distincts ont la même image.

Correction

Pour réfuter la stricte croissance, il suffit de deux réels $x < y$ tels que $E(x) \geq E(y)$. Ici $0 < 0{,}5$, et $E(0) = E(0{,}5) = 0$.

La fonction E est constante sur chaque intervalle $[n, n+1[$: elle croît par paliers.

Exemple : Exemple guidé : équations et inéquations

Énoncé. Résolvons dans $\mathbb{R}$: (a) $E(x) = 3$; (b) $E(x) = -2$; (c) $E(x) \geq 2$.

(a) $E(x) = 3$ équivaut à $3 \leq x < 4$: $S = [3, 4[$.

(b) De même, $E(x) = -2$ équivaut à $-2 \leq x < -1$: $S = [-2, -1[$.

(c) Si $x \geq 2$, la croissance de E donne $E(x) \geq E(2) = 2$. Si $x < 2$, alors $E(x) \leq x < 2$. Donc $E(x) \geq 2$ équivaut à $x \geq 2$: $S = [2, +\infty[$.

Méthode et piège

Attention : la partie entière d'un réel négatif

✗ « $E(-1{,}4) = -1$: on enlève les décimales. »

✓ $E(-1{,}4) = -2$, car $-2 \leq -1{,}4 < -1$. La partie entière est le plus grand entier qui ne dépasse pas le réel.

Contrôle toujours $E(x) \leq x < E(x) + 1$.

Méthode : calculer avec la partie entière

1. **Calculer** $E(x)$: encadrer x entre deux entiers consécutifs, $n \leq x < n + 1$; alors $E(x) = n$.
2. **Résoudre** $E(x) = n$, pour $n \in \mathbb{Z}$: c'est $n \leq x < n + 1$, soit $x \in [n, n + 1[$.
3. **Tracer** la courbe de E : sur chaque $[n, n + 1[$, un segment horizontal à la hauteur n, un point plein à gauche, un point creux à droite.

À toi : Calculs de parties entières

(a) Calcule $E(5{,}99)$, $E(-0{,}01)$ et $E(-7)$. (b) Résous $E(x) = -1$. (c) Résous $E(x) < 3$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Pour chaque réel, cherche deux entiers consécutifs qui l'encadrent.
Indice 2
Pour (b), traduis $E(x) = -1$ par un encadrement de x.
Indice 3
Point délicat : pour (c), sépare deux cas, $x < 3$ et $x \geq 3$, et utilise la croissance de E.

Réponse
(a) $5 \leq 5{,}99 < 6$, donc $E(5{,}99) = 5$. De même, $-1 \leq -0{,}01 < 0$, donc $E(-0{,}01) = -1$. Enfin $-7 \in \mathbb{Z}$, donc $E(-7) = -7$.

(b) $E(x) = -1$ équivaut à $-1 \leq x < 0$: $S = [-1, 0[$.

(c) Si $x < 3$, alors $E(x) \leq x < 3$. Si $x \geq 3$, alors $E(x) \geq E(3) = 3$. Donc $S =]-\infty, 3[$.

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir : quelle méthode pour quelle question

- « f est majorée sur I » : soit $x \in I$; encadre $f(x)$ par un réel M qui ne dépend pas de x.
- « T est une période » : $x + T$ et $x - T$ sont dans D_f, et $f(x + T) = f(x)$. « Non périodique » : par l'absurde.
- « Position de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ » : signe de $f(x) - g(x)$.
- « Sens de variation » : signe du taux $T(x, y)$, parité, ou composée.
- « Extremum » : tableau de variations, ou signe de $f(x) - f(a)$. Donne la valeur et le point.
- « Axe d'équation $x = a$ » ou « centre $\Omega(a, b)$ » : $2a - x \in D_f$, puis calcul de $f(2a - x)$.
- « $E(x) = n$ » : $n \leq x < n + 1$.

Le mot du prof. Tu sais maintenant justifier ce qu'une courbe suggère : une borne, une période, un sens de variation, un extremum, une symétrie. Ces outils reviennent dans les chapitres suivants.

Garde l'habitude de tout écrire : « Soit… », le majorant avant la variable, le raisonnement annoncé.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Généralités sur les fonctions numériques » (1bac · sciences-mathematiques · mathematiques)