BURHAN

Résumé : Étude et représentation des fonctions

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/etude-et-representation-des-fonctions/resume

Chapitre	Semestre
Étude et représentation des fonctions	Semestre 2

Asymptotes verticales et horizontales

Définition : Asymptote verticale

Soit f une fonction, $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère, et a un réel. Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ quand x tend vers a à droite, ou quand x tend vers a à gauche, on dit que la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à $\mathcal{C}_f$.

Définition : Asymptote horizontale

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]c, +\infty[$, et b un réel. Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$, on dit que la droite d'équation $y = b$ est une **asymptote horizontale** à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

De même au voisinage de $-\infty$, pour une fonction définie sur un intervalle $]-\infty, c[$.

À retenir : Où chercher

Une asymptote verticale vient d'une limite infinie en un réel : on la cherche aux valeurs interdites, à droite et à gauche.

Une asymptote horizontale vient d'une limite **finie** en $+\infty$ ou en $-\infty$. Pour une fonction rationnelle, cette limite est celle du quotient des termes de plus haut degré.

Exemple

Énoncé. Cherche les asymptotes de la courbe de $f : x \mapsto \dfrac{4 - x}{x + 3}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

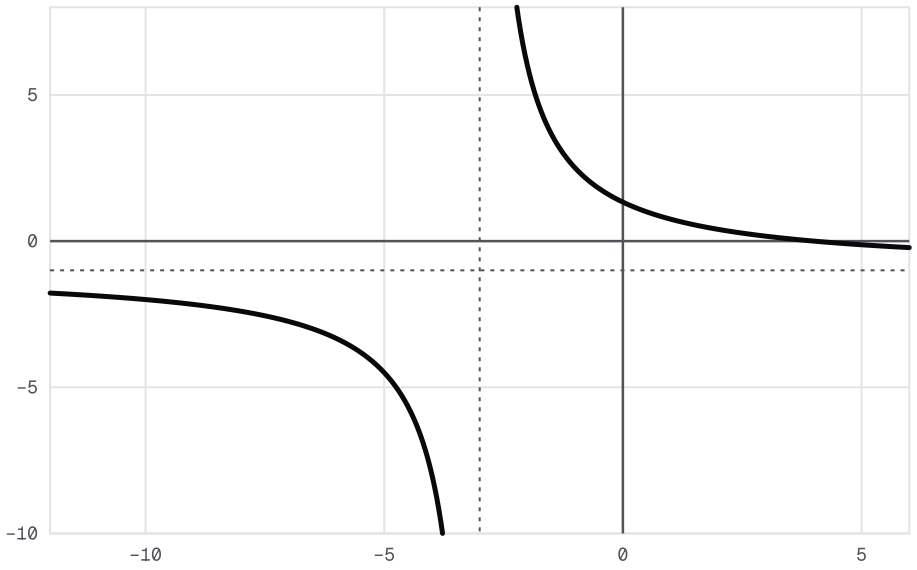
En -3. Le numérateur tend vers 7. Le dénominateur tend vers 0, positif à droite et négatif à gauche. Par quotient :

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = -\infty.$$

La droite d'équation $x = -3$ est donc une asymptote verticale.

À l'infini. On garde les termes de plus haut degré : $f(x)$ a même limite que $\dfrac{-x}{x}$, c'est-à-dire -1. La droite d'équation $y = -1$ est asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$.



$y = \dfrac{4-x}{x+3}$ $x = -3$ $y = -1$ Point du graphe

Courbe de x ↦ (4 − x)/(x + 3) et ses asymptotes : verticale d'équation x = −3, horizontale d'équation y = −1, en +∞ comme en −∞.

Attention : Une asymptote peut être coupée

Une courbe peut rencontrer son asymptote. Pour $x \mapsto \dfrac{x^2+x}{x^2+1}$, la limite en $+\infty$ vaut 1 : la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale.

Or l'écart avec 1 vaut $\dfrac{x-1}{x^2+1}$, nul en 1. La courbe coupe donc son asymptote au point $(1, 1)$.

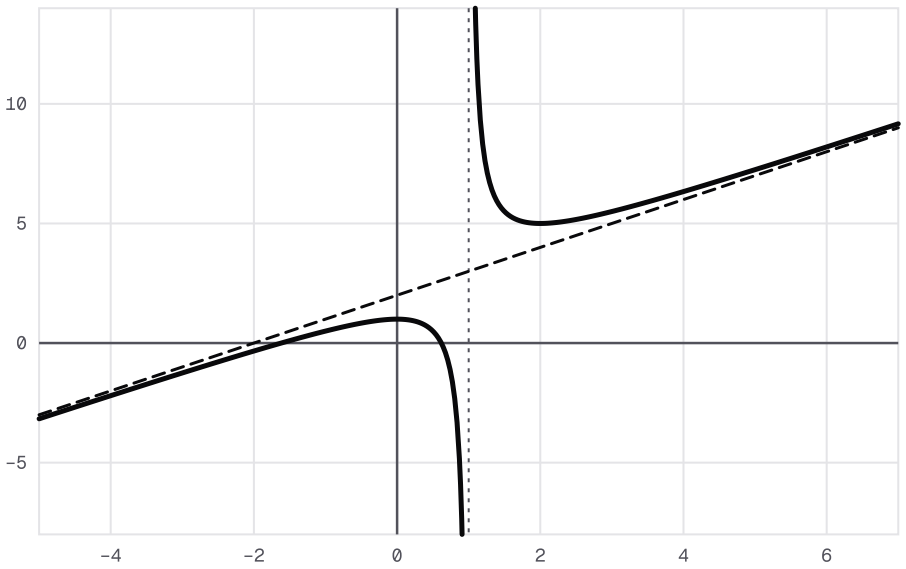
Asymptote oblique

Définition : Asymptote oblique

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]c, +\infty[$, et a, b deux réels, avec $a \neq 0$. On dit que la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est une **asymptote oblique** à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ si :

$$\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - (ax+b)\big) = 0.$$

De même au voisinage de $-\infty$, pour une fonction définie sur un intervalle $]-\infty, c[$.



$y = \dfrac{x^2 + x - 1}{x - 1}$ $y = x + 2$ $x = 1$ Point du graphe

Asymptote oblique en +∞ et en −∞ : pour f : x ↦ (x² + x − 1)/(x − 1), l'écart vertical f(x) − (x + 2) tend vers 0, et la courbe se rapproche de la droite d'équation y = x + 2.

Propriété : Caractérisation d'une asymptote oblique

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]c, +\infty[$, et a, b deux réels, avec $a \neq 0$. La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ si et seulement si :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$$

et

$$\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - ax\big) = b.$$

De même au voisinage de $-\infty$.

Méthode : montrer qu'une droite est asymptote oblique

1. **Forme** l'écart $f(x) - (ax + b)$ avec la droite proposée.
2. **Simplifie-le** : même dénominateur, factorisation, ou quantité conjuguée devant une racine carrée.
3. **Calcule** sa limite en $+\infty$ ou en $-\infty$, en nommant la règle. Une limite nulle donne l'asymptote.
4. **Fonction rationnelle** dont le numérateur a un degré de plus : écris $f(x) = ax + b + r(x)$, avec $r(x)$ de limite nulle. Trouve a et b par identification des coefficients.

Exemple

Énoncé. Soit $f : x \mapsto \dfrac{2x^2 - x + 1}{x + 1}$, définie pour $x \neq -1$. Cherche une asymptote oblique.

Écriture. On vérifie que $(x + 1)(2x - 3) + 4 = 2x^2 - x + 1$. Donc, pour $x \neq -1$:

$$f(x) = 2x - 3 + \frac{4}{x + 1}.$$

Limite. Par quotient, $\dfrac{4}{x + 1}$ tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$. La droite d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote oblique des deux côtés.

Attention : Le quotient par x ne suffit pas

Pour $x \mapsto 2x + \sqrt{x + 1}$, le quotient par x tend vers 2 en $+\infty$. Pourtant, l'écart avec $2x$ vaut $\sqrt{x + 1}$, qui tend vers $+\infty$.

Il n'y a pas d'asymptote oblique, mais une branche parabolique dirigée par la droite d'équation $y = 2x$. Calcule toujours la seconde limite.

Branches paraboliques ; arbre de décision

Définition : Branches paraboliques ; directions asymptotiques

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]c, +\infty[$, telle que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$.

- Si $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ ou $-\infty$, $\mathcal{C}_f$ admet au voisinage de $+\infty$ une **branche parabolique de direction l'axe des ordonnées**.
- Si $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, $\mathcal{C}_f$ admet une **branche parabolique de direction l'axe des abscisses**.
- Si $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$, avec a réel non nul, et si $\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - ax\big) = +\infty$ ou $-\infty$, $\mathcal{C}_f$ admet une **branche parabolique de direction la droite** d'équation $y = ax$.

La droite qui donne cette direction est la **direction asymptotique** de la branche. De même au voisinage de $-\infty$.

Méthode : Branches infinies : arbre de décision

1. **Calcule** les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, en nommant les opérations.
2. **En un réel** a, une limite infinie donne l'asymptote verticale $x = a$.
3. **En** $+\infty$ **ou en** $-\infty$, une limite réelle b donne l'asymptote horizontale $y = b$.
4. **Limite infinie** : calcule la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$. Infinie, branche parabolique de direction l'axe des ordonnées. Nulle, de direction l'axe des abscisses.

5. **Si $\frac{f(x)}{x}$ tend vers un réel a non nul**, calcule la limite de $f(x) - ax$. Un réel b donne l'asymptote oblique $y = ax + b$. Une limite infinie donne une branche parabolique de direction $y = ax$.

Exemple

Énoncé. Étudie la branche infinie en $+\infty$ de la courbe de $x \mapsto x^2 + 5x$.

Limites. Par la limite d'un polynôme à l'infini, $x^2 + 5x$ tend vers $+\infty$. Le quotient par x vaut $x + 5$, qui tend aussi vers $+\infty$.

Conclusion. La courbe admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

Attention : Un quotient nul n'est pas une asymptote horizontale

Pour $x \mapsto \sqrt{2x - 1}$, le quotient par x tend vers 0 en $+\infty$. Mais la fonction elle-même tend vers $+\infty$: il n'y a pas d'asymptote horizontale.

Au loin, la courbe s'aplatit sans se stabiliser : c'est une branche parabolique, dirigée par l'axe des abscisses. Une asymptote horizontale demande une limite finie de $f(x)$.

Asymptotes de x ↦ √(ax² + bx + c)

Propriété : Asymptotes de la courbe de x ↦ √(ax² + bx + c)

Soit a, b, c trois réels, avec $a > 0$, et $f : x \mapsto \sqrt{ax^2 + bx + c}$. Alors $\mathcal{C}_f$ admet :

- au voisinage de $+\infty$, l'asymptote oblique d'équation $y = \sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right)$;
- au voisinage de $-\infty$, l'asymptote oblique d'équation $y = -\sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right)$.

Exemple

Énoncé. Donne les asymptotes de la courbe de $x \mapsto \sqrt{x^2 + 6x + 10}$.

Lecture. Ici $a = 1$, $b = 6$ et $c = 10$, donc $\frac{b}{2a} = 3$. La propriété donne l'asymptote $y = x + 3$ en $+\infty$, et l'asymptote $y = -x - 3$ en $-\infty$.

Contrôle. On a $x^2 + 6x + 10 = (x + 3)^2 + 1$: la courbe ressemble au loin à celle de $x \mapsto |x + 3|$.

Attention : La racine de x² vaut |x|

Pour $x < 0$, on a $\sqrt{x^2} = -x$, et non x. Ainsi, pour $x < 0$:

$$\sqrt{9x^2 + 2} = -3x\sqrt{1 + \frac{2}{9x^2}}.$$

La courbe de $x \mapsto \sqrt{9x^2+2}$ admet l'asymptote $y = 3x$ en $+\infty$, mais $y = -3x$ en $-\infty$.

À retenir : Retrouver l'asymptote

Pour retrouver l'asymptote sans la propriété, forme l'écart avec la droite, puis multiplie-le par la quantité conjuguée.

Avec la bonne droite, $y = \sqrt{a}\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)$ en $+\infty$, le numérateur est une **constante**. Le dénominateur tend vers $+\infty$, donc l'écart tend vers 0.

Si le numérateur garde un terme en x, la droite choisie n'est pas l'asymptote.

Position relative d'une courbe et d'une droite

Définition : Position relative d'une courbe et d'une droite

Soit f une fonction, I un intervalle inclus dans D_f, et (D) la droite d'équation $y = mx + p$. On pose $d(x) = f(x) - (mx + p)$ pour $x \in I$.

- Si $d(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de (D) sur I ; si $d(x) > 0$ pour tout $x \in I$, elle est **strictement au-dessus**.
- Si $d(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$, $\mathcal{C}_f$ est **au-dessous** de (D) sur I ; si $d(x) < 0$, **strictement au-dessous**.
- Si $d(x_0) = 0$, le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x_0 est un **point d'intersection** de $\mathcal{C}_f$ et de (D).

Méthode : position relative

1. **Forme** l'écart $f(x) - (mx + p)$ sur l'ensemble de définition.
2. **Étudie son signe** : factorise, puis dresse un tableau de signes.
3. **Conclus** sur chaque intervalle. Un écart strictement positif place la courbe strictement au-dessus ; strictement négatif, strictement au-dessous. Un écart nul en x_0 donne un point d'intersection.
4. **Pour une tangente** T_a, l'écart est $f(x) - (f'(a)(x-a) + f(a))$. Son signe se lit aussi sur la concavité. En un point d'inflexion, la courbe est de part et d'autre de sa tangente, au sens large.

Exemple

Énoncé. On reprend $f : x \mapsto 2x - 3 + \dfrac{4}{x+1}$, définie pour $x \neq -1$. Place sa courbe par rapport à l'asymptote d'équation $y = 2x - 3$.

Écart. Pour $x \neq -1$, il vaut $\dfrac{4}{x+1}$, du signe de $x + 1$.

Conclusion. La courbe est strictement au-dessus de l'asymptote sur $]-1, +\infty[$, et strictement au-dessous sur $]-\infty, -1[$. Elles n'ont aucun point commun.

Dérivée seconde et concavité

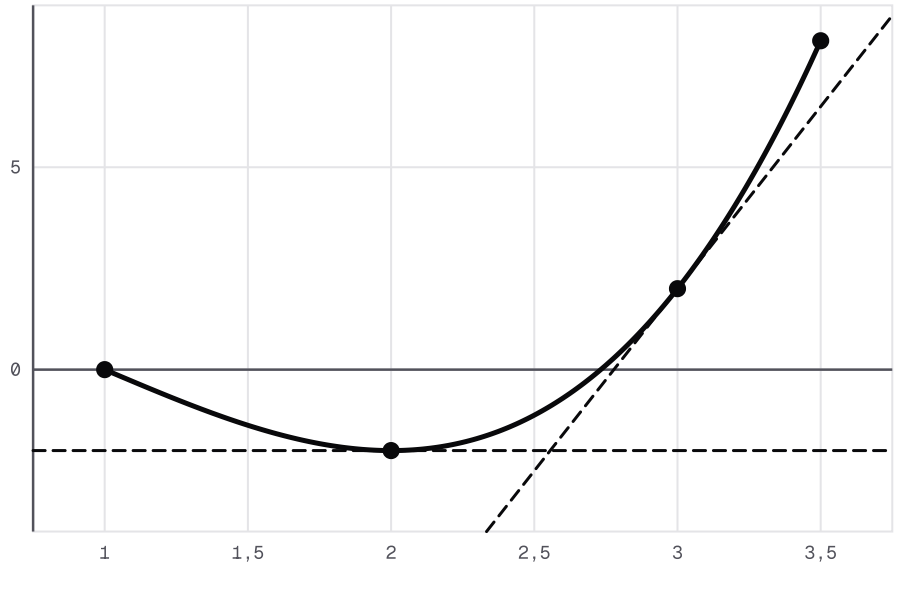
Définition : Dérivée seconde

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si sa fonction dérivée f' est elle-même dérivable sur I, on dit que f est **deux fois dérivable** sur I. La dérivée de f' est la **dérivée seconde** de f ; on la note f''.

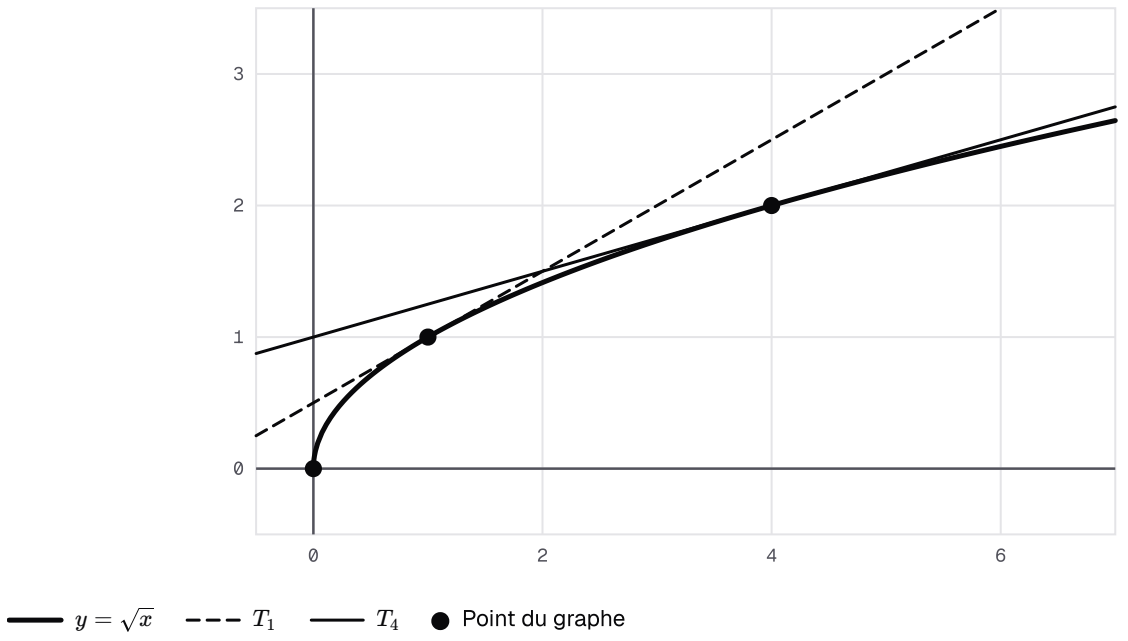
Définition : Courbe convexe, courbe concave

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert J, et I un intervalle inclus dans J. Pour $a \in I$, on note T_a la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a, d'équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

- $\mathcal{C}_f$ est **convexe** sur I si elle est au-dessus de chacune de ses tangentes T_a, $a \in I$, sur I : pour tous a et x de I, $f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a)$.
- $\mathcal{C}_f$ est **concave** sur I si elle est au-dessous de chacune de ses tangentes T_a, $a \in I$, sur I : pour tous a et x de I, $f(x) \leq f'(a)(x-a) + f(a)$.



Courbe convexe : sur [1, 7/2], la courbe de x ↦ x³ − 3x² + 2 reste au-dessus de ses tangentes, ici y = −2 au point (2, −2) et y = 9x − 25 au point (3, 2).



Courbe concave : la courbe de la racine carrée reste au-dessous de ses tangentes, ici y = x/2 + 1/2 au point (1, 1) et y = x/4 + 1 au point (4, 2).

À retenir : Lire la concavité

Une courbe convexe reste au-dessus de ses tangentes. Une courbe concave reste au-dessous de ses tangentes. Convexe et concave se disent de la courbe, sur un intervalle.

Théorème : Concavité et signe de la dérivée seconde

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert J, et I un intervalle inclus dans J.

1. Si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors $\mathcal{C}_f$ est convexe sur I.
2. Si $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$, alors $\mathcal{C}_f$ est concave sur I.

Remarque

Sa preuve utilise un résultat que tu as admis : le théorème du signe de la dérivée, vu dans « Dérivabilité ».

Exemple

Énoncé. Étudie la concavité de la courbe de $f : x \mapsto x^4 - 6x^2$.

Dérivées. Ce polynôme est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Par les propriétés de la somme et des puissances, pour tout réel x :

$$f'(x) = 4x^3 - 12x,$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 12x^2 - 12 \\ &= 12(x-1)(x+1). \end{aligned}$$

Signe. Ce trinôme est positif à l'extérieur de ses racines, négatif entre elles. La courbe est convexe sur $]-\infty, -1]$ et sur $[1, +\infty[$, concave sur $[-1, 1]$.

Points d'inflexion

Définition : Point d'inflexion

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, $a \in I$, et $A\big(a, f(a)\big)$ le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a. On dit que A est un **point d'inflexion** de $\mathcal{C}_f$ s'il existe un réel $r > 0$, avec $]a-r, a+r[\subset I$, tel que :

- $\mathcal{C}_f$ soit convexe sur $]a-r, a]$ et concave sur $[a, a+r[$,
- ou $\mathcal{C}_f$ soit concave sur $]a-r, a]$ et convexe sur $[a, a+r[$.

En un point d'inflexion, la courbe **change de concavité**.

Propriété : Dérivée seconde qui s'annule en changeant de signe

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I, $a \in I$, et $r > 0$ tel que $]a-r, a+r[\subset I$. Si $f''(a) = 0$ et si :

- $f''(x) > 0$ pour $x \in]a-r, a[$ et $f''(x) < 0$ pour $x \in]a, a+r[$,
- ou $f''(x) < 0$ pour $x \in]a-r, a[$ et $f''(x) > 0$ pour $x \in]a, a+r[$,

alors le point $A\big(a, f(a)\big)$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

Propriété : La courbe traverse sa tangente en un point d'inflexion

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, et $a \in I$. Si $A\big(a, f(a)\big)$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$, alors il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{C}_f$ soit au-dessus de sa tangente T_a sur $]a-r, a]$ et au-dessous sur $[a, a+r[$, ou l'inverse : de part et d'autre de A, la courbe est de part et d'autre de sa tangente, au sens large.

Propriété : Dérivée seconde de signe strict : aucun point d'inflexion

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert K. Si $f''(x) > 0$ pour tout $x \in K$, ou si $f''(x) < 0$ pour tout $x \in K$, alors aucun point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse appartenant à K n'est un point d'inflexion.

Méthode : concavité et points d'inflexion

1. **Vérifie** que f est deux fois dérivable sur chaque intervalle ouvert étudié.
2. **Calcule** $f''(x)$ et factorise-la.
3. **Étudie son signe** : convexe là où $f'' \geq 0$, concave là où $f'' \leq 0$.
4. **Repère** les réels a de l'ensemble de définition où f'' s'annule en changeant de signe. Le point $A\big(a, f(a)\big)$ est un point d'inflexion. Sur un intervalle ouvert où f'' garde un signe strict, il n'y en a aucun.
5. **Écris** la tangente en A si on la demande : de part et d'autre de A, la courbe est de part et d'autre de cette tangente, au sens large.

Exemple

Énoncé. Pour $f : x \mapsto x^4 - 6x^2$, trouve les points d'inflexion, puis la tangente au point d'abscisse 1.

Points. D'après la section précédente, f'' s'annule en -1 et en 1 en changeant de signe. Comme $f(-1) = f(1) = -5$, les points $(-1, -5)$ et $(1, -5)$ sont des points d'inflexion.

Sur $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$ et $]1, +\infty[$, le signe de f'' est strict. La propriété du signe strict de la dérivée seconde exclut donc tout autre point d'inflexion.

Tangente. On a $f'(1) = 4 - 12 = -8$, d'où $T_1 : y = -8x + 3$. Pour tout réel x, l'écart vaut :

$$\begin{aligned} &x^4 - 6x^2 + 8x - 3 \\ &= (x-1)^3(x+3). \end{aligned}$$

Près de 1, il change de signe : la courbe traverse T_1.

Attention : Une dérivée seconde nulle ne suffit pas

Pour $x \mapsto (x+1)^4$, la dérivée seconde vaut $12(x+1)^2$. Elle s'annule en -1, mais reste positive des deux côtés.

Pour $x \neq -1$, la courbe est strictement au-dessus de sa tangente $y = 0$, des deux côtés de -1. Par la propriété de la tangente en un point d'inflexion, le point $(-1, 0)$ n'en est pas un. Il faut un changement de signe de f''.

Attention : Pas d'inflexion en une valeur interdite

Pour $x \mapsto \dfrac{2}{x-1}$, la dérivée seconde vaut $\dfrac{4}{(x-1)^3}$. Elle change de signe en 1.

Pourtant, la courbe n'a aucun point d'abscisse 1, valeur interdite. Il n'y a donc pas de point d'inflexion d'abscisse 1 : un tel point appartient à la courbe.

Symétries et réduction du domaine d'étude

Remarque

Rappel du chapitre « Généralités sur les fonctions numériques » : la caractérisation d'un axe $x = a$ et celle d'un centre $\Omega(a, b)$.

On vérifie d'abord que $2a - x$ est dans D_f pour tout x de D_f. Puis on compare $f(2a - x)$ à $f(x)$, ou on calcule $f(2a - x) + f(x)$.

Propriété : Réduction du domaine d'étude

Soit f une fonction, $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, et Γ la partie de $\mathcal{C}_f$ formée des points d'abscisse $x \geq a$.

1. Si la droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$, alors $\mathcal{C}_f$ est la réunion de Γ et de son image par la symétrie d'axe cette droite.
2. Si $\Omega(a, b)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$, alors $\mathcal{C}_f$ est la réunion de Γ et de son image par la symétrie de centre Ω.
3. Si f est périodique de période $T > 0$ et si c est un réel, alors $\mathcal{C}_f$ est la réunion des images de sa partie d'abscisses dans $[c, c + T[$ par les translations de vecteur $kT\vec{i}$, où $k \in \mathbb{Z}$.

On étudie donc f sur $D_f \cap [a, +\infty[$ (cas 1 et 2), ou sur $D_f \cap [c, c + T[$ (cas 3).

Propriété : Symétrie et sens de variation

Soit f une fonction, a et b deux réels, I un intervalle inclus dans $D_f \cap [a, +\infty[$, et $I' = \{2a - x \,/\, x \in I\}$ l'intervalle symétrique de I par rapport à a.

- Si la droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$, alors f est croissante sur I si et seulement si f est décroissante sur I'.
- Si le point $\Omega(a, b)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$, alors f est croissante sur I si et seulement si f est croissante sur I'.

Les mêmes équivalences valent pour la monotonie stricte, et en échangeant « croissante » et « décroissante ».

Propriété : Symétrie et dérivée

Soit f une fonction dérivable sur son ensemble de définition D_f, réunion d'intervalles ouverts, et a, b deux réels.

- Si la droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$, alors $f'(2a - x) = -f'(x)$ pour tout $x \in D_f$.

- Si le point $\Omega(a, b)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$, alors $f'(2a - x) = f'(x)$ pour tout $x \in D_f$.

En particulier, la dérivée d'une fonction paire est impaire, et la dérivée d'une fonction impaire est paire.

Méthode : réduire le domaine d'étude

1. **Cherche** une parité, un axe ou un centre, que l'énoncé peut suggérer. Pour une fonction trigonométrique, cherche aussi une période T.
2. **Choisis** le domaine d'étude : $D_f \cap [a, +\infty[$, ou un intervalle de longueur T.
3. **Étudie** f sur ce domaine, puis **déduis** les variations sur la partie symétrique.
4. **Complète** la courbe par la symétrie, ou par les translations de vecteur $kT\,\vec{i}$.

Exemple

Axe. Soit $f : x \mapsto x^2(x-2)^2$, définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, remplacer x par $2 - x$ donne $(2-x)^2x^2$: même valeur. La droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie. On étudie sur $[1, +\infty[$, et le sens de variation s'inverse sur la partie symétrique.

Centre. Pour $x \mapsto \dfrac{x+3}{x+1} = 1 + \dfrac{2}{x+1}$ et $x \neq -1$, on a $-2 - x \neq -1$. La somme des valeurs en $-2 - x$ et en x vaut :

$$\begin{aligned} &1 + \frac{2}{-1-x} + 1 + \frac{2}{x+1} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Le point $\Omega(-1, 1)$ est un centre de symétrie : le sens de variation se conserve.

Exemple

Énoncé. Réduis le domaine d'étude de $g : x \mapsto \sin x + \sin(3x)$.

Période et parité. La fonction g est 2π-périodique et impaire : on se ramène à $[0, \pi]$.

Axe. Comme $\sin(\pi - x) = \sin x$ et $\sin(3\pi - 3x) = \sin(3x)$, on a $g(\pi - x) = g(x)$ pour tout réel x. La droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$ est un axe : l'étude sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ suffit.

Courbe d'une fonction polynôme de degré 3

Propriété : Courbe d'une fonction polynôme de degré 3

Soit $f : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$, où a, b, c, d sont des réels avec $a \neq 0$, et $x_0 = -\dfrac{b}{3a}$. Alors le point $\Omega\big(x_0, f(x_0)\big)$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$, et Ω est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

À retenir : Retrouver le centre

Le réel $x_0 = -\dfrac{b}{3a}$ est la racine de la dérivée seconde $x \mapsto 6ax + 2b$. Celle-ci change de signe en x_0. Retiens donc : centre de symétrie et point d'inflexion sont le même point.

Exemple

Énoncé. Donne le centre de symétrie de la courbe de $f : x \mapsto 2x^3 - 6x^2 + 1$.

Calcul. Ici $a = 2$ et $b = -6$, donc $x_0 = 1$, et $f(1) = 2 - 6 + 1 = -3$. Le point $\Omega(1, -3)$ est point d'inflexion et centre de symétrie.

Contrôle. En développant, $f(2 - x) + f(x) = -6$ pour tout réel x.

Plan d'étude et tracé

Méthode : Plan d'étude

1. **Domaine** : trouve D_f. Cherche ensuite une parité, un axe, un centre ou une période qui réduit l'étude.
2. **Comportement aux bornes** : calcule les limites, puis identifie les branches infinies. Place la courbe par rapport à ses asymptotes.
3. **Dérivée**, son signe, puis le tableau de variations ; demi-tangentes là où f n'est dérivable que d'un côté.
4. **Dérivée seconde** : concavité et points d'inflexion, si l'énoncé le demande.
5. **Points remarquables** : intersections avec les axes, extremums, tangentes utiles.
6. **Tracé** de la courbe.

Méthode : tracer une courbe

1. **Règle l'échelle** des deux axes d'après les extremums et les points à placer.
2. **Trace** d'abord les asymptotes. Indique la direction des branches paraboliques.
3. **Place** les points remarquables et leurs tangentes : horizontale en un extremum, tangente en un point d'inflexion.
4. **Trace** la courbe en suivant les variations, la concavité et la position par rapport aux asymptotes. Complète par symétrie si le domaine a été réduit.

À retenir : Un tableau complet

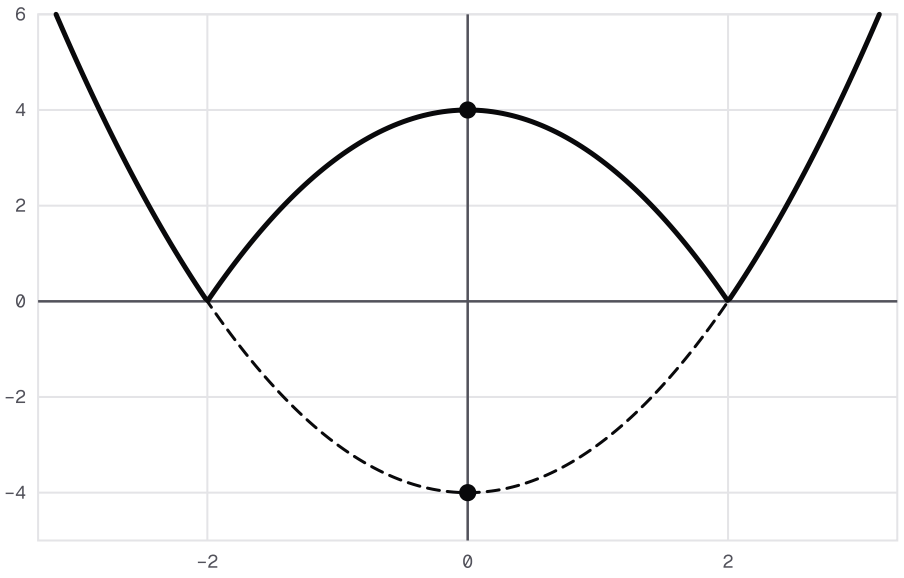
> Un tableau de variations complet porte les valeurs interdites, les limites aux bornes et les extremums. Chaque flèche suit le signe de f' sur un intervalle. Les branches infinies et les asymptotes s'écrivent à côté, avec leurs équations.

Valeur absolue et lectures graphiques

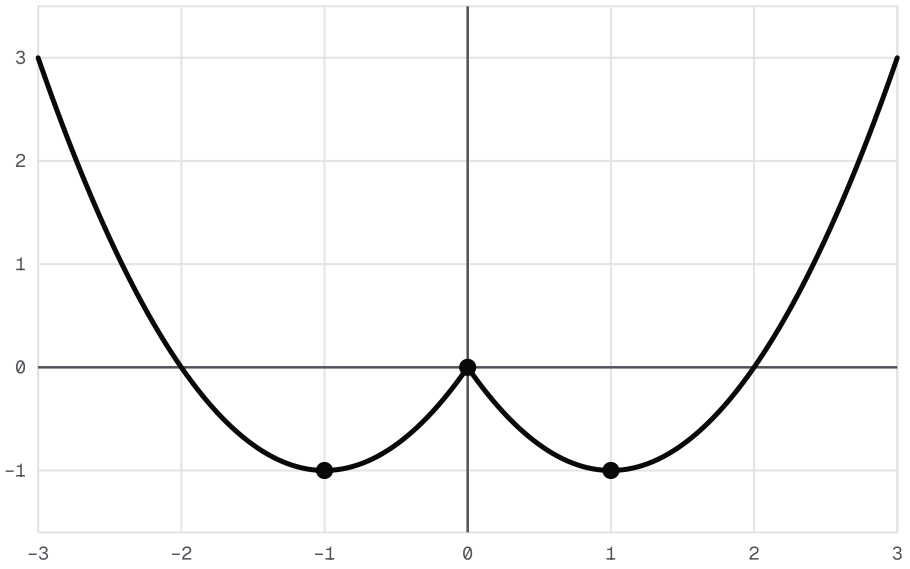
Propriété : Courbes obtenues avec la valeur absolue

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthogonal.

1. La courbe de $g : x \mapsto |f(x)|$ est formée des points de $\mathcal{C}_f$ d'ordonnée positive ou nulle, et des symétriques, par rapport à l'axe des abscisses, des points de $\mathcal{C}_f$ d'ordonnée strictement négative.
2. Soit $h : x \mapsto f(|x|)$, définie pour les réels x tels que $|x| \in D_f$. La fonction h est paire ; sa courbe est formée des points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse positive ou nulle, et de leurs symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.



Courbe de |f| pour f : x ↦ x² – 4 : les points de la courbe de f d'ordonnée négative sont remplacés par leurs symétriques par rapport à l'axe des abscisses.



Courbe de x ↦ f(|x|) pour f : x ↦ x² − 2x : on garde la partie d'abscisse positive ou nulle, puis on la reflète par rapport à l'axe des ordonnées ; la fonction obtenue est paire.

Méthode : exploiter une courbe

1. **Courbe de** $|f|$: garde la partie de $\mathcal{C}_f$ au-dessus de l'axe des abscisses. Remplace l'autre par sa symétrique par rapport à cet axe.
2. **Courbe de** $x \mapsto f(|x|)$: garde la partie d'abscisse positive ou nulle. Complète-la par sa symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
3. **Équation** $f(x) = m$: ses solutions sont les abscisses des points communs à $\mathcal{C}_f$ et à la droite $y = m$. Le nombre lu sur la courbe reste une **conjecture**. Si tu sais résoudre l'équation, ta résolution la confirme.

Exemple

Énoncé. Combien l'équation $|x^2 - 2x - 3| = 4$ a-t-elle de solutions ?

Lecture. La parabole d'équation $y = x^2 - 2x - 3$ a pour sommet $(1, -4)$. La courbe de la valeur absolue a donc un sommet $(1, 4)$. La droite d'équation $y = 4$ semble la couper en trois points : on conjecture trois solutions.

Calcul. L'équation équivaut à $x^2 - 2x - 3 = -4$ ou $x^2 - 2x - 3 = 4$. La première donne $(x - 1)^2 = 0$, soit $x = 1$. La seconde donne $x = 1 - 2\sqrt{2}$ ou $x = 1 + 2\sqrt{2}$.

Conclusion. La conjecture est confirmée : trois solutions.

Méthode : Quelle méthode pour quelle question

Lis la question, puis choisis ton outil.

Question posée	Outil à employer
asymptote verticale	limite infinie en une valeur interdite, à droite ou à gauche
asymptote horizontale	limite finie en $+\infty$ ou en $-\infty$
asymptote oblique donnée	limite nulle de $f(x) - (ax + b)$
branche infinie inconnue	limites de $\frac{f(x)}{x}$, puis de $f(x) - ax$
position relative	signe de l'écart $f(x) - (mx + p)$
concavité	signe de $f''(x)$ sur un intervalle
point d'inflexion	f'' s'annule en changeant de signe ; pas d'inflexion sur un intervalle ouvert où le signe de f'' est strict
réduire l'étude	$f(2a - x)$, parité, période
nombre de solutions de $f(x) = m$	lecture graphique, puis calcul si possible

À retenir : Rédiger en devoir

En devoir, nomme la règle de chaque limite : « par quotient », « par la limite d'une fraction rationnelle à l'infini ». Précise l'intervalle de chaque dérivée.

Cite le théorème du signe de la dérivée sur un intervalle. Pour un nombre de solutions lu sur la courbe, écris « on conjecture ».