BURHAN

Étude et représentation des fonctions : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/etude-et-representation-des-fonctions/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Étude et représentation des fonctions	Niveau examen	5

Exercice 1 7 pts

Problème : étude d'une fonction rationnelle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2},$$

et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. 0,75 pts

Calculer $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \to 0^-} f(x)$. Interpréter graphiquement.

INDICE

Outil : la limite du numérateur en 0, puis la règle du quotient. **Point délicat :** le signe de x^2, à droite comme à gauche de 0.

2. 1,25 pts

Montrer que, pour tout réel $x \neq 0$, $f(x) = x + \dfrac{4}{x^2}$. En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, puis que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$. Préciser la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (D).

INDICE

Outil : sépare la fraction en deux. L'écart avec (D) est alors immédiat.

3. 1 pts

Montrer que, pour tout réel $x \neq 0$:

$$f'(x) = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}.$$

INDICE

Outil : dérive l'écriture de la question 2 ; la dérivée de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ s'obtient par la propriété de l'inverse.

4. 1 pts

Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f.

INDICE

Outil : la forme canonique de $x^2 + 2x + 4$, pour montrer que ce facteur est strictement positif. **Point délicat :** le dénominateur x^3 a le signe de x ; il change de signe en 0.

5. 1 pts

Calculer $f''(x)$ pour $x \neq 0$. En déduire la concavité de $\mathcal{C}_f$. La courbe a-t-elle un point d'inflexion ?

INDICE

Outil : dérive $f'(x) = 1 - \dfrac{8}{x^3}$ par la propriété de l'inverse. **Point délicat :** pour les points d'inflexion, raisonne sur chacun des deux intervalles ouverts de l'ensemble de définition.

6. `0,75 pts`

Tracer (D) et $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : la méthode du tracé : les asymptotes d'abord, puis les points remarquables et leurs tangentes.
Point délicat : respecte la position de la courbe par rapport à (D).

7. `1,25 pts`

Soit m un réel. Conjecturer graphiquement, selon m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$. Confirmer par le calcul le cas $m = 3$.

INDICE

Outil : la droite $y = m$ et le tableau de variations ; compare m aux valeurs remarquables du tableau.
Point délicat : pour $m = 3$, ramène l'équation à un polynôme de degré 3 et cherche une racine parmi les abscisses déjà rencontrées.

Exercice 2 6 pts

Problème : étude d'une fonction irrationnelle

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2} - x,$$

et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1. 0,5 pts

Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$, et que, pour tout réel x :

$$\sqrt{x^2 + 2x + 2} > |x + 1|.$$

INDICE

Outil : la forme canonique de $x^2 + 2x + 2$.

2. 1 pts

Montrer que, pour tout réel $x > 0$:

$$f(x) = \frac{2x + 2}{\sqrt{x^2 + 2x + 2} + x}.$$

En déduire $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, une asymptote à $\mathcal{C}_f$, et la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à elle.

INDICE

Outil : la quantité conjuguée. Pour la limite, divise numérateur et dénominateur par x, avec $\sqrt{x^2} = x$ pour $x > 0$. **Point délicat :** pour la position, utilise la question 1.

3. 1,25 pts

Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = -2x - 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$, et que $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de (Δ).

INDICE

Outil : pour l'écart $f(x) + 2x + 1 = \sqrt{x^2 + 2x + 2} + (x + 1)$, multiplie par la quantité conjuguée $\sqrt{x^2 + 2x + 2} - (x + 1)$. **Point délicat :** cette quantité est strictement positive : c'est immédiat si $x + 1 < 0$, et la question 1 le donne si $x + 1 \geq 0$.

4. 1,25 pts

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{x + 1 - \sqrt{x^2 + 2x + 2}}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}.$$

En déduire le tableau de variations de f.

INDICE

Outil : la propriété de la racine carrée d'une fonction, avec $u : x \mapsto x^2 + 2x + 2$, strictement positive. Le signe du numérateur se lit sur la question 1.

5. 0,75 pts

On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout réel x, en notant $u(x) = x^2 + 2x + 2$:

$$f''(x) = \frac{1}{u(x)\sqrt{u(x)}},$$

et en déduire la concavité de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : écris $f'(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} - 1$ et dérive le quotient. **Point délicat :** $x^2 + 2x + 2 - (x+1)^2 = 1$.

6. 1,25 pts

Soit m un réel. Conjecturer, à l'aide de $\mathcal{C}_f$, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ selon les valeurs de m. Résoudre ensuite l'équation $f(x) = 2$ pour confirmer le cas $m = 2$.

INDICE

Outil : la droite $y = m$, le sens de variation de f et l'asymptote $y = 1$. **Point délicat :** pour $m = 2$, isole la racine carrée ; élever au carré demande une condition de signe.

Exercice 3 — 6 pts

Problème : étude d'une fonction trigonométrique

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\cos x}{2 - \sin x},$$

et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthogonal.

1. — 0,5 pts

Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est périodique de période 2π.

INDICE

Outil : l'encadrement $-1 \leq \sin x \leq 1$.

2. — 0,75 pts

Montrer que, pour tout réel x, $f(\pi - x) = -f(x)$. En déduire que le point $\Omega\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$; puis la caractérisation d'un centre, avec $2a - x = \pi - x$.

3. — 0,5 pts

Justifier qu'il suffit d'étudier f sur $I = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

INDICE

Outil : la méthode de réduction du domaine d'étude, avec un centre de symétrie et une période. **Point délicat :** cherche le symétrique de I par rapport à $\frac{\pi}{2}$, puis compare la longueur obtenue à la période.

4. — 1 pts

Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{1 - 2\sin x}{(2 - \sin x)^2}$.

INDICE

Outil : la propriété du quotient, puis $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

5. — 1 pts

Étudier le signe de $f'(x)$ sur I, puis dresser le tableau de variations de f sur I.

INDICE

Outil : sur I, le sinus est strictement décroissant, de 1 à -1, et vaut $\frac{1}{2}$ en $\frac{5\pi}{6}$.

6. 1,5 pts

En déduire le sens de variation de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, puis montrer que, pour tout réel x, $-\frac{\sqrt{3}}{3} \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$.

INDICE

Outil : un centre de symétrie conserve le sens de variation sur l'intervalle symétrique. Cherche les symétriques de $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]$ et de $\left[\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right]$ par rapport à $\frac{\pi}{2}$. **Point délicat :** l'encadrement s'obtient d'abord sur un intervalle de longueur une période.

7. 0,75 pts

Écrire une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point Ω.

INDICE

Outil : $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, avec la formule de la question 4.

Exercice 4 7 pts

Problème : étude d'une fonction polynôme de degré 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 8x,$$

et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. 0,75 pts

Montrer que, pour tout réel x :

$$f(x) = (x^2 - 2x)^2 \\ \quad - 4(x^2 - 2x).$$

En déduire que $f(2 - x) = f(x)$ pour tout réel x, puis que la droite (Δ) d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$. Justifier qu'il suffit d'étudier f sur $[1, +\infty[$.

INDICE

Outil : développe l'écriture proposée. **Point délicat :** pour la symétrie, calcule d'abord $(2 - x)^2 - 2(2 - x)$.

2. 0,5 pts

Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis les mêmes limites en $-\infty$. Interpréter graphiquement.

INDICE

Outil : mets x^4 en facteur dans $f(x)$, et x^3 dans $\dfrac{f(x)}{x}$.

3. 1,25 pts

Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = 4(x - 1)(x^2 - 2x - 2)$. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[1, +\infty[$, puis dresser le tableau de variations de f sur $[1, +\infty[$.

INDICE

Outil : dérive f terme à terme, puis développe la forme proposée. **Point délicat :** écris $x^2 - 2x - 2$ sous forme canonique pour trouver son signe quand $x \geq 1$.

4. 0,75 pts

En déduire le sens de variation de f sur $]-\infty, 1]$, puis dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f(x) \geq -4$ pour tout réel x.

INDICE

Outil : un axe de symétrie inverse le sens de variation sur l'intervalle symétrique. **Point délicat :** cherche les symétriques de $[1, 1 + \sqrt{3}]$ et de $\left[1 + \sqrt{3}, +\infty\right[$ par rapport à 1.

5. 1,25 pts

Calculer $f''(x)$. Étudier la concavité de $\mathcal{C}_f$, et montrer que $\mathcal{C}_f$ admet exactement deux points d'inflexion, que l'on précisera.

INDICE

Outil : dérive $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8$, puis factorise. **Point délicat :** pour exclure tout autre point d'inflexion, raisonne sur chacun des intervalles ouverts où f'' garde un signe strict.

6. 1,25 pts

Écrire une équation de la tangente T_0 à $\mathcal{C}_f$ en O. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) - 8x = x^3(x-4)$, et en déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T_0. En déduire aussi, par la symétrie d'axe (Δ), une équation de la tangente T_2 à $\mathcal{C}_f$ en A.

INDICE

Outil : $f'(0)$ par la question 3, puis le signe d'un produit. **Point délicat :** pour T_2, la propriété de la symétrie et de la dérivée relie $f'(2)$ à $f'(0)$.

7. 1,25 pts

Tracer (Δ), T_0, T_2 et $\mathcal{C}_f$. Soit m un réel : conjecturer graphiquement, selon m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$. Résoudre ensuite l'équation $f(x) = 5$ pour confirmer le cas $m = 5$.

INDICE

Outil : la droite $y = m$ et le tableau de variations de la question 4. **Point délicat :** pour $m = 5$, utilise l'écriture de la question 1 et une équation du second degré d'inconnue $X = x^2 - 2x$.

Exercice 5 — 7 pts

Problème : étude d'une fonction irrationnelle sur un intervalle borné

Soit f la fonction définie par $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. — 0,75 pts

Déterminer l'ensemble de définition D_f de f. Montrer que f est impaire, et en déduire qu'il suffit d'étudier f sur $[0, 2]$.

INDICE

Outil : le signe de $4 - x^2 = (2 - x)(2 + x)$. **Point délicat :** avant de comparer $f(-x)$ et $f(x)$, vérifie que $-x$ appartient à D_f dès que x y appartient.

2. — 1 pts

Montrer que, pour tout $x \in [0, 2[$:

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -\frac{x\sqrt{2 + x}}{\sqrt{2 - x}}.$$

En déduire que f n'est pas dérivable à gauche en 2, et interpréter graphiquement. Que peut-on dire au point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse -2 ?

INDICE

Outil : pour $x < 2$, $\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{2 - x}\,\sqrt{2 + x}$ et $x - 2 = -\left(\sqrt{2 - x}\right)^2$. **Point délicat :** le dénominateur $\sqrt{2 - x}$ tend vers 0 en restant strictement positif.

3. — 1,25 pts

Montrer que f est dérivable sur $]-2, 2[$ et que, pour tout $x \in]-2, 2[$:

$$f'(x) = \frac{2(2 - x^2)}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

Dresser le tableau de variations de f sur $[0, 2]$, puis en déduire celui de f sur $[-2, 2]$.

INDICE

Outil : la propriété de la racine carrée d'une fonction, avec $u : x \mapsto 4 - x^2$, strictement positive sur $]-2, 2[$, puis celle du produit. **Point délicat :** f n'est pas dérivable en 2 ; près de 2, compare $f(x)$ à $f(2)$ pour conclure sur un intervalle fermé.

4. 1,25 pts

On admet que f est deux fois dérivable sur $]-2,2[$. Montrer que, pour tout $x \in]-2,2[$:

$$f''(x) = \frac{2x(x^2-6)}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}.$$

En déduire la concavité de $\mathcal{C}_f$, et montrer que O est le seul point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : écris $f'(x) = \dfrac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$ et dérive le quotient, avec la dérivée de $x \mapsto \sqrt{4-x^2}$ trouvée à la question 3. **Point délicat :** sur $]-2,2[$, le facteur x^2-6 garde un signe constant.

5. 1 pts

Écrire une équation de la tangente T_0 à $\mathcal{C}_f$ en O. Soit (D) la droite d'équation $y = x$. Montrer que, pour tout $x \in [-2,2]$, $f(x) - x = x\left(\sqrt{4-x^2}-1\right)$, et en déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (D) ainsi que leurs points communs.

INDICE

Outil : $f'(0)$ par la question 3, puis le signe de chaque facteur. **Point délicat :** compare $\sqrt{4-x^2}$ à $1 = \sqrt{1}$, puis distingue le signe de x.

6. 0,5 pts

Tracer T_0, (D) et $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : la méthode du tracé : les points remarquables d'abord, avec leurs tangentes ou demi-tangentes. **Point délicat :** respecte la concavité de part et d'autre de O.

7. 1,25 pts

Soit m un réel. Conjecturer, à l'aide de $\mathcal{C}_f$, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ selon les valeurs de m. Résoudre ensuite l'équation $f(x) = \sqrt{3}$ pour confirmer le cas $m = \sqrt{3}$.

INDICE

Outil : la droite $y = m$ et le tableau de variations de la question 3. **Point délicat :** pour $m = \sqrt{3}$, cherche d'abord le signe des solutions ; élever au carré demande une condition de signe.