BURHAN

Étude et représentation des fonctions : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/etude-et-representation-des-fonctions/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Étude et représentation des fonctions	Niveau examen	5

Exercice 1 7 pts

Problème : étude d'une fonction rationnelle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2},$$

et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. 0,75 pts

Calculer $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \to 0^-} f(x)$. Interpréter graphiquement.

INDICE

Outil : la limite du numérateur en 0, puis la règle du quotient. **Point délicat :** le signe de x^2, à droite comme à gauche de 0.

CORRIGÉ

Quand x tend vers 0, le numérateur $x^3 + 4$ tend vers $4 > 0$, et le dénominateur x^2 tend vers 0 en restant strictement positif, à droite comme à gauche de 0. Par la règle de la limite d'un quotient :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty.$$

Conclusion. f tend vers $+\infty$ à droite et à gauche de 0 : l'axe des ordonnées, d'équation $x = 0$, est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

2. 1,25 pts

Montrer que, pour tout réel $x \neq 0$, $f(x) = x + \dfrac{4}{x^2}$. En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, puis que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$. Préciser la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (D).

INDICE

Outil : sépare la fraction en deux. L'écart avec (D) est alors immédiat.

CORRIGÉ

Écriture de $f(x)$. Soit $x \neq 0$:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2} + \frac{4}{x^2} = x + \frac{4}{x^2}.$$

Limites. Par quotient, $\dfrac{4}{x^2}$ tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$. Par somme, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Asymptote. L'écart $f(x) - x = \dfrac{4}{x^2}$ tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$, et le coefficient directeur 1 de (D) n'est pas nul : (D) est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ des deux côtés.

Position. L'écart $\dfrac{4}{x^2}$ est strictement positif pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Conclusion. f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers $-\infty$ en $-\infty$; (D) est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$; la courbe est strictement au-dessus de (D), et elles n'ont aucun point commun.

3. 1 pts

Montrer que, pour tout réel $x \neq 0$:

$$f'(x) = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}.$$

INDICE

Outil : dérive l'écriture de la question 2 ; la dérivée de $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ s'obtient par la propriété de l'inverse.

CORRIGÉ

Dérivabilité. D'après la question 2, f est la somme de $x \mapsto x$ et de $x \mapsto \frac{4}{x^2}$, dérivables sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Par la propriété de l'inverse, la dérivée de $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est $x \mapsto -\frac{2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}$.

Calcul. Par la propriété de la somme, pour tout $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + 4 \times \left(-\frac{2}{x^3}\right) \\ &= 1 - \frac{8}{x^3} = \frac{x^3 - 8}{x^3}. \end{aligned}$$

Factorisation du numérateur. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &(x-2)(x^2+2x+4) \\ &= x^3 + 2x^2 + 4x \\ &\quad - 2x^2 - 4x - 8 \\ &= x^3 - 8. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}$.

4. 1 pts

Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f.

INDICE

Outil : la forme canonique de x^2+2x+4, pour montrer que ce facteur est strictement positif. **Point délicat :** le dénominateur x^3 a le signe de x ; il change de signe en 0.

CORRIGÉ

Signe du second facteur. Pour tout réel x, $x^2+2x+4=(x+1)^2+3>0$. Le signe de $f'(x)$ est donc celui du quotient de $x-2$ par x^3, et x^3 a le signe de x :

- sur $]-\infty,0[$: $x-2<0$ et $x^3<0$, donc $f'(x)>0$;
- sur $]0,2[$: $x-2<0$ et $x^3>0$, donc $f'(x)<0$;
- sur $]2,+\infty[$: $x-2>0$ et $x^3>0$, donc $f'(x)>0$; enfin $f'(2)=0$.

Variations. Par le théorème du signe de la dérivée, appliqué sur chaque intervalle : f est strictement croissante sur $]-\infty,0[$, strictement décroissante sur $]0,2]$, strictement croissante sur $[2,+\infty[$.

Valeurs et limites. $f(2)=2+\dfrac{4}{4}=3$; les limites sont celles des questions 1 et 2.

Conclusion. Sur $]-\infty,0[$, f croît de $-\infty$ à $+\infty$. Sur $]0,+\infty[$, f décroît de $+\infty$ à $f(2)=3$, puis croît de 3 à $+\infty$.

5. 1 pts

Calculer $f''(x)$ pour $x\neq 0$. En déduire la concavité de $\mathcal{C}_f$. La courbe a-t-elle un point d'inflexion ?

INDICE

Outil : dérive $f'(x)=1-\dfrac{8}{x^3}$ par la propriété de l'inverse. **Point délicat :** pour les points d'inflexion, raisonne sur chacun des deux intervalles ouverts de l'ensemble de définition.

CORRIGÉ

Dérivée seconde. Pour $x\neq 0$, $f'(x)=1-\dfrac{8}{x^3}$. Par la propriété de l'inverse, sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$, la dérivée de $x\mapsto\dfrac{1}{x^3}$ est $x\mapsto-\dfrac{3x^2}{x^6}=-\dfrac{3}{x^4}$. Donc, pour tout $x\neq 0$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -8\times\left(-\frac{3}{x^4}\right)\\ &= \frac{24}{x^4}. \end{aligned}$$

Concavité. Pour tout $x\neq 0$, $f''(x)>0$. Par le théorème liant concavité et signe de la dérivée seconde, $\mathcal{C}_f$ est convexe sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$.

Point d'inflexion. Sur chacun des intervalles ouverts $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$, f'' garde un signe strict. D'après la propriété du signe strict de la dérivée seconde, appliquée à chacun d'eux, aucun point de $\mathcal{C}_f$ n'est un point d'inflexion.

Conclusion. Pour tout $x\neq 0$, $f''(x)=\dfrac{24}{x^4}$; $\mathcal{C}_f$ est convexe sur chacun des deux intervalles et n'a aucun point d'inflexion.

6. `0,75 pts`

Tracer (D) et $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : la méthode du tracé : les asymptotes d'abord, puis les points remarquables et leurs tangentes.
Point délicat : respecte la position de la courbe par rapport à (D).

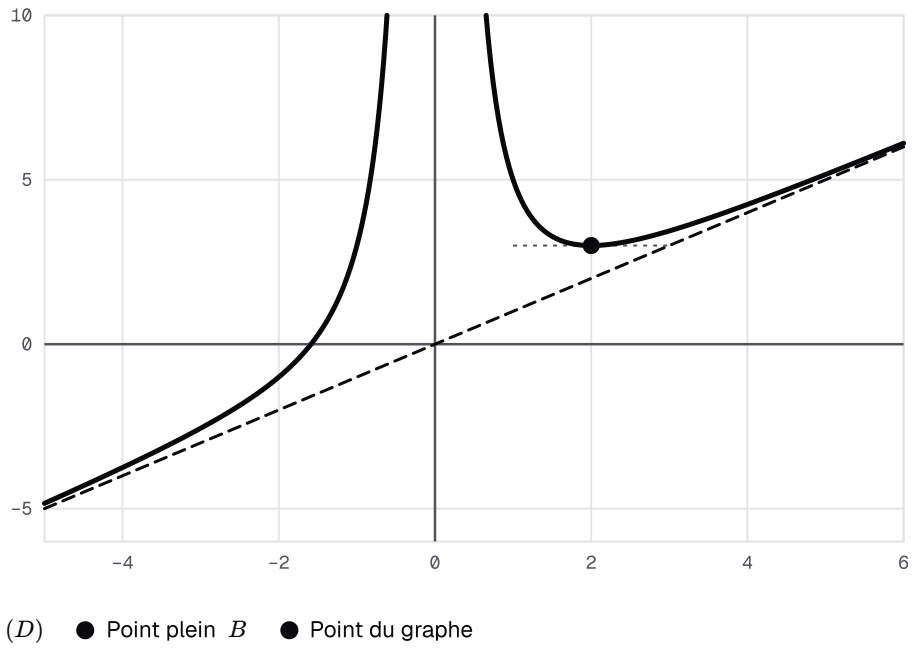
CORRIGÉ

Éléments du tracé.

- L'axe des ordonnées, asymptote verticale.
- La droite (D) : $y = x$, asymptote oblique, au-dessous de la courbe.
- Le point $B(2, 3)$, où la tangente est horizontale car $f'(2) = 0$.

Allure. Sur $]0, +\infty[$, la courbe descend depuis le haut de l'axe des ordonnées jusqu'à B, puis remonte en s'approchant de (D) par-dessus. Sur $]-\infty, 0[$, elle monte en restant au-dessus de (D), et part vers le haut le long de l'axe des ordonnées.

Conclusion. $\mathcal{C}_f$ est formée de deux branches, toutes deux au-dessus de (D) et tournées vers le haut (convexes) ; le point le plus bas de la branche de droite est $B(2, 3)$.



Tracé de (D) : y = x et de la courbe de f : x ↦ (x³ + 4)/x², avec l'axe des ordonnées pour asymptote verticale et le point B(2, 3) où la tangente est horizontale.

7. 1,25 pts

Soit m un réel. Conjecturer graphiquement, selon m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$. Confirmer par le calcul le cas $m = 3$.

INDICE

Outil : la droite $y = m$ et le tableau de variations ; compare m aux valeurs remarquables du tableau.
Point délicat : pour $m = 3$, ramène l'équation à un polynôme de degré 3 et cherche une racine parmi les abscisses déjà rencontrées.

CORRIGÉ

Conjecture. Sur $]-\infty, 0[$, f croît de $-\infty$ à $+\infty$: la droite $y = m$ semble couper cette branche une fois, quel que soit m. Sur $]0, +\infty[$, f a pour minimum 3 : la droite semble ne pas couper cette branche si $m < 3$, la toucher en B si $m = 3$, la couper deux fois si $m > 3$. On conjecture donc :

- une solution si $m < 3$;
- deux solutions si $m = 3$;
- trois solutions si $m > 3$.

Calcul pour $m = 3$. Soit $x \neq 0$. En multipliant par $x^2 \neq 0$:

$$\begin{aligned} & f(x) = 3 \\ \Leftrightarrow\ & x^3 + 4 = 3x^2 \\ \Leftrightarrow\ & x^3 - 3x^2 + 4 = 0. \end{aligned}$$

On vérifie en développant que, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & (x+1)(x-2)^2 \\ &= (x+1)(x^2 - 4x + 4) \\ &= x^3 - 3x^2 + 4. \end{aligned}$$

Ce produit est nul si et seulement si $x = -1$ ou $x = 2$, deux réels non nuls.

Conclusion. Les solutions de l'équation $f(x) = 3$ sont exactement -1 et 2 : il y en a deux, et la conjecture est confirmée pour $m = 3$.

Exercice 2 6 pts

Problème : étude d'une fonction irrationnelle

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2} - x,$$

et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1. 0,5 pts

Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$, et que, pour tout réel x :

$$\sqrt{x^2 + 2x + 2} > |x + 1|.$$

INDICE

Outil : la forme canonique de $x^2 + 2x + 2$.

CORRIGÉ

Ensemble de définition. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 2 &= (x+1)^2 + 1 \\ &\geq 1 > 0. \end{aligned}$$

La racine carrée $\sqrt{x^2 + 2x + 2}$ existe pour tout réel x : f est définie sur $\mathbb{R}$.

Inégalité. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $(x+1)^2 + 1 > (x+1)^2 = |x+1|^2$, deux réels positifs. La racine carrée étant strictement croissante sur $[0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 2x + 2} &> \sqrt{|x+1|^2} \\ &= |x+1|. \end{aligned}$$

Conclusion. f est définie sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $\sqrt{x^2 + 2x + 2} > |x + 1|$.

2. 1 pts

Montrer que, pour tout réel $x > 0$:

$$f(x) = \frac{2x + 2}{\sqrt{x^2 + 2x + 2} + x}.$$

En déduire $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, une asymptote à $\mathcal{C}_f$, et la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à elle.

INDICE

Outil : la quantité conjuguée. Pour la limite, divise numérateur et dénominateur par x, avec $\sqrt{x^2} = x$ pour $x > 0$. **Point délicat :** pour la position, utilise la question 1.

CORRIGÉ

Quantité conjuguée. Soit $x > 0$; alors $\sqrt{x^2 + 2x + 2} + x > 0$. On multiplie et on divise par cette quantité :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x^2 + 2x + 2) - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 2} + x} \\ &= \frac{2x + 2}{\sqrt{x^2 + 2x + 2} + x}. \end{aligned}$$

Limite en $+\infty$. Pour $x > 0$, $\sqrt{x^2} = x$, donc $\sqrt{x^2 + 2x + 2} = x\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}$. En divisant numérateur et dénominateur par x :

$$f(x) = \frac{2 + \dfrac{2}{x}}{\sqrt{1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{x^2}} + 1}.$$

En $+\infty$, $\frac{2}{x}$ et $\frac{2}{x^2}$ tendent vers 0. Par somme, par la racine carrée d'une fonction et par quotient, $f(x)$ tend vers $\frac{2}{1 + 1} = 1$.

Position. Pour tout réel x, $f(x) - 1 = \sqrt{x^2 + 2x + 2} - (x + 1)$. D'après la question 1, $\sqrt{x^2 + 2x + 2} > |x + 1| \geq x + 1$: cet écart est strictement positif.

Conclusion. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$; la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$, et $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de cette asymptote.

3. 1,25 pts

Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=-2x-1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$, et que $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de (Δ).

INDICE

Outil : pour l'écart $f(x)+2x+1=\sqrt{x^2+2x+2}+(x+1)$, multiplie par la quantité conjuguée $\sqrt{x^2+2x+2}-(x+1)$. **Point délicat :** cette quantité est strictement positive : c'est immédiat si $x+1<0$, et la question 1 le donne si $x+1\geq 0$.

CORRIGÉ

Limite en $-\infty$. En $-\infty$, x^2+2x+2 tend vers $+\infty$ (limite d'un polynôme), donc $\sqrt{x^2+2x+2}$ aussi (racine carrée d'une fonction) ; $-x$ tend aussi vers $+\infty$. Par somme, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

Écart. Pour tout réel x, $f(x)-(-2x-1)=\sqrt{x^2+2x+2}+(x+1)$. D'après la question 1, la quantité conjuguée $\sqrt{x^2+2x+2}-(x+1)$ est strictement positive, car $\sqrt{x^2+2x+2}>|x+1|\geq x+1$. On multiplie et on divise par elle :

$$\begin{aligned} &f(x)+2x+1\\ &=\frac{(x^2+2x+2)-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x+2}-x-1}\\ &=\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}-x-1}. \end{aligned}$$

Limite de l'écart. En $-\infty$, $\sqrt{x^2+2x+2}$ et $-x-1$ tendent vers $+\infty$: par somme, le dénominateur tend vers $+\infty$; par quotient, l'écart tend vers 0.

Position. L'écart est l'inverse d'un réel strictement positif : il est strictement positif.

Conclusion. $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$; la droite (Δ) d'équation $y=-2x-1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$, et $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de (Δ).

4. 1,25 pts

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{x+1-\sqrt{x^2+2x+2}}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

En déduire le tableau de variations de f.

INDICE

Outil : la propriété de la racine carrée d'une fonction, avec $u : x \mapsto x^2+2x+2$, strictement positive. Le signe du numérateur se lit sur la question 1.

CORRIGÉ

Dérivabilité. La fonction $u : x \mapsto x^2+2x+2$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, avec $u'(x) = 2x+2$. Par la propriété de $\sqrt{u}$, la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$. Par la propriété de la somme, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Calcul. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+2}} - 1 \\ &= \frac{x+1-\sqrt{x^2+2x+2}}{\sqrt{x^2+2x+2}}. \end{aligned}$$

Signe. D'après la question 1, $x+1 \leq |x+1| < \sqrt{x^2+2x+2}$: le numérateur est strictement négatif, le dénominateur strictement positif. Donc $f'(x) < 0$ pour tout réel x.

Variations. Par le théorème du signe de la dérivée, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Ses limites sont $+\infty$ en $-\infty$ (question 3) et 1 en $+\infty$ (question 2).

Conclusion. f est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec la dérivée annoncée, et décroît strictement de $+\infty$ (en $-\infty$) vers 1 (en $+\infty$).

5. `0,75 pts`

On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout réel x, en notant $u(x) = x^2 + 2x + 2$:

$$f''(x) = \frac{1}{u(x)\sqrt{u(x)}},$$

et en déduire la concavité de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : écris $f'(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} - 1$ et dérive le quotient. **Point délicat :** $x^2 + 2x + 2 - (x+1)^2 = 1$.

CORRIGÉ

Écriture de $f'(x)$. Notons $u(x) = x^2 + 2x + 2$. Pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{u(x)}} - 1$, et, d'après la question 4, $\left(\sqrt{u}\right)'(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{u(x)}}$.

Dérivée du quotient. Par la propriété du quotient, pour tout réel x, $f''(x) = \dfrac{N(x)}{u(x)}$, avec :

$$\begin{aligned} N(x) &= \sqrt{u(x)} - \frac{(x+1)^2}{\sqrt{u(x)}} \\ &= \frac{u(x) - (x+1)^2}{\sqrt{u(x)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{u(x)}}, \end{aligned}$$

car $u(x) - (x+1)^2 = 1$. Donc $f''(x) = \dfrac{1}{u(x)\sqrt{u(x)}}$.

Concavité. Pour tout réel x, $u(x) > 0$, donc $f''(x) > 0$. Par le théorème liant concavité et signe de la dérivée seconde, $\mathcal{C}_f$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Conclusion. Pour tout réel x, $f''(x) = \dfrac{1}{(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}}$, et $\mathcal{C}_f$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

6. 1,25 pts

Soit m un réel. Conjecturer, à l'aide de $\mathcal{C}_f$, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ selon les valeurs de m. Résoudre ensuite l'équation $f(x) = 2$ pour confirmer le cas $m = 2$.

INDICE

Outil : la droite $y = m$, le sens de variation de f et l'asymptote $y = 1$. **Point délicat :** pour $m = 2$, isole la racine carrée ; élever au carré demande une condition de signe.

CORRIGÉ

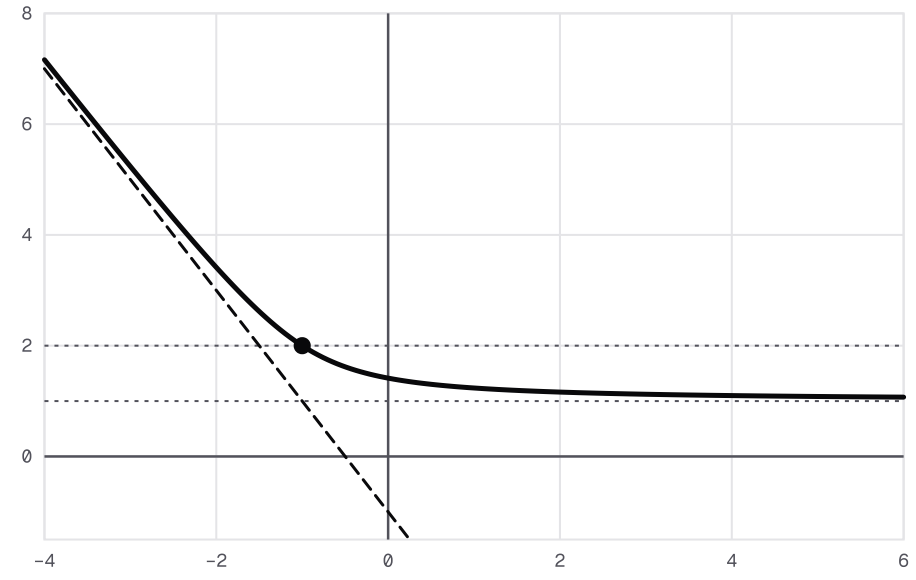
Conjecture. La courbe descend de $+\infty$ vers l'asymptote $y = 1$, en restant strictement au-dessus. La droite $y = m$ semble la couper une fois si $m > 1$, et ne pas la couper si $m \leq 1$. On conjecture : une solution si $m > 1$, aucune si $m \leq 1$.

Cas $m \leq 1$. Ce cas se confirme déjà : d'après la question 2, $f(x) > 1$ pour tout réel x, donc l'équation $f(x) = m$ n'a aucune solution lorsque $m \leq 1$.

Calcul pour $m = 2$. Soit $x \in \mathbb{R}$. L'équation $f(x) = 2$ s'écrit $\sqrt{x^2 + 2x + 2} = x + 2$. Une racine carrée est positive, et deux réels positifs sont égaux si et seulement si leurs carrés le sont : l'équation équivaut à $x + 2 \geq 0$ et $x^2 + 2x + 2 = (x + 2)^2$.

La seconde condition s'écrit $x^2 + 2x + 2 = x^2 + 4x + 4$, soit $-2x = 2$, c'est-à-dire $x = -1$. Pour $x = -1$, on a bien $x + 2 = 1 \geq 0$. En effet, $f(-1) = \sqrt{1} + 1 = 2$.

Conclusion. L'équation $f(x) = 2$ a donc une seule solution, -1 : la conjecture est confirmée pour $m = 2$.



Courbe de f : x ↦ √(x² + 2x + 2) − x, son asymptote (Δ) d'équation y = −2x − 1 en −∞ et son asymptote y = 1 en +∞. La droite d'équation y = 2 la coupe une fois, au point d'abscisse −1 ; aucune droite y = m avec m ≤ 1 ne la rencontre.

Exercice 3 6 pts

Problème : étude d'une fonction trigonométrique

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\cos x}{2 - \sin x},$$

et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthogonal.

1. 0,5 pts

Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est périodique de période 2π.

INDICE

Outil : l'encadrement $-1 \leq \sin x \leq 1$.

CORRIGÉ

Ensemble de définition. Pour tout réel x, $\sin x \leq 1$, donc $2 - \sin x \geq 1 > 0$: le dénominateur ne s'annule jamais, et f est définie sur $\mathbb{R}$.

Période. Soit $x \in \mathbb{R}$; alors $x + 2\pi \in \mathbb{R}$. Le sinus et le cosinus étant 2π-périodiques :

$$\begin{aligned} & f(x + 2\pi) \\ &= \frac{\cos(x + 2\pi)}{2 - \sin(x + 2\pi)} \\ &= \frac{\cos x}{2 - \sin x} = f(x). \end{aligned}$$

Conclusion. f est définie sur $\mathbb{R}$ et périodique de période 2π.

2. 0,75 pts

Montrer que, pour tout réel x, $f(\pi - x) = -f(x)$. En déduire que le point $\Omega\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$; puis la caractérisation d'un centre, avec $2a - x = \pi - x$.

CORRIGÉ

Égalité. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$, donc :

$$\begin{aligned} f(\pi - x) &= \frac{-\cos x}{2 - \sin x} \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

Centre de symétrie. Avec $a = \frac{\pi}{2}$ et $b = 0$: pour tout réel x, $2a - x = \pi - x$ est réel, et $f(2a - x) + f(x) = 0 = 2b$.

Conclusion. Pour tout réel x, $f(\pi - x) = -f(x)$. Par la caractérisation d'un centre de symétrie, $\Omega\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

3. 0,5 pts

Justifier qu'il suffit d'étudier f sur $I = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

INDICE

Outil : la méthode de réduction du domaine d'étude, avec un centre de symétrie et une période. **Point délicat :** cherche le symétrique de I par rapport à $\frac{\pi}{2}$, puis compare la longueur obtenue à la période.

CORRIGÉ

Par la symétrie. Le symétrique d'un réel x par rapport à $\frac{\pi}{2}$ est $\pi - x$: celui de I est $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Par la symétrie de centre Ω, la partie de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses dans I donne celle d'abscisses dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, donc toute la courbe sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, intervalle de longueur 2π.

Par la période. La période 2π donne ensuite toute la courbe, par les translations de vecteur $2k\pi\,\vec{i}$, où $k \in \mathbb{Z}$.

Conclusion. L'étude sur I, complétée par la symétrie de centre Ω puis par ces translations, donne toute la courbe : il suffit d'étudier f sur I.

4. 1 pts

Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{1 - 2\sin x}{(2 - \sin x)^2}$.

INDICE

Outil : la propriété du quotient, puis $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

CORRIGÉ

Dérivabilité. Les fonctions $\cos$ et $x \mapsto 2 - \sin x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, la seconde ne s'annulant pas : par la propriété du quotient, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Calcul. Pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{N(x)}{(2 - \sin x)^2}$, avec :

$$\begin{aligned} N(x) &= -\sin x\,(2 - \sin x) \\ &\quad - \cos x \times (-\cos x) \\ &= -2\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x \\ &= 1 - 2\sin x, \end{aligned}$$

car $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Conclusion. Pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{1 - 2\sin x}{(2 - \sin x)^2}$.

5. 1 pts

Étudier le signe de $f'(x)$ sur I, puis dresser le tableau de variations de f sur I.

INDICE

Outil : sur I, le sinus est strictement décroissant, de 1 à -1, et vaut $\frac{1}{2}$ en $\frac{5\pi}{6}$.

CORRIGÉ

Signe de $f'(x)$. Le dénominateur de $f'(x)$ est strictement positif : $f'(x)$ a le signe de $1-2\sin x$. Sur I, le sinus est strictement décroissant et $\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$. Donc $\sin x>\frac{1}{2}$ sur $\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right[$ et $\sin x<\frac{1}{2}$ sur $\left]\frac{5\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ainsi $f'(x)<0$ sur $\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right[$ et $f'(x)>0$ sur $\left]\frac{5\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right]$.

Variations. Par le théorème du signe de la dérivée, f est strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{5\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right]$.

Valeurs. $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0$ et :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{5\pi}{6}\right) &= \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

Conclusion. Sur I, f décroît de 0 à $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ sur $\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right]$, puis croît de $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ à 0 sur $\left[\frac{5\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right]$.

6. 1,5 pts

En déduire le sens de variation de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, puis montrer que, pour tout réel x, $-\frac{\sqrt{3}}{3} \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$.

INDICE

Outil : un centre de symétrie conserve le sens de variation sur l'intervalle symétrique. Cherche les symétriques de $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]$ et de $\left[\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right]$ par rapport à $\frac{\pi}{2}$. **Point délicat :** l'encadrement s'obtient d'abord sur un intervalle de longueur une période.

CORRIGÉ

Intervalles symétriques. Par rapport à $\frac{\pi}{2}$, le symétrique de $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]$ est $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$, et celui de $\left[\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right]$ est $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right]$.

Sens de variation. Un centre de symétrie conserve le sens de variation sur l'intervalle symétrique : f est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$. De plus, d'après la question 2, $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Encadrement sur une période. Sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, les variations obtenues et les valeurs 0, $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, 0 aux points $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{2}$ montrent que le minimum de f est $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ et son maximum $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Sur $\mathbb{R}$. Cet intervalle a pour longueur la période 2π : tout réel x s'écrit $x = t + 2k\pi$, avec $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ et $k \in \mathbb{Z}$, et $f(x) = f(t)$.

Conclusion. f est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right]$, strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ et, pour tout réel x, $-\frac{\sqrt{3}}{3} \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$.

7. 0,75 pts

Écrire une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point Ω.

INDICE

Outil : $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, avec la formule de la question 4.

CORRIGÉ

On a $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et, d'après la question 4 :

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1-2}{(2-1)^2} = -1.$$

La tangente en Ω a pour équation $y = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, soit $y = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Conclusion. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point Ω a pour équation $y = -x + \frac{\pi}{2}$.

Exercice 4 7 pts

Problème : étude d'une fonction polynôme de degré 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 8x,$$

et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. 0,75 pts

Montrer que, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(x) = (x^2 - 2x)^2 \\ - 4(x^2 - 2x). \end{aligned}$$

En déduire que $f(2 - x) = f(x)$ pour tout réel x, puis que la droite (Δ) d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$. Justifier qu'il suffit d'étudier f sur $[1, +\infty[$.

INDICE

Outil : développe l'écriture proposée. **Point délicat :** pour la symétrie, calcule d'abord $(2 - x)^2 - 2(2 - x)$.

CORRIGÉ

Écriture de $f(x)$. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &(x^2 - 2x)^2 - 4(x^2 - 2x) \\ &= x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x^2 + 8x \\ &= x^4 - 4x^3 + 8x = f(x). \end{aligned}$$

Égalité $f(2 - x) = f(x)$. Posons $u(x) = x^2 - 2x$, de sorte que $f(x) = u(x)^2 - 4u(x)$. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &u(2 - x) \\ &= (2 - x)^2 - 2(2 - x) \\ &= 4 - 4x + x^2 - 4 + 2x \\ &= x^2 - 2x = u(x). \end{aligned}$$

Donc $f(2 - x) = u(x)^2 - 4u(x) = f(x)$.

Axe de symétrie. Avec $a = 1$: pour tout réel x, $2a - x = 2 - x$ est réel et $f(2a - x) = f(x)$. Par la caractérisation d'un axe de symétrie, (Δ) est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

Réduction. La courbe $\mathcal{C}_f$ est la réunion de sa partie formée des points d'abscisse $x \geq 1$ et de l'image de cette partie par la symétrie d'axe (Δ).

Conclusion. Pour tout réel x, $f(2 - x) = f(x)$; (Δ) est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$, et, par la réduction du domaine d'étude, il suffit d'étudier f sur $[1, +\infty[$.

2. 0,5 pts

Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis les mêmes limites en $-\infty$. Interpréter graphiquement.

INDICE

Outil : mets x^4 en facteur dans $f(x)$, et x^3 dans $\dfrac{f(x)}{x}$.

CORRIGÉ

Factorisations. Soit $x \neq 0$:

$$f(x) = x^4\left(1 - \frac{4}{x} + \frac{8}{x^3}\right),$$
$$\frac{f(x)}{x} = x^3\left(1 - \frac{4}{x} + \frac{8}{x^3}\right).$$

Limites. Par quotient et par somme, la parenthèse tend vers 1 en $+\infty$ et en $-\infty$. De plus, x^4 tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et en $-\infty$, tandis que x^3 tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers $-\infty$ en $-\infty$. Par produit :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty.$$

Interprétation. En $+\infty$ comme en $-\infty$, $f(x)$ et $\dfrac{f(x)}{x}$ ont une limite infinie : d'après l'arbre de décision des branches infinies, la courbe a une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

Conclusion. Au voisinage de $+\infty$ comme au voisinage de $-\infty$, $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées. Le résultat en $-\infty$ est cohérent avec la symétrie d'axe (Δ).

3. 1,25 pts

Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = 4(x-1)(x^2-2x-2)$. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[1, +\infty[$, puis dresser le tableau de variations de f sur $[1, +\infty[$.

INDICE

Outil : dérive f terme à terme, puis développe la forme proposée. **Point délicat :** écris x^2-2x-2 sous forme canonique pour trouver son signe quand $x \geq 1$.

CORRIGÉ

Dérivée. La fonction polynôme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8$ pour tout réel x.

Factorisation. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}(x-1)(x^2-2x-2) &= x^3 - 2x^2 - 2x \\ &\quad - x^2 + 2x + 2.\end{aligned}$$

En multipliant par 4 et en réduisant, $4(x-1)(x^2-2x-2) = 4x^3 - 12x^2 + 8 = f'(x)$.

Signe sur $[1, +\infty[$**.** On a $x^2-2x-2 = (x-1)^2 - 3$. Pour $x \geq 1$, $x-1 \geq 0$, donc $(x-1)^2 < 3$ équivaut à $x - 1 < \sqrt{3}$. Ainsi le second facteur est strictement négatif sur $\left[1, 1+\sqrt{3}\right[$, nul en $1+\sqrt{3}$, strictement positif ensuite. Avec le facteur $x-1$, strictement positif sur $]1, +\infty[$: $f'(x) < 0$ sur $\left]1, 1+\sqrt{3}\right[$, $f'(x) > 0$ sur $\left]1+\sqrt{3}, +\infty\right[$, et $f'(1) = f'(1+\sqrt{3}) = 0$.

Variations. Par le théorème du signe de la dérivée, f est strictement décroissante sur $[1, 1+\sqrt{3}]$ et strictement croissante sur $\left[1+\sqrt{3}, +\infty\right[$.

Valeurs. Avec $u(x) = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$ (question 1) : $u(1) = -1$, donc $f(1) = 1 + 4 = 5$; $u(1+\sqrt{3}) = 3 - 1 = 2$, donc $f(1+\sqrt{3}) = 4 - 8 = -4$.

Conclusion. Pour tout réel x, $f'(x) = 4(x-1)(x^2-2x-2)$. Sur $[1, +\infty[$, f décroît de 5 à -4 sur $[1, 1+\sqrt{3}]$, puis croît de -4 à $+\infty$ sur $\left[1+\sqrt{3}, +\infty\right[$.

4. 0,75 pts

En déduire le sens de variation de f sur $]-\infty, 1]$, puis dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f(x) \geq -4$ pour tout réel x.

INDICE

Outil : un axe de symétrie inverse le sens de variation sur l'intervalle symétrique. **Point délicat :** cherche les symétriques de $[1, 1+\sqrt{3}]$ et de $\left[1+\sqrt{3}, +\infty\right[$ par rapport à 1.

CORRIGÉ

Intervalles symétriques. Le symétrique d'un réel x par rapport à 1 est $2-x$. Le symétrique de $[1, 1+\sqrt{3}]$ est donc $[1-\sqrt{3}, 1]$, et celui de $\left[1+\sqrt{3}, +\infty\right[$ est $\left]-\infty, 1-\sqrt{3}\right]$.

Sens de variation sur $]-\infty, 1]$. La droite (Δ) étant un axe de symétrie, le sens de variation s'inverse sur l'intervalle symétrique : f est strictement croissante sur $[1-\sqrt{3}, 1]$ et strictement décroissante sur $\left]-\infty, 1-\sqrt{3}\right]$. De plus, $f(1-\sqrt{3}) = f(1+\sqrt{3}) = -4$.

Tableau sur $\mathbb{R}$.

- Sur $\left]-\infty, 1-\sqrt{3}\right]$, f décroît de $+\infty$ à -4.
- Sur $[1-\sqrt{3}, 1]$, f croît de -4 à 5.
- Sur $[1, 1+\sqrt{3}]$, f décroît de 5 à -4.
- Sur $\left[1+\sqrt{3}, +\infty\right[$, f croît de -4 à $+\infty$.

Minorant. Sur chacun de ces quatre intervalles, $f(x) \geq -4$.

Conclusion. Le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est -4, atteint en $1-\sqrt{3}$ et en $1+\sqrt{3}$: $f(x) \geq -4$ pour tout réel x.

5. 1,25 pts

Calculer $f''(x)$. Étudier la concavité de $\mathcal{C}_f$, et montrer que $\mathcal{C}_f$ admet exactement deux points d'inflexion, que l'on précisera.

INDICE

Outil : dérive $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8$, puis factorise. **Point délicat :** pour exclure tout autre point d'inflexion, raisonne sur chacun des intervalles ouverts où f'' garde un signe strict.

CORRIGÉ

Dérivée seconde. La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$ pour tout réel x. Ce trinôme a pour racines 0 et 2, et pour coefficient dominant $12 > 0$: il est strictement positif sur $]-\infty, 0[$ et sur $]2, +\infty[$, strictement négatif sur $]0, 2[$.

Concavité. Par le théorème liant concavité et signe de la dérivée seconde, $\mathcal{C}_f$ est convexe sur $]-\infty, 0]$ et sur $[2, +\infty[$, concave sur $[0, 2]$.

Points d'inflexion. La dérivée seconde s'annule en 0 et en 2 en changeant de signe (avec $r = 2$ dans chaque cas). Comme $f(0) = 0$ et $f(2) = 16 - 32 + 16 = 0$, les points $O(0, 0)$ et $A(2, 0)$ sont des points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

Aucun autre point d'inflexion. Sur chacun des intervalles ouverts $]-\infty, 0[$, $]0, 2[$ et $]2, +\infty[$, f'' garde un signe strict : d'après la propriété du signe strict de la dérivée seconde, aucun point d'abscisse dans ces intervalles n'est un point d'inflexion.

Conclusion. $f''(x) = 12x(x-2)$; $\mathcal{C}_f$ est convexe sur $]-\infty, 0]$ et sur $[2, +\infty[$, concave sur $[0, 2]$, et admet exactement deux points d'inflexion, $O(0, 0)$ et $A(2, 0)$, symétriques par rapport à (Δ).

6. 1,25 pts

Écrire une équation de la tangente T_0 à $\mathcal{C}_f$ en O. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) - 8x = x^3(x-4)$, et en déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T_0. En déduire aussi, par la symétrie d'axe (Δ), une équation de la tangente T_2 à $\mathcal{C}_f$ en A.

INDICE

Outil : $f'(0)$ par la question 3, puis le signe d'un produit. **Point délicat :** pour T_2, la propriété de la symétrie et de la dérivée relie $f'(2)$ à $f'(0)$.

CORRIGÉ

Tangente T_0. On a $f(0) = 0$ et, d'après la question 3, $f'(0) = 4 \times (-1) \times (-2) = 8$: T_0 a pour équation $y = 8x$.

Écart. Pour tout réel x, $f(x) - 8x = x^4 - 4x^3 = x^3(x-4)$.

Signe.

- Sur $]-\infty, 0[$, les deux facteurs sont strictement négatifs : l'écart est strictement positif.
- Sur $]0, 4[$, $x^3 > 0$ et $x - 4 < 0$: l'écart est strictement négatif.
- Sur $]4, +\infty[$, les deux facteurs sont strictement positifs : l'écart est strictement positif.

L'écart s'annule en 0 et en 4, avec $f(4) = 256 - 256 + 32 = 32$.

Position. $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de T_0 sur $]-\infty, 0[$ et sur $]4, +\infty[$, strictement au-dessous sur $]0, 4[$; elles ont pour points communs O et $B(4, 32)$. Au point d'inflexion O, la courbe traverse sa tangente.

Tangente T_2. La droite (Δ) d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie : par la propriété de la symétrie et de la dérivée, $f'(2 - x) = -f'(x)$ pour tout réel x. Avec $x = 0$: $f'(2) = -f'(0) = -8$. Comme $f(2) = 0$, T_2 a pour équation $y = -8(x - 2)$.

Conclusion. T_0 a pour équation $y = 8x$, et $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de T_0 sur $]-\infty, 0[$ et sur $]4, +\infty[$, au-dessous sur $]0, 4[$; T_2 a pour équation $y = -8x + 16$.

7. 1,25 pts

Tracer (Δ), T_0, T_2 et $\mathcal{C}_f$. Soit m un réel : conjecturer graphiquement, selon m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$. Résoudre ensuite l'équation $f(x) = 5$ pour confirmer le cas $m = 5$.

INDICE

Outil : la droite $y = m$ et le tableau de variations de la question 4. **Point délicat :** pour $m = 5$, utilise l'écriture de la question 1 et une équation du second degré d'inconnue $X = x^2 - 2x$.

CORRIGÉ

Tracé. On trace l'axe (Δ) et les tangentes T_0 et T_2, symétriques par rapport à (Δ). On place les points $(1-\sqrt{3}, -4)$, $(1, 5)$ et $(1+\sqrt{3}, -4)$, à tangente horizontale, ainsi que les points d'inflexion O et A. La courbe, symétrique par rapport à (Δ), a la forme d'un W : elle traverse T_0 en O et T_2 en A, et part vers le haut des deux côtés (branches paraboliques de direction l'axe des ordonnées).

Conjecture. D'après le tableau de la question 4, la droite $y = m$ semble :

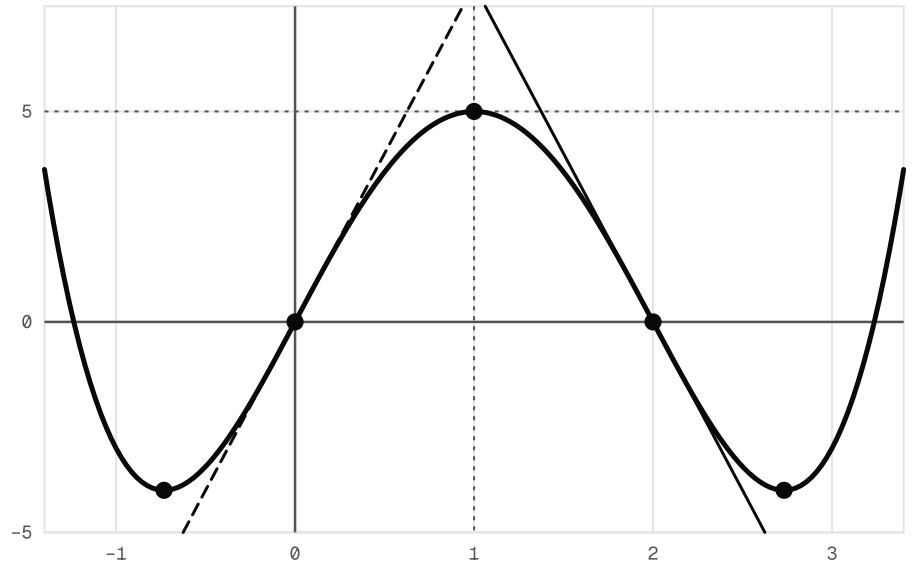
- ne pas couper $\mathcal{C}_f$ si $m < -4$;
- la couper en deux points si $m = -4$;
- la couper en quatre points si $-4 < m < 5$;
- la couper en trois points si $m = 5$;
- la couper en deux points si $m > 5$.

Calcul pour $m = 5$. Posons $X = x^2 - 2x$. D'après la question 1, $f(x) = X^2 - 4X$, donc :

$$\begin{aligned} & f(x) = 5 \\ \Leftrightarrow\ & X^2 - 4X - 5 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (X-5)(X+1) = 0. \end{aligned}$$

- $X = -1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
- $X = 5 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 6$, c'est-à-dire $x = 1 - \sqrt{6}$ ou $x = 1 + \sqrt{6}$.

Conclusion. L'équation $f(x) = 5$ a exactement trois solutions, $1 - \sqrt{6}$, 1 et $1 + \sqrt{6}$: la conjecture est confirmée pour $m = 5$.



Courbe en W de f : x ↦ x⁴ − 4x³ + 8x, symétrique par rapport à (Δ) : x = 1, avec les tangentes T_0 : y = 8x en O et T_2 : y = −8x + 16 en A(2, 0), et la droite d'équation y = 5.

Exercice 5 — 7 pts

Problème : étude d'une fonction irrationnelle sur un intervalle borné

Soit f la fonction définie par $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. — 0,75 pts

Déterminer l'ensemble de définition D_f de f. Montrer que f est impaire, et en déduire qu'il suffit d'étudier f sur $[0, 2]$.

INDICE

Outil : le signe de $4 - x^2 = (2 - x)(2 + x)$. **Point délicat :** avant de comparer $f(-x)$ et $f(x)$, vérifie que $-x$ appartient à D_f dès que x y appartient.

CORRIGÉ

Ensemble de définition. Le réel $f(x)$ existe si et seulement si $4 - x^2 \geq 0$, c'est-à-dire $(2 - x)(2 + x) \geq 0$. Ce trinôme a pour racines -2 et 2, et pour coefficient dominant $-1 < 0$: il est positif ou nul entre ses racines, racines comprises. Donc $D_f = [-2, 2]$.

Imparité. Soit $x \in [-2, 2]$; alors $-x \in [-2, 2]$, et :

$$\begin{aligned} & f(-x) \\ & = -x\sqrt{4 - (-x)^2} \\ & = -x\sqrt{4 - x^2} = -f(x). \end{aligned}$$

La fonction f est impaire : sa courbe est symétrique par rapport à l'origine, et $O(0, 0)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

Réduction. La courbe $\mathcal{C}_f$ est la réunion de sa partie formée des points d'abscisse $x \geq 0$ et de l'image de cette partie par la symétrie de centre O.

Conclusion. $D_f = [-2, 2]$, f est impaire, et, par la réduction du domaine d'étude, il suffit d'étudier f sur $D_f \cap [0, +\infty[= [0, 2]$.

2. 1 pts

Montrer que, pour tout $x \in [0, 2[$:

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -\frac{x\sqrt{2+x}}{\sqrt{2-x}}.$$

En déduire que f n'est pas dérivable à gauche en 2, et interpréter graphiquement. Que peut-on dire au point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse -2 ?

INDICE

Outil : pour $x < 2$, $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{2-x}\,\sqrt{2+x}$ et $x - 2 = -\left(\sqrt{2-x}\right)^2$. **Point délicat :** le dénominateur $\sqrt{2-x}$ tend vers 0 en restant strictement positif.

CORRIGÉ

Taux d'accroissement en 2. Soit $x \in [0, 2[$. On a $f(2) = 0$, $2 - x > 0$ et $2 + x > 0$; donc $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{2-x}\,\sqrt{2+x}$ et $x - 2 = -\left(\sqrt{2-x}\right)^2$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \frac{x\sqrt{2-x}\,\sqrt{2+x}}{-\left(\sqrt{2-x}\right)^2} \\ &= -\frac{x\sqrt{2+x}}{\sqrt{2-x}}.\end{aligned}$$

Limite à gauche en 2. Quand x tend vers 2 à gauche, $x\sqrt{2+x}$ tend vers $2 \times 2 = 4$, et $\sqrt{2-x}$ tend vers 0 en restant strictement positif. Par quotient, le taux tend vers $-\infty$: f n'est pas dérivable à gauche en 2.

Point d'abscisse -2. Soit $x \in]-2, 0]$. Comme f est impaire et $f(2) = f(-2) = 0$:

- $f(x) - f(-2) = -f(-x) = -\big(f(-x) - f(2)\big)$;
- $x + 2 = -\big((-x) - 2\big)$.

Donc :

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} &= \frac{f(-x) - f(2)}{(-x) - 2}.\end{aligned}$$

Quand x tend vers -2 à droite, $-x$ tend vers 2 à gauche : ce taux tend aussi vers $-\infty$.

Conclusion. f n'est pas dérivable à gauche en 2 : $\mathcal{C}_f$ admet au point $(2, 0)$ une demi-tangente verticale. De même, f n'est pas dérivable à droite en -2, et $\mathcal{C}_f$ admet au point $(-2, 0)$ une demi-tangente verticale, symétrique de la précédente par rapport à O.

3. 1,25 pts

Montrer que f est dérivable sur $]-2,2[$ et que, pour tout $x \in]-2,2[$:

$$f'(x) = \frac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Dresser le tableau de variations de f sur $[0,2]$, puis en déduire celui de f sur $[-2,2]$.

INDICE

Outil : la propriété de la racine carrée d'une fonction, avec $u : x \mapsto 4-x^2$, strictement positive sur $]-2,2[$, puis celle du produit. **Point délicat :** f n'est pas dérivable en 2 ; près de 2, compare $f(x)$ à $f(2)$ pour conclure sur un intervalle fermé.

CORRIGÉ

Dérivabilité. La fonction $u : x \mapsto 4-x^2$ est dérivable et strictement positive sur $]-2,2[$, avec $u'(x) = -2x$. Par la propriété de $\sqrt{u}$, la fonction $x \mapsto \sqrt{4-x^2}$ est dérivable sur $]-2,2[$, de dérivée $x \mapsto \dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = -\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$. Par la propriété du produit, f est dérivable sur $]-2,2[$.

Calcul. Soit $x \in]-2,2[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{4-x^2} \\ &\quad - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} \\ &= \frac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}} \\ &= \frac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}. \end{aligned}$$

Signe sur $[0,2[$. Le dénominateur est strictement positif : $f'(x)$ a le signe de $2-x^2$. Ainsi $f'(x) > 0$ sur $\left[0,\sqrt{2}\right[$, $f'(\sqrt{2}) = 0$ et $f'(x) < 0$ sur $\left]\sqrt{2},2\right[$.

Variations sur $[0,2]$. Par le théorème du signe de la dérivée, f est strictement croissante sur $[0,\sqrt{2}]$ et strictement décroissante sur $\left[\sqrt{2},2\right[$. Comme f n'est pas dérivable en 2, on compare à $f(2)$: pour $x \in \left[\sqrt{2},2\right[$, $f(x) > 0 = f(2)$. Donc f est strictement décroissante sur $[\sqrt{2},2]$.

Valeurs. $f(0) = 0$, $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ et $f(2) = 0$.

Sur $[-2,2]$. Un centre de symétrie conserve le sens de variation sur l'intervalle symétrique. Les symétriques de $[0,\sqrt{2}]$ et de $[\sqrt{2},2]$ par rapport à 0 sont $[-\sqrt{2},0]$ et $[-2,-\sqrt{2}]$: f est strictement croissante sur $[-\sqrt{2},0]$ et strictement décroissante sur $[-2,-\sqrt{2}]$, avec $f(-\sqrt{2}) = -2$.

Conclusion. Sur $[0,2]$, f croît de 0 à 2 sur $[0,\sqrt{2}]$, puis décroît de 2 à 0 sur $[\sqrt{2},2]$. Sur $[-2,2]$, f décroît de 0 à -2 sur $[-2,-\sqrt{2}]$, croît de -2 à 2 sur $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$, puis décroît de 2 à 0 sur $[\sqrt{2},2]$.

4. 1,25 pts

On admet que f est deux fois dérivable sur $]-2,2[$. Montrer que, pour tout $x \in]-2,2[$:

$$f''(x) = \frac{2x(x^2-6)}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}.$$

En déduire la concavité de $\mathcal{C}_f$, et montrer que O est le seul point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : écris $f'(x) = \dfrac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$ et dérive le quotient, avec la dérivée de $x \mapsto \sqrt{4-x^2}$ trouvée à la question 3. **Point délicat :** sur $]-2,2[$, le facteur x^2-6 garde un signe constant.

CORRIGÉ

Dérivée du quotient. Notons $s(x) = \sqrt{4-x^2}$, de sorte que $f'(x) = \dfrac{4-2x^2}{s(x)}$, avec $s'(x) = -\dfrac{x}{s(x)}$ (question 3). Par la propriété du quotient, pour tout $x \in]-2,2[$, $f''(x) = \dfrac{N(x)}{s(x)^2}$, avec :

$$\begin{aligned} N(x) &= -4x\, s(x) \\ &\quad + (4-2x^2) \times \frac{x}{s(x)} \\ &= \frac{-4x\, s(x)^2 + x(4-2x^2)}{s(x)} \\ &= \frac{-4x(4-x^2) + 4x - 2x^3}{s(x)} \\ &= \frac{2x^3 - 12x}{s(x)}. \end{aligned}$$

Comme $s(x)^3 = (4-x^2)\sqrt{4-x^2}$, on obtient :

$$f''(x) = \frac{2x(x^2-6)}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}.$$

Signe. Sur $]-2,2[$, $x^2 < 4$, donc $x^2 - 6 < 0$, et le dénominateur est strictement positif : $f''(x)$ a le signe de $-x$. Ainsi $f''(x) > 0$ sur $]-2,0[$ et $f''(x) < 0$ sur $]0,2[$.

Concavité. Par le théorème liant concavité et signe de la dérivée seconde, $\mathcal{C}_f$ est convexe sur $]-2,0]$ et concave sur $[0,2[$.

Point d'inflexion. La dérivée seconde s'annule en 0 en changeant de signe (avec $r = 2$) : $O(0,0)$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

Unicité. Sur les intervalles ouverts $]-2,0[$ et $]0,2[$, f'' garde un signe strict : d'après la propriété du signe strict de la dérivée seconde, appliquée à chacun d'eux, aucun autre point d'abscisse appartenant à $]-2,2[$ n'est un point d'inflexion. Aux points d'abscisses -2 et 2, f n'est pas dérivable : la définition d'un point d'inflexion ne s'y applique pas.

Conclusion. $\mathcal{C}_f$ est convexe sur $]-2,0]$, concave sur $[0,2[$, et O est son seul point d'inflexion.

5. 1 pts

Écrire une équation de la tangente T_0 à $\mathcal{C}_f$ en O. Soit (D) la droite d'équation $y = x$. Montrer que, pour tout $x \in [-2, 2]$, $f(x) - x = x\left(\sqrt{4 - x^2} - 1\right)$, et en déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (D) ainsi que leurs points communs.

INDICE

Outil : $f'(0)$ par la question 3, puis le signe de chaque facteur. **Point délicat :** compare $\sqrt{4 - x^2}$ à $1 = \sqrt{1}$, puis distingue le signe de x.

CORRIGÉ

Tangente T_0. On a $f(0) = 0$ et, d'après la question 3, $f'(0) = \dfrac{2 \times 2}{2} = 2$: T_0 a pour équation $y = 2x$.

Écart. Pour tout $x \in [-2, 2]$, $f(x) - x = x\sqrt{4 - x^2} - x = x\left(\sqrt{4 - x^2} - 1\right)$.

Signe du second facteur. Soit $x \in [-2, 2]$. On a $4 - x^2 \geq 0$ et $1 = \sqrt{1}$; la racine carrée étant strictement croissante sur $[0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} \sqrt{4 - x^2} > 1 &\Leftrightarrow 4 - x^2 > 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 < 3. \end{aligned}$$

Le second facteur est donc strictement positif sur $\left]-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right[$, nul en $-\sqrt{3}$ et en $\sqrt{3}$, strictement négatif sur $\left[-2, -\sqrt{3}\right[$ et sur $\left]\sqrt{3}, 2\right]$.

Signe du produit. En combinant avec le signe de x :

- sur $\left[-2, -\sqrt{3}\right[$ et sur $\left]0, \sqrt{3}\right[$, l'écart est strictement positif ;
- sur $\left]-\sqrt{3}, 0\right[$ et sur $\left]\sqrt{3}, 2\right]$, il est strictement négatif ;
- il s'annule en $-\sqrt{3}$, en 0 et en $\sqrt{3}$.

Conclusion. T_0 a pour équation $y = 2x$. La courbe $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de (D) sur $\left[-2, -\sqrt{3}\right[$ et sur $\left]0, \sqrt{3}\right[$, et strictement au-dessous sur $\left]-\sqrt{3}, 0\right[$ et sur $\left]\sqrt{3}, 2\right]$. Leurs points communs sont O, $\left(\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$ et $\left(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}\right)$.

6. `0,5 pts`

Tracer T_0, (D) et $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : la méthode du tracé : les points remarquables d'abord, avec leurs tangentes ou demi-tangentes. **Point délicat :** respecte la concavité de part et d'autre de O.

CORRIGÉ

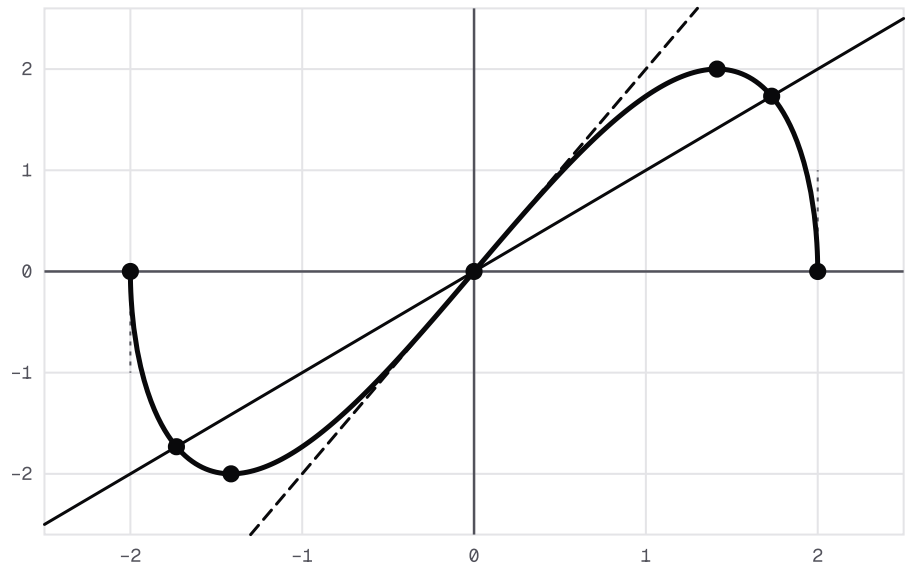
Éléments du tracé.

- Le point O et la tangente T_0 : $y = 2x$.
- Les points $(\sqrt{2}, 2)$ et $(-\sqrt{2}, -2)$, à tangente horizontale.
- Les points $(2, 0)$ et $(-2, 0)$, avec leurs demi-tangentes verticales (question 2).
- La droite (D) : $y = x$, et ses trois points communs avec $\mathcal{C}_f$ (question 5) : O, $\left(\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$ et $\left(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}\right)$.

Allure sur $[0, 2]$. La courbe part de O au-dessous de T_0 : elle est concave sur $[0, 2[$ (question 4), donc au-dessous de sa tangente T_0 sur cet intervalle. Elle monte jusqu'à $(\sqrt{2}, 2)$, puis redescend jusqu'à $(2, 0)$, où elle arrive verticalement. Elle reste au-dessus de (D) sur $]0, \sqrt{3}[$, la coupe en $\left(\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$, puis passe au-dessous.

Allure sur $[-2, 0]$. C'est l'image de la partie précédente par la symétrie de centre O ; elle est tournée vers le haut.

Conclusion. La courbe, symétrique par rapport à O, est comprise entre les droites d'équations $y = -2$ et $y = 2$.



Tracé de la courbe de f : x ↦ x√(4 − x²) sur [−2, 2], de T_0 : y = 2x et de (D) : y = x. Sommets en (√2, 2) et (−√2, −2), demi-tangentes verticales en (2, 0) et (−2, 0), points communs avec (D) en O et en (±√3, ±√3).

7. 1,25 pts

Soit m un réel. Conjecturer, à l'aide de $\mathcal{C}_f$, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ selon les valeurs de m. Résoudre ensuite l'équation $f(x) = \sqrt{3}$ pour confirmer le cas $m = \sqrt{3}$.

INDICE

Outil : la droite $y = m$ et le tableau de variations de la question 3. **Point délicat :** pour $m = \sqrt{3}$, cherche d'abord le signe des solutions ; élever au carré demande une condition de signe.

CORRIGÉ

Conjecture. D'après le tableau de la question 3, la droite $y = m$ semble :

- ne pas couper $\mathcal{C}_f$ si $m < -2$ ou $m > 2$;
- la couper en un point si $m = -2$ ou $m = 2$;
- la couper en deux points si $-2 < m < 0$ ou $0 < m < 2$;
- la couper en trois points si $m = 0$ (les points d'abscisses -2, 0 et 2).

Signe des solutions. Comme $\sqrt{4 - x^2} \geq 0$, $f(x)$ est du signe de x ; une solution de $f(x) = \sqrt{3}$ vérifie donc $x > 0$, soit $x \in]0, 2]$.

Calcul pour $m = \sqrt{3}$. Pour $x \in]0, 2]$, les deux membres sont positifs : ils sont égaux si et seulement si leurs carrés le sont.

$$\begin{aligned} & f(x) = \sqrt{3} \\ \Leftrightarrow\ & x^2(4 - x^2) = 3 \\ \Leftrightarrow\ & x^4 - 4x^2 + 3 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x^2 - 1)(x^2 - 3) = 0. \end{aligned}$$

Avec $x > 0$, cela donne $x = 1$ ou $x = \sqrt{3}$, qui appartiennent bien à $]0, 2]$. En effet, $f(1) = \sqrt{3}$ et $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3} \times 1 = \sqrt{3}$; $\sqrt{3}$ est l'abscisse du point commun $\left(\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$ de $\mathcal{C}_f$ et de (D) trouvé à la question 5.

Conclusion. L'équation $f(x) = \sqrt{3}$ a donc exactement deux solutions, 1 et $\sqrt{3}$: la conjecture est confirmée pour $m = \sqrt{3}$.