BURHAN

Étude et représentation des fonctions : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/etude-et-representation-des-fonctions/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Étude et représentation des fonctions	Entraînement	8

Exercice 1

Chercher une asymptote oblique

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3x^3 - x}{x^2 + 2},$$

et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

INDICE

Outil : la limite d'une fraction rationnelle à l'infini.

2.

Calculer $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis les limites de $f(x) - 3x$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

INDICE

Outil : pour $x \neq 0$, simplifie $\dfrac{f(x)}{x}$ par x. **Point délicat :** réduis $f(x) - 3x$ au même dénominateur avant de passer à la limite.

3.

En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique (Δ), et préciser la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (Δ).

INDICE

Outil : la caractérisation d'une asymptote oblique par deux limites ; puis le signe de l'écart trouvé.

Exercice 2

Les deux asymptotes d'une racine carrée

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1.

Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

INDICE

Outil : le signe du trinôme $x^2 + 4x$, après factorisation.

2.

Montrer que, pour tout réel $x > 0$:

$$f(x) - (x + 2) = \frac{-4}{\sqrt{x^2 + 4x} + x + 2}.$$

En déduire une asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

INDICE

Outil : multiplie et divise par la quantité conjuguée $\sqrt{x^2 + 4x} + x + 2$, qui est strictement positive pour $x > 0$.

3.

Montrer que la droite d'équation $y = -x - 2$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

INDICE

Outil : la quantité conjuguée, comme à la question 2, mais avec $\sqrt{x^2 + 4x} - x - 2$. **Point délicat :** pour $x \leq -4$, vérifie que cette quantité est strictement positive.

4.

Préciser la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à chacune de ses deux asymptotes.

INDICE

Outil : le signe des deux écarts calculés aux questions 2 et 3.

Exercice 3

Une asymptote que la courbe traverse

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 3}{x^2 + 1},$$

et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Déterminer les réels a, b, c et d tels que, pour tout réel x :

$$f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 + 1}.$$

INDICE

Outil : réduis le membre de droite au même dénominateur, puis identifie les coefficients des deux numérateurs.

2.

En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique (D) en $+\infty$ et en $-\infty$.

INDICE

Outil : la limite d'une fraction rationnelle à l'infini, appliquée au reste.

3.

Étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (D).

INDICE

Outil : $x^2 + 1 > 0$; le signe de l'écart est celui d'une expression affine.

Exercice 4

Trois points d'inflexion et une tangente traversée

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{x^2+3}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Montrer que, pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{3 - x^2}{(x^2+3)^2}$$

et

$$f''(x) = \frac{2x(x^2-9)}{(x^2+3)^3}.$$

INDICE

Outil : la propriété du quotient, deux fois. **Point délicat :** pour f'', simplifie par x^2+3 avant de développer.

2.

Étudier la concavité de $\mathcal{C}_f$ et déterminer ses points d'inflexion.

INDICE

Outil : le signe de $f''(x)$ est celui de $2x(x-3)(x+3)$. **Point délicat :** pour obtenir tous les points d'inflexion, exclus aussi les autres points.

3.

Écrire une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en O, puis étudier le signe de $f(x) - \dfrac{x}{3}$. Que constate-t-on ?

INDICE

Outil : $f'(0)$, puis la réduction au même dénominateur $3(x^2+3)$.

Exercice 5

Réduire puis étudier une fonction trigonométrique

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos^2 x - \cos x$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Montrer que f est 2π-périodique et paire. En déduire un intervalle d'étude de longueur π.

INDICE

Outil : les propriétés du cosinus, puis la réduction par la période et par l'axe des ordonnées.

2.

Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = \sin x\,(1 - 2\cos x)$.

INDICE

Outil : la dérivée de u^2, avec $u = \cos$, puis une factorisation par $\sin x$.

3.

Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0, \pi]$, puis dresser le tableau de variations de f sur $[0, \pi]$.

INDICE

Outil : sur $[0, \pi]$, $\sin x \geq 0$; le cosinus y est strictement décroissant et vaut $\frac{1}{2}$ en $\frac{\pi}{3}$.

4.

En déduire le sens de variation de f sur $[-\pi, 0]$.

INDICE

Outil : un axe de symétrie inverse le sens de variation sur l'intervalle symétrique.

Exercice 6

Point d'inflexion et centre d'une courbe de degré 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 1$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion A, dont on précisera les coordonnées.

INDICE

Outil : la dérivée des puissances ; puis le signe de la fonction affine f''.

2.

Montrer que, pour tout réel x, $f(4 - x) + f(x) = -2$. Interpréter graphiquement.

INDICE

Outil : pose $x = 2 + h$, et développe $f(2 + h)$ en puissances de h.

3.

Écrire une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en A, puis étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T.

INDICE

Outil : réutilise le développement de $f(2 + h)$ obtenu à la question 2.

Exercice 7

Étude partielle d'une fonction rationnelle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - x + 7}{x - 1},$$

et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Calculer les limites de f en 1 à droite et à gauche. Interpréter graphiquement.

INDICE

Outil : la limite du numérateur en 1 et le signe de $x - 1$.

2.

Vérifier que, pour tout réel $x \neq 1$:

$$f(x) = 2x + 1 + \frac{8}{x - 1}.$$

En déduire une asymptote oblique (Δ) et la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (Δ).

INDICE

Outil : développe $(2x + 1)(x - 1)$. Puis étudie le signe de $\frac{8}{x - 1}$.

3.

Montrer que, pour tout réel $x \neq 1$:

$$f'(x) = \frac{2(x - 3)(x + 1)}{(x - 1)^2}.$$

Dresser le tableau de variations de f.

INDICE

Outil : dérive l'écriture de la question 2. **Point délicat :** le théorème du signe de la dérivée s'applique sur chacun des intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$, séparément.

Exercice 8

Lire un nombre de solutions, puis le confirmer

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1.

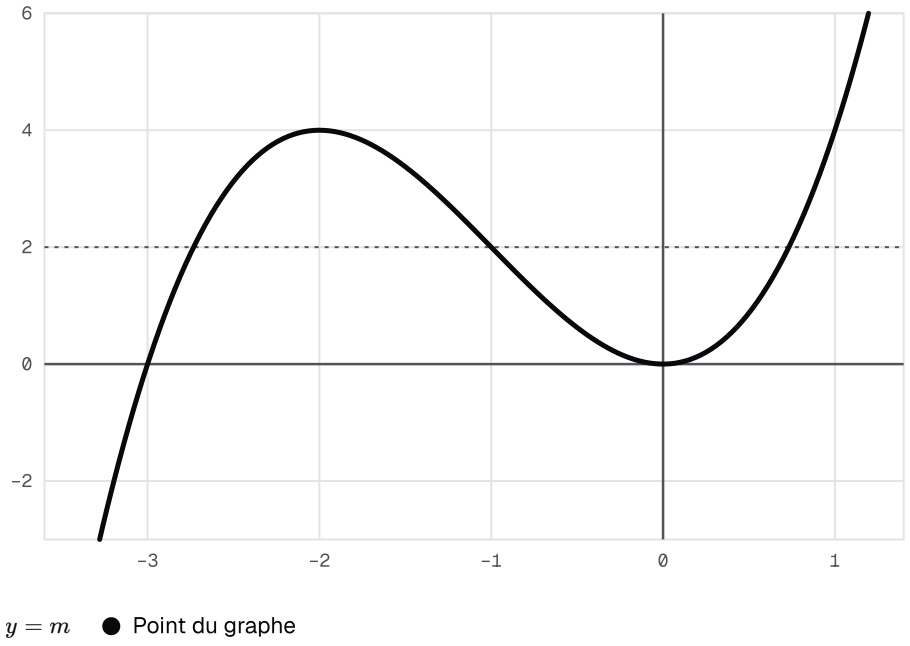
Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, puis dresser son tableau de variations.

INDICE

Outil : la limite d'un polynôme à l'infini ; puis $f'(x)$, un trinôme que l'on factorise par x.

2.

Soit m un réel. En lisant $\mathcal{C}_f$ et la droite d'équation $y = m$, conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ selon les valeurs de m.



Courbe de f : x ↦ x³ + 3x² et une droite horizontale d'équation y = m, tracée ici pour une valeur de m : les solutions de f(x) = m sont les abscisses des points communs.

INDICE

Outil : fais glisser la droite horizontale $y = m$ du bas vers le haut ; compare m aux ordonnées des extremums locaux, lues dans le tableau.

3.

Confirmer la conjecture par le calcul pour $m = 0$, puis pour $m = 4$.

INDICE

Outil : factorise $f(x)$ par x^2. Pour $m = 4$, cherche une racine de $f(x) - 4$ parmi les abscisses des extremums, puis factorise.