BURHAN

Étude et représentation des fonctions : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/etude-et-representation-des-fonctions/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Étude et représentation des fonctions	Entraînement	8

Exercice 1

Chercher une asymptote oblique

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3x^3 - x}{x^2 + 2},$$

et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

INDICE

Outil : la limite d'une fraction rationnelle à l'infini.

CORRIGÉ

Par la limite d'une fraction rationnelle à l'infini, $f(x)$ a la même limite que le quotient de ses termes de plus haut degré. Pour $x \neq 0$:

$$\frac{3x^3}{x^2} = 3x.$$

Or $3x$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers $-\infty$ en $-\infty$.

Conclusion. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2.

Calculer $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, puis les limites de $f(x)-3x$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

INDICE

Outil : pour $x\neq 0$, simplifie $\dfrac{f(x)}{x}$ par x. **Point délicat :** réduis $f(x)-3x$ au même dénominateur avant de passer à la limite.

CORRIGÉ

Limites de $\dfrac{f(x)}{x}$. Soit $x\neq 0$. En simplifiant par x :

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{3x^2-1}{x^2+2}.$$

Par la limite d'une fraction rationnelle à l'infini, ce quotient a la même limite que $\dfrac{3x^2}{x^2}=3$, en $+\infty$ comme en $-\infty$.

Limites de $f(x)-3x$. Soit $x\in\mathbb{R}$. On réduit au dénominateur x^2+2 :

$$\begin{aligned} f(x)-3x &= \frac{3x^3-x-3x(x^2+2)}{x^2+2}\\ &= \frac{3x^3-x-3x^3-6x}{x^2+2}\\ &= \frac{-7x}{x^2+2}. \end{aligned}$$

Par la même règle, cette fraction a la même limite que $\dfrac{-7x}{x^2}=-\dfrac{7}{x}$, c'est-à-dire 0, en $+\infty$ comme en $-\infty$.

Conclusion. En $+\infty$ et en $-\infty$, $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers 3 et $f(x)-3x$ tend vers 0.

3.

En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique (Δ), et préciser la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (Δ).

INDICE

Outil : la caractérisation d'une asymptote oblique par deux limites ; puis le signe de l'écart trouvé.

CORRIGÉ

Asymptote. D'après la question 2, en $+\infty$ comme en $-\infty$, $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers le réel non nul 3 et $f(x)-3x$ tend vers 0. Par la caractérisation d'une asymptote oblique, la droite (Δ) d'équation $y=3x$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ des deux côtés.

Signe de l'écart. Pour tout réel x, $f(x)-3x=\dfrac{-7x}{x^2+2}$. Le dénominateur est strictement positif : l'écart a le signe de $-x$.

- Pour $x<0$, l'écart est strictement positif.
- Pour $x>0$, il est strictement négatif.
- En 0, il est nul : $f(0)=0$.

Conclusion. La droite (Δ) d'équation $y=3x$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$. La courbe est strictement au-dessus de (Δ) sur $]-\infty,0[$, strictement au-dessous sur $]0,+\infty[$, et elles se coupent en O.

Exercice 2

Les deux asymptotes d'une racine carrée

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1.

Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

INDICE

Outil : le signe du trinôme $x^2 + 4x$, après factorisation.

CORRIGÉ

Le réel $f(x)$ existe si et seulement si $x^2 + 4x \geq 0$. Or $x^2 + 4x = x(x + 4)$: ce trinôme a pour racines -4 et 0, et pour coefficient dominant $1 > 0$. Il est positif ou nul à l'extérieur des racines, racines comprises, et strictement négatif entre elles.

Conclusion. $D_f =]-\infty, -4] \cup [0, +\infty[$.

2.

Montrer que, pour tout réel $x > 0$:

$$f(x) - (x + 2) = \frac{-4}{\sqrt{x^2 + 4x} + x + 2}.$$

En déduire une asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

INDICE

Outil : multiplie et divise par la quantité conjuguée $\sqrt{x^2 + 4x} + x + 2$, qui est strictement positive pour $x > 0$.

CORRIGÉ

Quantité conjuguée. Soit $x > 0$. Alors $x \in D_f$, et $\sqrt{x^2 + 4x} + x + 2 > 0$ comme somme d'un terme positif et d'un terme strictement positif. On multiplie et on divise par cette quantité, en utilisant $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$:

$$\begin{aligned} f(x) - (x + 2) &= \frac{(x^2 + 4x) - (x + 2)^2}{\sqrt{x^2 + 4x} + x + 2} \\ &= \frac{-4}{\sqrt{x^2 + 4x} + x + 2}. \end{aligned}$$

Limite de l'écart. En $+\infty$, $x^2 + 4x$ tend vers $+\infty$ (limite d'un polynôme), donc $\sqrt{x^2 + 4x}$ aussi (racine carrée d'une fonction) ; $x + 2$ tend aussi vers $+\infty$. Par somme, le dénominateur tend vers $+\infty$; par quotient, l'écart tend vers 0.

Conclusion. L'égalité est établie pour tout réel $x > 0$, et la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

3.

Montrer que la droite d'équation $y = -x - 2$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

INDICE

Outil : la quantité conjuguée, comme à la question 2, mais avec $\sqrt{x^2+4x} - x - 2$. **Point délicat :** pour $x \leq -4$, vérifie que cette quantité est strictement positive.

CORRIGÉ

Signe de la quantité conjuguée. Soit $x \leq -4$; alors $x \in D_f$ et $-x - 2 \geq 2$. Comme $\sqrt{x^2+4x} \geq 0$:

$$\sqrt{x^2+4x} - x - 2 \geq 2 > 0.$$

Écart. On multiplie et on divise par cette quantité strictement positive :

$$\begin{aligned} & f(x) - (-x-2) \\ &= \sqrt{x^2+4x} + (x+2) \\ &= \frac{(x^2+4x) - (x+2)^2}{\sqrt{x^2+4x} - x - 2} \\ &= \frac{-4}{\sqrt{x^2+4x} - x - 2}. \end{aligned}$$

Limite de l'écart. En $-\infty$, x^2+4x tend vers $+\infty$, donc $\sqrt{x^2+4x}$ aussi ; $-x-2$ tend aussi vers $+\infty$. Par somme, le dénominateur tend vers $+\infty$; par quotient, l'écart tend vers 0.

Conclusion. La droite d'équation $y = -x - 2$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

4.

Préciser la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à chacune de ses deux asymptotes.

INDICE

Outil : le signe des deux écarts calculés aux questions 2 et 3.

CORRIGÉ

Par rapport à la droite $y = x + 2$. Pour $x > 0$, l'écart de la question 2 est le quotient de -4 par un réel strictement positif : il est strictement négatif. En 0, l'écart vaut $f(0) - 2 = -2 < 0$.

Par rapport à la droite $y = -x - 2$. Pour $x \leq -4$, l'écart de la question 3 est le quotient de -4 par un réel strictement positif : il est strictement négatif.

Ces deux asymptotes sont celles que donne la propriété des asymptotes de $x \mapsto \sqrt{ax^2+bx+c}$, avec $a = 1$ et $b = 4$.

Conclusion. $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessous de la droite $y = x + 2$ sur $[0, +\infty[$, et strictement au-dessous de la droite $y = -x - 2$ sur $]-\infty, -4]$.

Exercice 3

Une asymptote que la courbe traverse

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 3}{x^2 + 1},$$

et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Déterminer les réels a, b, c et d tels que, pour tout réel x :

$$f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 + 1}.$$

INDICE

Outil : réduis le membre de droite au même dénominateur, puis identifie les coefficients des deux numérateurs.

CORRIGÉ

Réduction au même dénominateur. Soit a, b, c, d des réels et $x \in \mathbb{R}$; on a $x^2 + 1 > 0$ et :

$$\begin{aligned} &ax + b + \frac{cx + d}{x^2 + 1} \\ &= \frac{(ax + b)(x^2 + 1) + cx + d}{x^2 + 1} \\ &= \frac{N(x)}{x^2 + 1}, \end{aligned}$$

où $N(x) = ax^3 + bx^2 + (a + c)x + b + d$.

Identification. Cette expression est égale à $f(x)$ pour tout réel x si et seulement si les deux numérateurs sont égaux pour tout réel x, c'est-à-dire, par identification des coefficients, si et seulement si :

- $a = 1$ (coefficient de x^3) ;
- $b = 2$ (coefficient de x^2) ;
- $a + c = 0$ (coefficient de x) ;
- $b + d = -3$ (terme constant).

Donc $c = -1$ et $d = -5$.

Conclusion. $a = 1, b = 2, c = -1, d = -5$ et, pour tout réel x :

$$f(x) = x + 2 - \frac{x + 5}{x^2 + 1}.$$

2.

En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique (D) en $+\infty$ et en $-\infty$.

INDICE

Outil : la limite d'une fraction rationnelle à l'infini, appliquée au reste.

CORRIGÉ

D'après la question 1, pour tout réel x, $f(x) - (x+2) = -\dfrac{x+5}{x^2+1}$.

Limite de l'écart. Par la limite d'une fraction rationnelle à l'infini, $\dfrac{x+5}{x^2+1}$ a la même limite que $\dfrac{x}{x^2} = \dfrac{1}{x}$, soit 0, en $+\infty$ comme en $-\infty$. Donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - (x+2)\big) = 0,$$
$$\lim_{x \to -\infty} \big(f(x) - (x+2)\big) = 0.$$

Conclusion. Le coefficient directeur 1 n'est pas nul : la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

3.

Étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (D).

INDICE

Outil : $x^2+1>0$; le signe de l'écart est celui d'une expression affine.

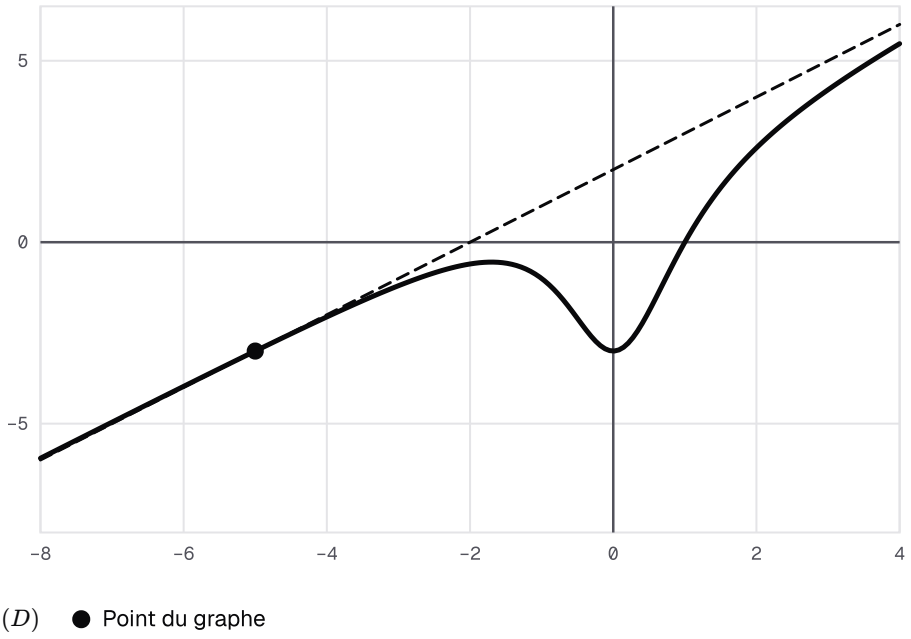
CORRIGÉ

Signe de l'écart. Pour tout réel x, l'écart vaut $f(x)-(x+2)=-\dfrac{x+5}{x^2+1}$. Comme $x^2+1>0$, il a le signe de $-(x+5)$:

- strictement positif pour $x<-5$;
- nul pour $x=-5$;
- strictement négatif pour $x>-5$.

Point commun. Au point d'abscisse -5, l'ordonnée sur (D) vaut $-5+2=-3$.

Conclusion. $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de (D) sur $]-\infty,-5[$ et strictement au-dessous sur $]-5,+\infty[$; elle coupe (D) au point $(-5,-3)$.



Courbe de f : x ↦ (x³ + 2x² − 3)/(x² + 1) et son asymptote oblique (D) d'équation y = x + 2 : la courbe est au-dessus de (D) avant l'abscisse −5, au-dessous après, et la coupe au point (−5, −3).

Exercice 4

Trois points d'inflexion et une tangente traversée

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{x^2+3}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Montrer que, pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{3 - x^2}{(x^2+3)^2}$$

et

$$f''(x) = \frac{2x(x^2-9)}{(x^2+3)^3}.$$

INDICE

Outil : la propriété du quotient, deux fois. **Point délicat :** pour f'', simplifie par x^2+3 avant de développer.

CORRIGÉ

Dérivée première. Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2+3$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et x^2+3 ne s'annule pas : f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par la propriété du quotient, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2+3) - x \times 2x}{(x^2+3)^2} \\ &= \frac{3 - x^2}{(x^2+3)^2}. \end{aligned}$$

Dérivée seconde. La fonction f' est encore un quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, de dénominateur non nul. Par la propriété de u^2, la dérivée de $x \mapsto (x^2+3)^2$ est $x \mapsto 4x(x^2+3)$. Par la propriété du quotient, pour tout réel x, $f''(x) = \dfrac{A(x)}{(x^2+3)^4}$, avec :

$$\begin{aligned} &A(x) \\ &= -2x(x^2+3)^2 \\ &\quad - (3-x^2) \times 4x(x^2+3) \\ &= (x^2+3) \times N(x), \end{aligned}$$

où $N(x) = -2x(x^2+3) - 4x(3-x^2)$. On simplifie par $x^2+3 \neq 0$, puis on développe $N(x)$:

$$\begin{aligned} &N(x) \\ &= -2x^3 - 6x - 12x + 4x^3 \\ &= 2x^3 - 18x \\ &= 2x(x^2-9). \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{3-x^2}{(x^2+3)^2}$ et $f''(x) = \dfrac{N(x)}{(x^2+3)^3} = \dfrac{2x(x^2-9)}{(x^2+3)^3}$.

2.

Étudier la concavité de $\mathcal{C}_f$ et déterminer ses points d'inflexion.

INDICE

Outil : le signe de $f''(x)$ est celui de $2x(x-3)(x+3)$. **Point délicat :** pour obtenir tous les points d'inflexion, exclus aussi les autres points.

CORRIGÉ

Signe de $f''(x)$. Le dénominateur $(x^2+3)^3$ est strictement positif : $f''(x)$ a le signe de $2x(x-3)(x+3)$. Le tableau de signes des trois facteurs donne :

- $f''(x) < 0$ sur $]-\infty, -3[$ et sur $]0, 3[$;
- $f''(x) > 0$ sur $]-3, 0[$ et sur $]3, +\infty[$;
- $f''(x) = 0$ en -3, en 0 et en 3.

Concavité. Par le théorème liant concavité et signe de la dérivée seconde, $\mathcal{C}_f$ est concave sur $]-\infty, -3]$ et sur $[0, 3]$, et convexe sur $[-3, 0]$ et sur $[3, +\infty[$.

Points d'inflexion. La dérivée seconde s'annule en changeant de signe en -3, en 0 et en 3. On a $f(-3) = -\dfrac{3}{12} = -\dfrac{1}{4}$, $f(0) = 0$ et $f(3) = \dfrac{1}{4}$: les points $\left(-3, -\dfrac{1}{4}\right)$, $O(0,0)$ et $\left(3, \dfrac{1}{4}\right)$ sont des points d'inflexion.

Aucun autre point d'inflexion. Sur chacun des intervalles ouverts $]-\infty, -3[$, $]-3, 0[$, $]0, 3[$ et $]3, +\infty[$, f'' garde un signe strict. D'après la propriété du signe strict de la dérivée seconde, appliquée à chacun d'eux, aucun point d'abscisse dans ces intervalles n'est un point d'inflexion.

Conclusion. $\mathcal{C}_f$ est concave sur $]-\infty, -3]$ et sur $[0, 3]$, convexe sur $[-3, 0]$ et sur $[3, +\infty[$; ses points d'inflexion sont exactement $\left(-3, -\dfrac{1}{4}\right)$, $O(0,0)$ et $\left(3, \dfrac{1}{4}\right)$.

3.

Écrire une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en O, puis étudier le signe de $f(x) - \dfrac{x}{3}$. Que constate-t-on ?

INDICE

Outil : $f'(0)$, puis la réduction au même dénominateur $3(x^2+3)$.

CORRIGÉ

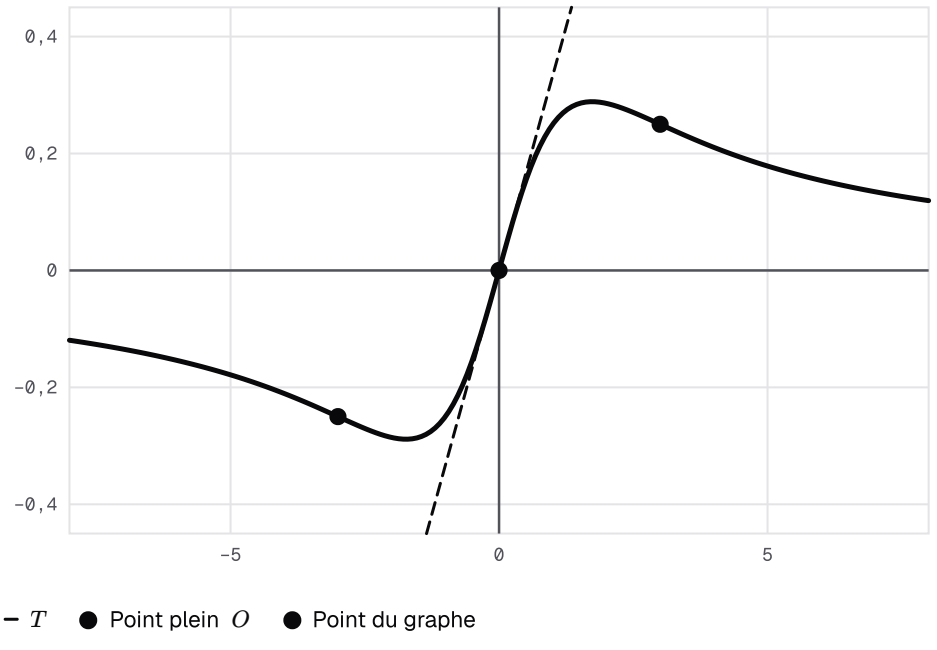
Tangente en O. On a $f(0) = 0$ et $f'(0) = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$. La tangente T a pour équation $y = \dfrac{1}{3}(x-0) + 0$, soit $y = \dfrac{x}{3}$.

Écart. Soit $x \in \mathbb{R}$. On réduit au dénominateur $3(x^2+3)$:

$$\begin{aligned} f(x) - \frac{x}{3} &= \frac{3x - x(x^2+3)}{3(x^2+3)} \\ &= -\frac{x^3}{3(x^2+3)}. \end{aligned}$$

Signe. Le dénominateur est strictement positif : l'écart a le signe de $-x^3$, donc de $-x$. Il est strictement positif pour $x < 0$, nul en 0, strictement négatif pour $x > 0$.

Conclusion. La tangente en O a pour équation $y = \dfrac{x}{3}$. La courbe est au-dessus de T sur $]-\infty, 0[$ et au-dessous sur $]0, +\infty[$: elle traverse sa tangente en O, ce qui s'accorde avec le fait que O est un point d'inflexion.



Courbe de f : x ↦ x/(x² + 3), ses trois points d'inflexion d'abscisses −3, 0 et 3, et sa tangente T d'équation y = x/3 en O, que la courbe traverse.

Exercice 5

Réduire puis étudier une fonction trigonométrique

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos^2 x - \cos x$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Montrer que f est 2π-périodique et paire. En déduire un intervalle d'étude de longueur π.

INDICE

Outil : les propriétés du cosinus, puis la réduction par la période et par l'axe des ordonnées.

CORRIGÉ

Périodicité et parité. Soit $x \in \mathbb{R}$; les réels $x + 2\pi$ et $-x$ appartiennent à $\mathbb{R}$. Le cosinus est 2π-périodique et pair : $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\cos(-x) = \cos x$. Donc $f(x + 2\pi) = f(x)$ et $f(-x) = f(x)$.

Réduction. Par la période 2π, il suffit d'étudier f sur $[-\pi, \pi[$. Par la parité, l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$: la partie d'abscisses dans $[-\pi, 0]$ est la symétrique de celle d'abscisses dans $[0, \pi]$.

Conclusion. f est 2π-périodique et paire ; il suffit de l'étudier sur $[0, \pi]$, intervalle de longueur π.

2.

Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = \sin x\,(1 - 2\cos x)$.

INDICE

Outil : la dérivée de u^2, avec $u = \cos$, puis une factorisation par $\sin x$.

CORRIGÉ

La fonction $\cos$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $-\sin$. Par la propriété de u^2, avec $u = \cos$, la fonction $x \mapsto \cos^2 x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto 2\cos x \times (-\sin x)$. Par la propriété de la somme, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2\sin x \cos x + \sin x \\ &= \sin x\,(1 - 2\cos x). \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $f'(x) = \sin x\,(1 - 2\cos x)$.

3.

Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0,\pi]$, puis dresser le tableau de variations de f sur $[0,\pi]$.

INDICE

Outil : sur $[0,\pi]$, $\sin x \geq 0$; le cosinus y est strictement décroissant et vaut $\frac{1}{2}$ en $\frac{\pi}{3}$.

CORRIGÉ

Signe de $\sin x$. Sur $]0,\pi[$, $\sin x > 0$; de plus $\sin 0 = \sin \pi = 0$.

Signe de $1-2\cos x$. Le cosinus est strictement décroissant sur $[0,\pi]$ et $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Donc $1-2\cos x < 0$ sur $\left[0,\frac{\pi}{3}\right[$ et $1-2\cos x > 0$ sur $\left]\frac{\pi}{3},\pi\right]$.

Variations. Ainsi $f'(x) < 0$ sur $\left]0,\frac{\pi}{3}\right[$ et $f'(x) > 0$ sur $\left]\frac{\pi}{3},\pi\right[$. Par le théorème du signe de la dérivée, f est strictement décroissante sur $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$.

Valeurs. $f(0) = 1-1 = 0$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$ et $f(\pi) = 1+1 = 2$.

Conclusion. Sur $[0,\pi]$, f décroît de 0 à $-\frac{1}{4}$ sur $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$, puis croît de $-\frac{1}{4}$ à 2 sur $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$.

4.

En déduire le sens de variation de f sur $[-\pi,0]$.

INDICE

Outil : un axe de symétrie inverse le sens de variation sur l'intervalle symétrique.

CORRIGÉ

Intervalles symétriques. Par rapport à l'axe des ordonnées, le symétrique de $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ est $\left[-\frac{\pi}{3},0\right]$, et celui de $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$ est $\left[-\pi,-\frac{\pi}{3}\right]$.

Sens de variation. L'axe des ordonnées est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$: le sens de variation s'inverse sur l'intervalle symétrique.

Conclusion. f est strictement décroissante sur $\left[-\pi,-\frac{\pi}{3}\right]$ et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{3},0\right]$.

Exercice 6

Point d'inflexion et centre d'une courbe de degré 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 1$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion A, dont on précisera les coordonnées.

INDICE

Outil : la dérivée des puissances ; puis le signe de la fonction affine f''.

CORRIGÉ

Dérivées. Le polynôme f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3x^2 + 12x - 9, \\ f''(x) &= -6x + 12 \\ &= -6(x - 2). \end{aligned}$$

Signe de $f''(x)$. La fonction affine f'' est strictement positive pour $x < 2$, nulle en 2, strictement négative pour $x > 2$. Elle s'annule donc en 2 en changeant de signe : par la propriété de la dérivée seconde qui s'annule en changeant de signe, le point $A\big(2, f(2)\big)$ est un point d'inflexion.

Coordonnées. $f(2) = -8 + 24 - 18 + 1 = -1$.

Conclusion. $f'(x) = -3x^2 + 12x - 9$, $f''(x) = -6(x - 2)$, et $\mathcal{C}_f$ admet le point d'inflexion $A(2, -1)$.

2.

Montrer que, pour tout réel x, $f(4-x)+f(x)=-2$. Interpréter graphiquement.

INDICE

Outil : pose $x=2+h$, et développe $f(2+h)$ en puissances de h.

CORRIGÉ

Développement de $f(2+h)$. Soit $h\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &f(2+h)\\ &=-(2+h)^3+6(2+h)^2\\ &\quad-9(2+h)+1\\ &=-8-12h-6h^2-h^3\\ &\quad+24+24h+6h^2\\ &\quad-18-9h+1\\ &=-1+3h-h^3. \end{aligned}$$

Valeur en $2-h$. En remplaçant h par $-h$, on obtient $f(2-h)=-1-3h+h^3$. Donc $f(2-h)+f(2+h)=-2$.

Retour à x. Soit $x\in\mathbb{R}$; posons $h=x-2$. Alors $2+h=x$ et $2-h=4-x$, d'où $f(4-x)+f(x)=-2=2\times(-1)$.

Conclusion. Pour tout réel x, $f(4-x)+f(x)=-2$. Par la caractérisation d'un centre de symétrie, avec $a=2$ et $b=-1$, le point $A(2,-1)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

3.

Écrire une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en A, puis étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T.

INDICE

Outil : réutilise le développement de $f(2+h)$ obtenu à la question 2.

CORRIGÉ

Tangente. On a $f(2)=-1$ et $f'(2)=-12+24-9=3$. La tangente T a pour équation $y=3(x-2)-1$, soit $y=3x-7$.

Écart. Soit $x\in\mathbb{R}$ et $h=x-2$. D'après la question 2, $f(x)=-1+3h-h^3$, et $3x-7=3h-1$. Donc :

$$\begin{aligned} &f(x)-(3x-7)\\ &=-1+3h-h^3-(3h-1)\\ &=-h^3=-(x-2)^3. \end{aligned}$$

Signe. L'écart $-(x-2)^3$ a le signe de $-(x-2)$: strictement positif pour $x<2$, strictement négatif pour $x>2$.

Conclusion. La tangente en A a pour équation $y=3x-7$. La courbe est au-dessus de T sur $]-\infty,2[$ et au-dessous sur $]2,+\infty[$: elle traverse T en A.

Exercice 7

Étude partielle d'une fonction rationnelle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - x + 7}{x - 1},$$

et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Calculer les limites de f en 1 à droite et à gauche. Interpréter graphiquement.

INDICE

Outil : la limite du numérateur en 1 et le signe de $x - 1$.

CORRIGÉ

Quand x tend vers 1, le numérateur $2x^2 - x + 7$ tend vers $8 > 0$ et le dénominateur $x - 1$ tend vers 0.

À droite de 1. Pour $x > 1$, $x - 1 > 0$. Par la règle de la limite d'un quotient :

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty.$$

À gauche de 1. Pour $x < 1$, $x - 1 < 0$. Par la même règle :

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty.$$

Conclusion. f tend vers $+\infty$ à droite de 1 et vers $-\infty$ à gauche : la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

2.

Vérifier que, pour tout réel $x \neq 1$:

$$f(x) = 2x + 1 + \frac{8}{x-1}.$$

En déduire une asymptote oblique (Δ) et la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (Δ).

INDICE

Outil : développe $(2x+1)(x-1)$. Puis étudie le signe de $\dfrac{8}{x-1}$.

CORRIGÉ

Écriture de $f(x)$. Soit $x \neq 1$:

$$\begin{aligned}&(2x+1)(x-1)+8\\&= 2x^2 - x - 1 + 8\\&= 2x^2 - x + 7.\end{aligned}$$

En divisant par $x - 1 \neq 0$, on obtient $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{8}{x-1}$.

Asymptote. L'écart $f(x) - (2x+1) = \dfrac{8}{x-1}$ tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$, par quotient d'un numérateur constant par une expression de limite infinie. Le coefficient directeur 2 n'est pas nul : la droite (Δ) d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote oblique des deux côtés.

Position. L'écart $\dfrac{8}{x-1}$ a le signe de $x - 1$: strictement positif sur $]1, +\infty[$, strictement négatif sur $]-\infty, 1[$.

Conclusion. La droite (Δ) d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$; la courbe est strictement au-dessus de (Δ) sur $]1, +\infty[$ et strictement au-dessous sur $]-\infty, 1[$.

3.

Montrer que, pour tout réel $x \neq 1$:

$$f'(x) = \frac{2(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}.$$

Dresser le tableau de variations de f.

INDICE

Outil : dérive l'écriture de la question 2. **Point délicat :** le théorème du signe de la dérivée s'applique sur chacun des intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$, séparément.

CORRIGÉ

Dérivée. D'après la question 2, f est la somme de $x \mapsto 2x+1$ et de $x \mapsto \dfrac{8}{x-1}$, dérivables sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$. Par la propriété de l'inverse, la dérivée de $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{(x-1)^2}$. Pour tout $x \neq 1$, avec $(x-1)^2 - 4 = (x-3)(x+1)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 - \frac{8}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2\big((x-1)^2 - 4\big)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

Signe de $f'(x)$. Comme $(x-1)^2 > 0$, $f'(x)$ a le signe de $(x-3)(x+1)$: strictement positif sur $]-\infty, -1[$ et sur $]3, +\infty[$, strictement négatif sur $]-1, 1[$ et sur $]1, 3[$.

Variations. Par le théorème du signe de la dérivée, appliqué séparément sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$: f est strictement croissante sur $]-\infty, -1]$, strictement décroissante sur $[-1, 1[$ et sur $]1, 3]$, strictement croissante sur $[3, +\infty[$.

Valeurs et limites. $f(-1) = \dfrac{10}{-2} = -5$ et $f(3) = \dfrac{22}{2} = 11$. Par la limite d'une fraction rationnelle à l'infini, f tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et vers $+\infty$ en $+\infty$; les limites en 1 sont celles de la question 1.

Conclusion. Sur $]-\infty, 1[$, f croît de $-\infty$ à -5 (maximum local en -1), puis décroît de -5 à $-\infty$. Sur $]1, +\infty[$, f décroît de $+\infty$ à 11 (minimum local en 3), puis croît de 11 à $+\infty$.

Exercice 8

Lire un nombre de solutions, puis le confirmer

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1.

Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, puis dresser son tableau de variations.

INDICE

Outil : la limite d'un polynôme à l'infini ; puis $f'(x)$, un trinôme que l'on factorise par x.

CORRIGÉ

Limites. Par la limite d'un polynôme à l'infini, $f(x)$ a la même limite que x^3 : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

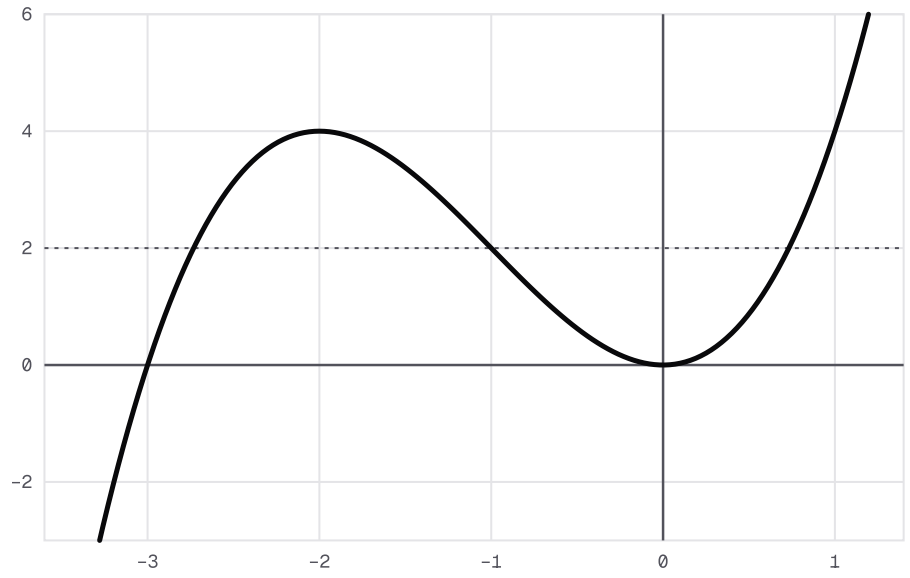
Dérivée. Le polynôme f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$. Ce trinôme a pour racines -2 et 0, et pour coefficient dominant $3 > 0$: il est strictement positif sur $]-\infty, -2[$ et sur $]0, +\infty[$, strictement négatif sur $]-2, 0[$.

Variations. Par le théorème du signe de la dérivée, f est strictement croissante sur $]-\infty, -2]$, strictement décroissante sur $[-2, 0]$, strictement croissante sur $[0, +\infty[$. On a $f(-2) = -8 + 12 = 4$ et $f(0) = 0$.

Conclusion. f croît de $-\infty$ à 4 sur $]-\infty, -2]$, décroît de 4 à 0 sur $[-2, 0]$, puis croît de 0 à $+\infty$ sur $[0, +\infty[$.

2.

Soit m un réel. En lisant $\mathcal{C}_f$ et la droite d'équation $y = m$, conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ selon les valeurs de m.



Courbe de f : x ↦ x³ + 3x² et une droite horizontale d'équation y = m, tracée ici pour une valeur de m : les solutions de f(x) = m sont les abscisses des points communs.

INDICE

Outil : fais glisser la droite horizontale $y = m$ du bas vers le haut ; compare m aux ordonnées des extremums locaux, lues dans le tableau.

CORRIGÉ

Les solutions de l'équation $f(x) = m$ sont les abscisses des points communs à $\mathcal{C}_f$ et à la droite d'équation $y = m$. On compare m aux valeurs 0 et 4 des extremums locaux, lues dans le tableau de variations.

Conclusion. On conjecture que l'équation $f(x) = m$ a :

- une solution si $m < 0$ ou si $m > 4$;
- deux solutions si $m = 0$ ou si $m = 4$;
- trois solutions si $0 < m < 4$.

C'est une lecture graphique : elle reste une conjecture tant qu'un calcul ne l'a pas confirmée.

3.

Confirmer la conjecture par le calcul pour $m = 0$, puis pour $m = 4$.

INDICE

Outil : factorise $f(x)$ par x^2. Pour $m = 4$, cherche une racine de $f(x) - 4$ parmi les abscisses des extremums, puis factorise.

CORRIGÉ

Cas $m = 0$. Pour tout réel x, $f(x) = x^2(x + 3)$. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul : $f(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = -3$.

Cas $m = 4$. On vérifie en développant que, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&(x - 1)(x + 2)^2\\&= (x - 1)(x^2 + 4x + 4)\\&= x^3 + 3x^2 - 4\\&= f(x) - 4.\end{aligned}$$

Donc $f(x) = 4$ si et seulement si $x = 1$ ou $x = -2$.

Conclusion. L'équation $f(x) = 0$ a exactement deux solutions, -3 et 0 ; l'équation $f(x) = 4$ a exactement deux solutions, -2 et 1. Les deux cas confirment la conjecture.