BURHAN

Étude et représentation des fonctions : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/etude-et-representation-des-fonctions/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Étude et représentation des fonctions	Application	10

Exercice 1

Deux asymptotes parallèles aux axes

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par :

$$f(x) = \frac{6x + 1}{3 - x},$$

et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthogonal.

1.

Calculer les limites de f en 3 à droite et à gauche. Interpréter graphiquement.

INDICE

Outil : le numérateur a une limite non nulle ; étudie le signe de $3 - x$ de chaque côté de 3.

2.

Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Interpréter graphiquement.

INDICE

Outil : la limite d'une fraction rationnelle à l'infini est celle du quotient de ses termes de plus haut degré.

3.

Montrer que, pour tout réel $x \neq 3$:

$$f(x) + 6 = \frac{19}{3 - x}.$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ coupe-t-elle la droite d'équation $y = -6$?

INDICE

Outil : réduis $f(x) + 6$ au même dénominateur $3 - x$.

Exercice 2

Une asymptote oblique donnée

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{x + 2},$$

et (D) la droite d'équation $y = x + 2$.

1.

Montrer que, pour tout réel $x \neq -2$:

$$f(x) - (x + 2) = -\frac{3}{x + 2}.$$

INDICE

Outil : écris $x + 2$ avec le dénominateur $x + 2$, puis développe $(x + 2)^2$.

2.

En déduire que (D) est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

INDICE

Outil : la définition d'une asymptote oblique demande une limite nulle de l'écart.

Exercice 3

Une branche parabolique de direction oblique

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = 2x - 3\sqrt{x}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

INDICE

Outil : une factorisation par $\sqrt{x}$, puis la limite d'un produit. **Point délicat :** la somme $2x - 3\sqrt{x}$ donne une forme indéterminée.

2.

Calculer $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

INDICE

Outil : pour $x > 0$, $\dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

3.

Calculer $\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - 2x\big)$. Conclure sur la branche infinie de $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

INDICE

Outil : l'arbre de décision des branches infinies : une limite réelle donne une asymptote, une limite infinie non.

Exercice 4

Une courbe et une droite : trois points communs

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$, $\mathcal{C}_f$ sa courbe, et (D) la droite d'équation $y = x - 1$.

1.

Montrer que, pour tout réel x :

$$f(x) - (x-1) = (x-2)(x-1)(x+1).$$

INDICE

Outil : développe le membre de droite, en commençant par $(x-1)(x+1)$.

2.

En déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de (D), et leurs points d'intersection.

INDICE

Outil : dresse le tableau de signes des trois facteurs, rangés selon $-1 < 1 < 2$.

Exercice 5

Concavité de la courbe d'un polynôme de degré 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 1$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$, et montrer que $f''(x) = 12(x+2)(x-1)$.

INDICE

Outil : la dérivée des puissances et la propriété de la somme, appliquées deux fois.

2.

Étudier la concavité de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : le signe d'un trinôme, puis le lien entre signe de f'' et concavité.

Exercice 6

Point d'inflexion d'une courbe trigonométrique

Soit f la fonction définie sur $]0, 2\pi[$ par $f(x) = x + \sin x$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$, puis étudier le signe de $f''(x)$ sur $]0, 2\pi[$.

INDICE

Outil : les dérivées du sinus et du cosinus ; le signe de $\sin x$ sur $]0, \pi[$ et sur $]\pi, 2\pi[$.

2.

En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion A, dont on donnera les coordonnées.

INDICE

Outil : une dérivée seconde qui s'annule en changeant de signe.

3.

Écrire une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en A. Préciser la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T.

INDICE

Outil : $y = f'(\pi)(x - \pi) + f(\pi)$, puis la concavité de chaque côté de π.

Exercice 7

Un axe de symétrie et le domaine réduit

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x}{x^2 - 6x + 10},$$

et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthogonal.

1.

Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : la forme canonique du dénominateur.

2.

Montrer que la droite d'équation $x = 3$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : la caractérisation d'un axe $x = a$; ici $2a - x = 6 - x$. Développe $(6 - x)^2 - 6(6 - x)$.

3.

On admet que f est strictement croissante sur $[3, +\infty[$. En déduire le sens de variation de f sur $]-\infty, 3]$, puis le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : un axe de symétrie inverse le sens de variation sur l'intervalle symétrique.

Exercice 8

Un centre de symétrie et le sens de variation

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 10}{x - 1},$$

et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Montrer que, pour tout réel $x \neq 1$, le réel $f(x)$ s'écrit $x - 1 + \dfrac{9}{x-1}$.

INDICE

Outil : remarque que $x^2 - 2x + 10 = (x-1)^2 + 9$.

2.

Montrer que le point $\Omega(1, 0)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : la caractérisation d'un centre $\Omega(a, b)$, avec $a = 1$ et $b = 0$. Vérifie d'abord que $2 - x \neq 1$ quand $x \neq 1$.

3.

On admet que f est strictement décroissante sur $]1, 4]$ et strictement croissante sur $[4, +\infty[$, et que $f'(4) = 0$. En déduire son sens de variation sur $]-\infty, 1[$, puis la valeur de $f'(-2)$ sans dériver.

INDICE

Outil : un centre de symétrie conserve le sens de variation ; pour un centre, les nombres dérivés en deux points symétriques sont égaux. Cherche les symétriques de $]1, 4]$ et de $[4, +\infty[$ par rapport à 1.

Exercice 9

Courbe de la valeur absolue d'un trinôme

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 5x + 4$, de courbe la parabole $\mathcal{P}$, et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = |f(x)|$.

1.

Factoriser $f(x)$, puis étudier son signe.

INDICE

Outil : cherche une racine évidente du trinôme.

2.

Exprimer $g(x)$ sans valeur absolue sur chaque intervalle. Expliquer comment obtenir la courbe de g à partir de $\mathcal{P}$.

INDICE

Outil : $|f(x)| = f(x)$ si $f(x) \geq 0$, et $|f(x)| = -f(x)$ si $f(x) < 0$.

Exercice 10

Réduire l'étude par la période et la parité

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(4x) - 2\cos(2x)$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Montrer que f est périodique de période π.

INDICE

Outil : le cosinus est 2π-périodique ; calcule $f(x + \pi)$.

2.

Montrer que f est paire.

INDICE

Outil : le cosinus est pair.

3.

En déduire qu'il suffit d'étudier f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Comment obtient-on ensuite $\mathcal{C}_f$?

INDICE

Outil : la réduction par une période, puis par l'axe des ordonnées.