BURHAN

Étude et représentation des fonctions : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/etude-et-representation-des-fonctions/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Étude et représentation des fonctions	Application	10

Exercice 1

Deux asymptotes parallèles aux axes

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par :

$$f(x) = \frac{6x + 1}{3 - x},$$

et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthogonal.

1.

Calculer les limites de f en 3 à droite et à gauche. Interpréter graphiquement.

INDICE

Outil : le numérateur a une limite non nulle ; étudie le signe de $3 - x$ de chaque côté de 3.

CORRIGÉ

Quand x tend vers 3, le numérateur $6x + 1$ tend vers $19 > 0$ et le dénominateur $3 - x$ tend vers 0. Le signe de $3 - x$ près de 3 fixe le signe de la limite.

À droite de 3. Pour $x > 3$, $3 - x < 0$. Par la règle de la limite d'un quotient (numérateur de limite non nulle, dénominateur qui tend vers 0 en restant négatif) :

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty.$$

À gauche de 3. Pour $x < 3$, $3 - x > 0$. Par la même règle :

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = +\infty.$$

Conclusion. f tend vers $-\infty$ à droite de 3 et vers $+\infty$ à gauche de 3 : la droite d'équation $x = 3$ est une asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

2.

Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Interpréter graphiquement.

INDICE

Outil : la limite d'une fraction rationnelle à l'infini est celle du quotient de ses termes de plus haut degré.

CORRIGÉ

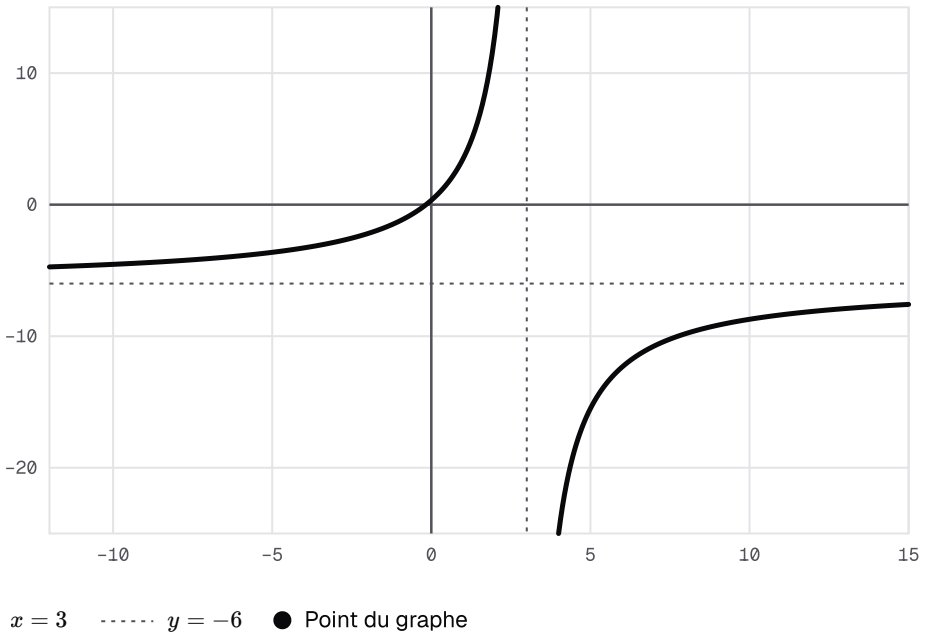
Par la limite d'une fraction rationnelle à l'infini, $f(x)$ a, en $+\infty$ comme en $-\infty$, la même limite que le quotient de ses termes de plus haut degré. Pour $x \neq 0$:

$$\frac{6x}{-x} = -6.$$

Donc :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -6,$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -6.$$

Conclusion. f tend vers -6 en $+\infty$ et en $-\infty$: la droite d'équation $y = -6$ est une asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.



Courbe de f : x ↦ (6x + 1)/(3 − x) avec ses asymptotes : verticale d'équation x = 3 et horizontale d'équation y = −6.

3.

Montrer que, pour tout réel $x \neq 3$:

$$f(x) + 6 = \frac{19}{3 - x}.$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ coupe-t-elle la droite d'équation $y = -6$?

INDICE

Outil : réduis $f(x) + 6$ au même dénominateur $3 - x$.

CORRIGÉ

Calcul de l'écart. Soit x un réel différent de 3. On réduit au dénominateur $3 - x$:

$$\begin{aligned} & f(x) + 6 \\ &= \frac{6x + 1 + 6(3 - x)}{3 - x} \\ &= \frac{6x + 1 + 18 - 6x}{3 - x} \\ &= \frac{19}{3 - x}. \end{aligned}$$

Points communs. Le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x est sur la droite d'équation $y = -6$ si et seulement si $f(x) + 6 = 0$. Or le quotient $\frac{19}{3 - x}$ a un numérateur non nul : il ne s'annule pour aucun réel $x \neq 3$.

Conclusion. Pour tout réel $x \neq 3$, $f(x) + 6 = \frac{19}{3 - x}$, et $\mathcal{C}_f$ ne coupe pas la droite d'équation $y = -6$, son asymptote horizontale.

Exercice 2

Une asymptote oblique donnée

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{x + 2},$$

et (D) la droite d'équation $y = x + 2$.

1.

Montrer que, pour tout réel $x \neq -2$:

$$f(x) - (x + 2) = -\frac{3}{x + 2}.$$

INDICE

Outil : écris $x + 2$ avec le dénominateur $x + 2$, puis développe $(x + 2)^2$.

CORRIGÉ

Soit x un réel différent de -2. On écrit $x + 2$ avec le dénominateur $x + 2$, et l'on utilise $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$:

$$\begin{aligned} & f(x) - (x + 2) \\ &= \frac{x^2 + 4x + 1 - (x + 2)^2}{x + 2} \\ &= \frac{x^2 + 4x + 1 - x^2 - 4x - 4}{x + 2} \\ &= -\frac{3}{x + 2}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel $x \neq -2$, $f(x) - (x + 2) = -\dfrac{3}{x + 2}$.

2.

En déduire que (D) est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

INDICE

Outil : la définition d'une asymptote oblique demande une limite nulle de l'écart.

CORRIGÉ

Limite de l'écart. Quand x tend vers $+\infty$, $x+2$ tend vers $+\infty$; quand x tend vers $-\infty$, $x+2$ tend vers $-\infty$. Dans les deux cas, par la limite d'un quotient de numérateur constant, $-\dfrac{3}{x+2}$ tend vers 0. D'après la question 1 :

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-(x+2)\big)=0,$$
$$\lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-(x+2)\big)=0.$$

Coefficient directeur. La droite (D) a pour coefficient directeur 1, qui n'est pas nul : c'est bien une droite oblique.

Conclusion. Par la définition d'une asymptote oblique, (D) est une asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

Exercice 3

Une branche parabolique de direction oblique

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = 2x - 3\sqrt{x}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

INDICE

Outil : une factorisation par $\sqrt{x}$, puis la limite d'un produit. **Point délicat :** la somme $2x - 3\sqrt{x}$ donne une forme indéterminée.

CORRIGÉ

La différence $2x - 3\sqrt{x}$ conduit en $+\infty$ à une forme indéterminée : on factorise par $\sqrt{x}$. Pour tout $x \geq 0$, $x = \sqrt{x} \times \sqrt{x}$, donc :

$$f(x) = \sqrt{x}\left(2\sqrt{x} - 3\right).$$

Quand x tend vers $+\infty$, $\sqrt{x}$ tend vers $+\infty$; par produit par 2 puis par somme, $2\sqrt{x} - 3$ tend aussi vers $+\infty$. Par la limite d'un produit :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Conclusion. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2.

Calculer $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

INDICE

Outil : pour $x > 0$, $\dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

CORRIGÉ

Soit $x > 0$. Comme $\dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= 2 - \frac{3\sqrt{x}}{x} \\ &= 2 - \frac{3}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Quand x tend vers $+\infty$, $\sqrt{x}$ tend vers $+\infty$, donc $\dfrac{3}{\sqrt{x}}$ tend vers 0 (limite d'un quotient de numérateur constant). Par la limite d'une somme :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2.$$

Conclusion. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$.

3.

Calculer $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-2x\big)$. Conclure sur la branche infinie de $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

INDICE

Outil : l'arbre de décision des branches infinies : une limite réelle donne une asymptote, une limite infinie non.

CORRIGÉ

Limite de $f(x)-2x$. Pour tout $x\geq 0$, $f(x)-2x=-3\sqrt{x}$. Comme $\sqrt{x}$ tend vers $+\infty$, par produit par $-3<0$:

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-2x\big)=-\infty.$$

Nature de la branche infinie. En $+\infty$, les trois limites obtenues sont :

- $f(x)$ tend vers $+\infty$;
- $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers le réel non nul 2 ;
- $f(x)-2x$ tend vers $-\infty$, et non vers un réel.

D'après l'arbre de décision des branches infinies, ce dernier cas exclut une asymptote oblique et donne une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=2x$.

Conclusion. En $+\infty$, $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=2x$; elle n'a pas d'asymptote oblique.

Exercice 4

Une courbe et une droite : trois points communs

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$, $\mathcal{C}_f$ sa courbe, et (D) la droite d'équation $y = x - 1$.

1.

Montrer que, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &f(x) - (x-1) \\ &= (x-2)(x-1)(x+1). \end{aligned}$$

INDICE

Outil : développe le membre de droite, en commençant par $(x-1)(x+1)$.

CORRIGÉ

Soit $x \in \mathbb{R}$. On développe séparément les deux membres.

Membre de gauche.

$$\begin{aligned} &f(x) - (x-1) \\ &= x^3 - 2x^2 + 1 - x + 1 \\ &= x^3 - 2x^2 - x + 2. \end{aligned}$$

Membre de droite. Comme $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$:

$$\begin{aligned} &(x-2)(x-1)(x+1) \\ &= (x-2)(x^2-1) \\ &= x^3 - x - 2x^2 + 2 \\ &= x^3 - 2x^2 - x + 2. \end{aligned}$$

Conclusion. Les deux membres sont égaux : pour tout réel x, $f(x) - (x-1) = (x-2)(x-1)(x+1)$.

2.

En déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de (D), et leurs points d'intersection.

INDICE

Outil : dresse le tableau de signes des trois facteurs, rangés selon $-1 < 1 < 2$.

CORRIGÉ

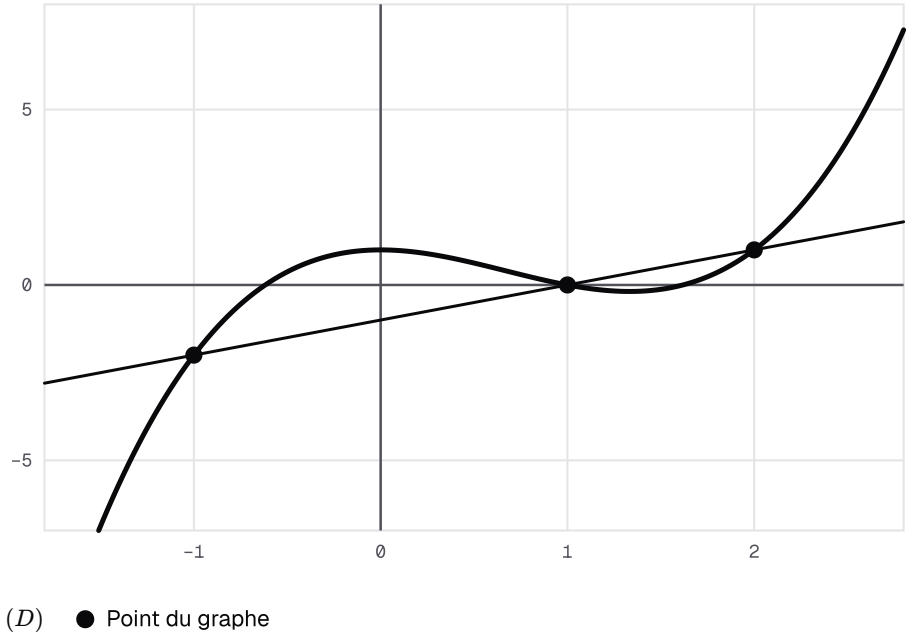
La position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (D) se lit sur le signe de l'écart $d(x) = f(x) - (x-1)$: la courbe est au-dessus de (D) là où $d(x) > 0$, au-dessous là où $d(x) < 0$.

Signe de l'écart. D'après la question 1, $d(x) = (x-2)(x-1)(x+1)$. Les trois facteurs s'annulent en -1, 1 et 2, rangés selon $-1 < 1 < 2$. Le tableau de signes donne :

- $d(x) < 0$ sur $]-\infty, -1[$ et sur $]1, 2[$;
- $d(x) > 0$ sur $]-1, 1[$ et sur $]2, +\infty[$;
- $d(x) = 0$ en -1, en 1 et en 2.

Points d'intersection. Leurs abscisses sont -1, 1 et 2 ; les ordonnées se calculent avec $y = x - 1$.

Conclusion. $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessous de (D) sur $]-\infty, -1[$ et sur $]1, 2[$, strictement au-dessus sur $]-1, 1[$ et sur $]2, +\infty[$. Les points d'intersection sont $(-1, -2)$, $(1, 0)$ et $(2, 1)$.



Courbe de f : x ↦ x³ − 2x² + 1 et droite (D) d'équation y = x − 1 : trois points communs, d'abscisses −1, 1 et 2, qui séparent les intervalles où la courbe est au-dessous puis au-dessus de (D).

Exercice 5

Concavité de la courbe d'un polynôme de degré 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 1$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$, et montrer que $f''(x) = 12(x+2)(x-1)$.

INDICE

Outil : la dérivée des puissances et la propriété de la somme, appliquées deux fois.

CORRIGÉ

Dérivabilité. La fonction f est un polynôme : elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée, polynôme elle aussi, l'est encore. Donc f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Dérivées. Par la dérivée de $x \mapsto x^n$ et celle d'une somme, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 + 6x^2 - 24x, \\ f''(x) &= 12x^2 + 12x - 24. \end{aligned}$$

Factorisation. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &12(x+2)(x-1) \\ &= 12(x^2 + x - 2) \\ &= 12x^2 + 12x - 24. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 24x$ et $f''(x) = 12(x+2)(x-1)$.

2.

Étudier la concavité de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : le signe d'un trinôme, puis le lien entre signe de f'' et concavité.

CORRIGÉ

Signe de $f''(x)$. Le trinôme $12(x+2)(x-1)$ a pour racines -2 et 1, et pour coefficient dominant $12 > 0$. Il est positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles :

- $f''(x) \geq 0$ sur $]-\infty, -2]$ et sur $[1, +\infty[$;
- $f''(x) \leq 0$ sur $[-2, 1]$.

Concavité. On applique, sur chacun de ces intervalles, le théorème qui relie la concavité de la courbe au signe de la dérivée seconde.

Conclusion. $\mathcal{C}_f$ est convexe sur $]-\infty, -2]$ et sur $[1, +\infty[$, et concave sur $[-2, 1]$.

Exercice 6

Point d'inflexion d'une courbe trigonométrique

Soit f la fonction définie sur $]0, 2\pi[$ par $f(x) = x + \sin x$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$, puis étudier le signe de $f''(x)$ sur $]0, 2\pi[$.

INDICE

Outil : les dérivées du sinus et du cosinus ; le signe de $\sin x$ sur $]0, \pi[$ et sur $]\pi, 2\pi[$.

CORRIGÉ

Dérivées. La fonction f est la somme de $x \mapsto x$ et du sinus, dérivables sur $]0, 2\pi[$. Pour tout $x \in]0, 2\pi[$, $f'(x) = 1 + \cos x$. La fonction f' est à son tour dérivable, et :

$$f''(x) = -\sin x.$$

Signe de $f''(x)$. Le signe de $f''(x)$ est l'opposé de celui de $\sin x$:

- sur $]0, \pi[$, $\sin x > 0$, donc $f''(x) < 0$;
- sur $]\pi, 2\pi[$, $\sin x < 0$, donc $f''(x) > 0$;
- en π, $f''(\pi) = -\sin \pi = 0$.

Conclusion. $f'(x) = 1 + \cos x$ et $f''(x) = -\sin x$; f'' est strictement négative sur $]0, \pi[$, nulle en π, strictement positive sur $]\pi, 2\pi[$.

2.

En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion A, dont on donnera les coordonnées.

INDICE

Outil : une dérivée seconde qui s'annule en changeant de signe.

CORRIGÉ

On cherche un point où la dérivée seconde s'annule en changeant de signe.

Changement de signe en π. D'après la question 1, $f''(\pi) = 0$, $f''(x) < 0$ sur $]0, \pi[$ et $f''(x) > 0$ sur $]\pi, 2\pi[$. Avec $r = \pi$, on a :

$$]\pi - r, \pi + r[=]0, 2\pi[.$$

Ainsi f'' s'annule en π en changeant de signe sur un intervalle ouvert centré en π. Par la propriété de la dérivée seconde qui s'annule en changeant de signe, le point $A\big(\pi, f(\pi)\big)$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

Coordonnées. $f(\pi) = \pi + \sin \pi = \pi$.

Conclusion. $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion $A(\pi, \pi)$.

3.

Écrire une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en A. Préciser la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T.

INDICE

Outil : $y = f'(\pi)(x - \pi) + f(\pi)$, puis la concavité de chaque côté de π.

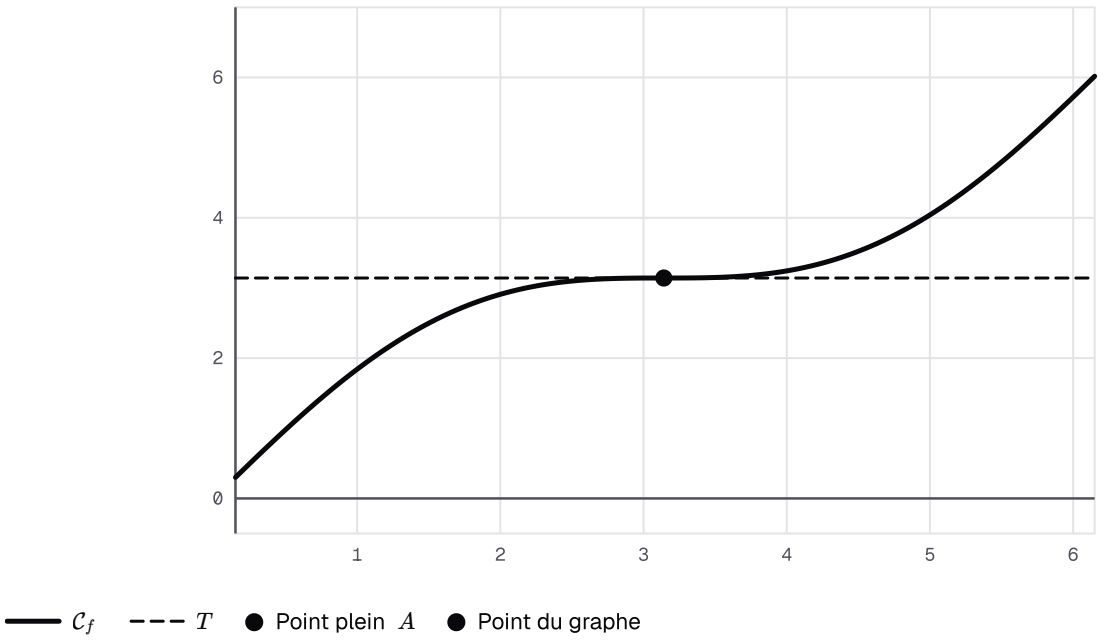
CORRIGÉ

Tangente. On a $f(\pi) = \pi$ et $f'(\pi) = 1 + \cos \pi = 0$. La tangente T a pour équation $y = f'(\pi)(x - \pi) + f(\pi)$, soit $y = \pi$: elle est horizontale.

À gauche de A. D'après la question 1, $f''(x) \leq 0$ sur $]0, \pi]$, point π compris. Par le théorème liant concavité et signe de la dérivée seconde, $\mathcal{C}_f$ est concave sur $]0, \pi]$. Par la définition de la concavité, elle y est au-dessous de ses tangentes, donc de T, tangente au point d'abscisse π de cet intervalle.

À droite de A. De même, $f''(x) \geq 0$ sur $[\pi, 2\pi[$: $\mathcal{C}_f$ y est convexe, donc au-dessus de T.

Conclusion. La tangente T a pour équation $y = \pi$. La courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de T sur $]0, \pi]$ et au-dessus sur $[\pi, 2\pi[$: elle traverse sa tangente en A.



Courbe de f : x ↦ x + sin x, tracée à l'intérieur de]0, 2π[, et sa tangente horizontale T d'équation y = π au point d'inflexion A(π, π) : concave avant A, sous T ; convexe après A, au-dessus de T.

Exercice 7

Un axe de symétrie et le domaine réduit

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x}{x^2 - 6x + 10},$$

et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthogonal.

1.

Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : la forme canonique du dénominateur.

CORRIGÉ

Soit $x \in \mathbb{R}$. On écrit le dénominateur sous forme canonique :

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 10 &= (x-3)^2 + 1 \\ &\geq 1 > 0. \end{aligned}$$

Le dénominateur ne s'annule donc pour aucun réel x.

Conclusion. Le quotient $f(x)$ existe pour tout réel x : f est définie sur $\mathbb{R}$.

2.

Montrer que la droite d'équation $x = 3$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : la caractérisation d'un axe $x = a$; ici $2a - x = 6 - x$. Développe $(6-x)^2 - 6(6-x)$.

CORRIGÉ

D'après la caractérisation d'un axe de symétrie, avec $a = 3$, il s'agit de montrer que, pour tout réel x, $6 - x \in \mathbb{R}$ et $f(6-x) = f(x)$.

Ensemble de définition. Pour tout réel x, $6 - x$ est réel, donc appartient à l'ensemble de définition $\mathbb{R}$.

Numérateur. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &(6-x)^2 - 6(6-x) \\ &= 36 - 12x + x^2 - 36 + 6x \\ &= x^2 - 6x. \end{aligned}$$

Dénominateur. Il est égal au numérateur augmenté de 10 : il prend lui aussi la même valeur en $6 - x$ et en x. Donc $f(6-x) = f(x)$.

Conclusion. Par la caractérisation d'un axe de symétrie, la droite d'équation $x = 3$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

3.

On admet que f est strictement croissante sur $[3, +\infty[$. En déduire le sens de variation de f sur $]-\infty, 3]$, puis le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : un axe de symétrie inverse le sens de variation sur l'intervalle symétrique.

CORRIGÉ

Sens de variation sur $]-\infty, 3]$. L'intervalle $]-\infty, 3]$ est le symétrique de $[3, +\infty[$ par rapport à 3. Un axe de symétrie inverse le sens de variation sur l'intervalle symétrique : comme f est strictement croissante sur $[3, +\infty[$, elle est strictement décroissante sur $]-\infty, 3]$.

Minimum. La fonction f décroît sur $]-\infty, 3]$ puis croît sur $[3, +\infty[$: pour tout réel x, $f(x) \geq f(3)$. Or :

$$f(3) = \frac{9 - 18}{9 - 18 + 10} = -9.$$

Conclusion. f est strictement décroissante sur $]-\infty, 3]$, et son minimum sur $\mathbb{R}$ est $f(3) = -9$.

Exercice 8

Un centre de symétrie et le sens de variation

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 10}{x - 1},$$

et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Montrer que, pour tout réel $x \neq 1$, le réel $f(x)$ s'écrit $x - 1 + \dfrac{9}{x-1}$.

INDICE

Outil : remarque que $x^2 - 2x + 10 = (x-1)^2 + 9$.

CORRIGÉ

Soit x un réel différent de 1. Par la forme canonique, $x^2 - 2x + 10 = (x-1)^2 + 9$. On divise par $x - 1 \neq 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x-1)^2 + 9}{x-1} \\ &= x - 1 + \frac{9}{x-1}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel $x \neq 1$, $f(x) = x - 1 + \dfrac{9}{x-1}$.

2.

Montrer que le point $\Omega(1, 0)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : la caractérisation d'un centre $\Omega(a, b)$, avec $a = 1$ et $b = 0$. Vérifie d'abord que $2 - x \neq 1$ quand $x \neq 1$.

CORRIGÉ

D'après la caractérisation d'un centre de symétrie, avec $a = 1$ et $b = 0$, il s'agit de montrer que, pour tout réel $x \neq 1$, $2 - x \neq 1$ et $f(2 - x) + f(x) = 2 \times 0$.

Ensemble de définition. Si $x \neq 1$, alors $2 - x \neq 1$: le réel $2 - x$ appartient à l'ensemble de définition.

Calcul. Soit $x \neq 1$. On a $(2 - x) - 1 = 1 - x = -(x - 1)$. D'après la question 1 :

$$\begin{aligned} &f(2 - x) \\ &= 1 - x + \frac{9}{1 - x} \\ &= -\left(x - 1 + \frac{9}{x - 1}\right) \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

Donc $f(2 - x) + f(x) = 0 = 2 \times 0$.

Conclusion. Par la caractérisation d'un centre de symétrie, $\Omega(1, 0)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

3.

On admet que f est strictement décroissante sur $]1,4]$ et strictement croissante sur $[4,+\infty[$, et que $f'(4)=0$. En déduire son sens de variation sur $]-\infty,1[$, puis la valeur de $f'(-2)$ sans dériver.

INDICE

Outil : un centre de symétrie conserve le sens de variation ; pour un centre, les nombres dérivés en deux points symétriques sont égaux. Cherche les symétriques de $]1,4]$ et de $[4,+\infty[$ par rapport à 1.

CORRIGÉ

Intervalles symétriques. Le symétrique d'un réel x par rapport à 1 est $2-x$. Le symétrique de $]1,4]$ est donc $[-2,1[$, et celui de $[4,+\infty[$ est $]-\infty,-2]$.

Sens de variation sur $]-\infty,1[$**.** Un centre de symétrie conserve le sens de variation sur les intervalles symétriques. Donc f est strictement décroissante sur $[-2,1[$ et strictement croissante sur $]-\infty,-2]$.

Contrôle. On a $f(4)=\dfrac{18}{3}=6$ et $f(-2)=\dfrac{18}{-3}=-6$: on retrouve $f(-2)+f(4)=0$.

Nombre dérivé en -2**.** Pour un centre de symétrie d'abscisse 1, la propriété de la symétrie et de la dérivée donne $f'(2-x)=f'(x)$ pour tout réel $x\neq 1$. Avec $x=4$, on obtient $f'(-2)=f'(4)=0$.

Conclusion. f est strictement croissante sur $]-\infty,-2]$ et strictement décroissante sur $[-2,1[$; de plus $f'(-2)=0$: la tangente au point d'abscisse -2 est horizontale.

Exercice 9

Courbe de la valeur absolue d'un trinôme

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 5x + 4$, de courbe la parabole $\mathcal{P}$, et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = |f(x)|$.

1.

Factoriser $f(x)$, puis étudier son signe.

INDICE

Outil : cherche une racine évidente du trinôme.

CORRIGÉ

Factorisation. On a $f(1) = 1 - 5 + 4 = 0$: le réel 1 est racine du trinôme. Le produit des racines vaut $\dfrac{4}{1} = 4$, donc l'autre racine est 4. Pour tout réel x :

$$f(x) = (x - 1)(x - 4).$$

Signe. Le coefficient dominant vaut $1 > 0$: le trinôme est strictement positif à l'extérieur de ses racines et strictement négatif entre elles.

Conclusion. Pour tout réel x, $f(x) = (x - 1)(x - 4)$; $f(x) > 0$ sur $]-\infty, 1[$ et sur $]4, +\infty[$, $f(x) < 0$ sur $]1, 4[$, et $f(1) = f(4) = 0$.

2.

Exprimer $g(x)$ sans valeur absolue sur chaque intervalle. Expliquer comment obtenir la courbe de g à partir de $\mathcal{P}$.

INDICE

Outil : $|f(x)| = f(x)$ si $f(x) \geq 0$, et $|f(x)| = -f(x)$ si $f(x) < 0$.

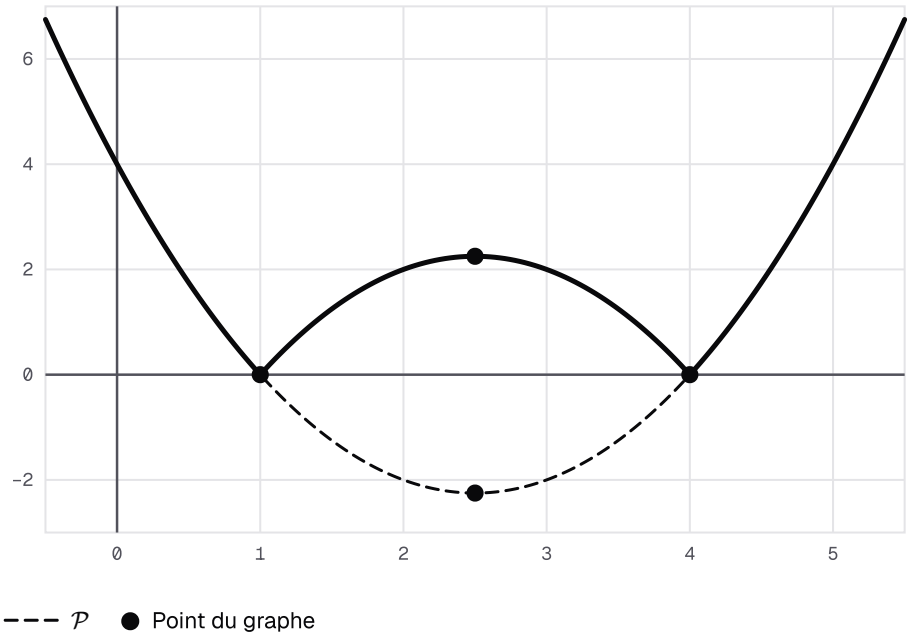
CORRIGÉ

Expression de $g(x)$. Pour tout réel x, $|f(x)| = f(x)$ si $f(x) \geq 0$, et $|f(x)| = -f(x)$ si $f(x) < 0$. D'après la question 1 :

- $g(x) = x^2 - 5x + 4$ sur $]-\infty, 1]$ et sur $[4, +\infty[$;
- $g(x) = -x^2 + 5x - 4$ sur $]1, 4[$.

Construction. La courbe de g garde les parties de $\mathcal{P}$ situées au-dessus de l'axe des abscisses ou sur cet axe. L'arc de $\mathcal{P}$ d'abscisses comprises entre 1 et 4, situé au-dessous de l'axe, est remplacé par son symétrique par rapport à cet axe.

Conclusion. On obtient la courbe de g en gardant $\mathcal{P}$ hors de $]1, 4[$ et en remplaçant l'arc d'abscisses dans $]1, 4[$ par son symétrique par rapport à l'axe des abscisses. Le sommet $\left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ de $\mathcal{P}$ devient le point $\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{4}\right)$.



Parabole P de f : x ↦ x² − 5x + 4 (en pointillés) et courbe de g = |f| : l'arc de P entre les abscisses 1 et 4 est remplacé par son symétrique par rapport à l'axe des abscisses ; le sommet (5/2, −9/4) devient (5/2, 9/4).

Exercice 10

Réduire l'étude par la période et la parité

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(4x) - 2\cos(2x)$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Montrer que f est périodique de période π.

INDICE

Outil : le cosinus est 2π-périodique ; calcule $f(x+\pi)$.

CORRIGÉ

Soit $x \in \mathbb{R}$; alors $x + \pi \in \mathbb{R}$. Le cosinus étant 2π-périodique, $\cos(4x + 4\pi) = \cos(4x)$ et $\cos(2x + 2\pi) = \cos(2x)$. Donc :

$$\begin{aligned} f(x+\pi) &= \cos(4x + 4\pi) \\ &\quad - 2\cos(2x + 2\pi) \\ &= \cos(4x) - 2\cos(2x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $f(x+\pi) = f(x)$: f est périodique de période π.

2.

Montrer que f est paire.

INDICE

Outil : le cosinus est pair.

CORRIGÉ

Ensemble de définition. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 : pour tout réel x, $-x \in \mathbb{R}$.

Calcul. Soit $x \in \mathbb{R}$. Le cosinus étant pair :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \cos(-4x) - 2\cos(-2x) \\ &= \cos(4x) - 2\cos(2x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$: f est paire.

3.

En déduire qu'il suffit d'étudier f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Comment obtient-on ensuite $\mathcal{C}_f$?

INDICE

Outil : la réduction par une période, puis par l'axe des ordonnées.

CORRIGÉ

Réduction par la période. La fonction f étant périodique de période π, il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur π, par exemple $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Réduction par la parité. La fonction f étant paire, l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$: la partie de la courbe d'abscisses dans $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ est la symétrique de celle d'abscisses dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Construction. On trace l'arc obtenu sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, puis son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées : on a la courbe sur un intervalle de longueur π. On complète par les translations de vecteur $k\pi\,\vec{i}$, où $k \in \mathbb{Z}$.

Conclusion. Il suffit d'étudier f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; $\mathcal{C}_f$ s'obtient ensuite par la symétrie d'axe l'axe des ordonnées, puis par les translations de vecteur $k\pi\,\vec{i}$, $k \in \mathbb{Z}$.