BURHAN

Étude et représentation des fonctions

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/etude-et-representation-des-fonctions/cours

Chapitre	Semestre
Étude et représentation des fonctions	Semestre 2

À quoi ressemble une courbe au loin ?

Soit f la fonction définie pour $x \neq 1$ par $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x - 1}$. Comparons $f(x)$ et $x + 2$ pour de grandes valeurs de x.

Pour $x = 11$, on trouve $f(11) = 13{,}1$, contre 13. Pour $x = 101$, $f(101) = 103{,}01$, contre 103.

Pour $x = 1001$, $f(1001) = 1003{,}001$, contre 1003. L'écart vaut $0{,}1$, puis $0{,}01$, puis $0{,}001$.

Devine : Une prédiction

D'après ces valeurs, que fait la courbe de f loin vers la droite ?

A. Elle coupe la droite d'équation $y = x + 2$ une infinité de fois.

Faux.

L'écart vaut $0{,}1$, puis $0{,}01$, puis $0{,}001$: il reste positif, la courbe ne passe pas sous la droite.

B. Elle s'approche d'une droite horizontale.

Faux.

$f(x)$ grandit comme $x + 2$: elle dépasse tout nombre fixé.

C. Elle s'approche de la droite d'équation $y = x + 2$, par-dessus.

Juste.

Juste : l'écart est positif et devient aussi petit que l'on veut.

D. Elle monte comme une parabole, de plus en plus raide.

Faux.

La courbe colle à une droite : sa pente ne grandit pas sans fin.

Correction

L'écart $f(x) - (x + 2)$ est positif et devient de plus en plus petit. La courbe se rapproche donc de la droite d'équation $y = x + 2$, en restant au-dessus.

Une telle droite s'appellera une **asymptote oblique**. Trois valeurs ne prouvent rien : ce chapitre apprend à trouver ces droites par le calcul.

Dans ce chapitre, tu étudies les branches infinies d'une courbe : asymptotes et branches paraboliques. Tu compares une courbe et une droite. Tu mesures la façon dont une courbe tourne, grâce à la dérivée seconde.

Tu utilises aussi les symétries pour réduire une étude. Enfin, tu conduis l'étude complète d'une fonction, jusqu'au tracé. Tu réutilises les limites du chapitre « Limite d'une fonction numérique » et les dérivées du chapitre « Dérivabilité ».

Rappels : limites, dérivée, symétries

Limites à l'infini

Petit rappel. Au chapitre « Limite d'une fonction numérique », tu as vu la limite d'une fraction rationnelle en $+\infty$ ou en $-\infty$: on garde, en haut et en bas, le terme de plus haut degré, puis on simplifie. Par exemple :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-5}{x^3+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0.$$

Cette règle lève la forme indéterminée du quotient de deux termes infinis.

Vérifie : Une limite de référence

Que vaut $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{4x^2+1}{2x^2-x}$?

A. 4

Faux.

Tu as gardé le coefficient du numérateur seul : il faut le diviser par celui du dénominateur.

B. -2

Faux.

En $-\infty$, x^2 reste positif : $\dfrac{4x^2}{2x^2}=2$, sans signe moins.

C. $+\infty$

Faux.

Le numérateur et le dénominateur ont le même degré : la limite est finie.

D. 2

Juste.

Juste : c'est la limite de $\dfrac{4x^2}{2x^2}$.

Correction

Par la limite d'une fraction rationnelle à l'infini, la limite cherchée est celle de $\dfrac{4x^2}{2x^2}$, c'est-à-dire 2.

Elle vaut 2 en $-\infty$ comme en $+\infty$.

Dérivée et symétries

Le théorème du signe de la dérivée. Ce théorème a été admis au chapitre « Dérivabilité ». Soit f une fonction dérivable sur un **intervalle** I.

- Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est croissante sur I.
- Si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est décroissante sur I.

Si de plus f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points, la monotonie est stricte.

Axes et centres de symétrie. Au chapitre « Généralités sur les fonctions numériques », tu as vu la caractérisation d'un axe $x = a$ et d'un centre $\Omega(a, b)$ de symétrie. Elle compare $f(2a - x)$ et $f(x)$, après avoir vérifié que $2a - x$ reste dans D_f.

Tu la retrouveras, écrite en entier, au moment de t'en servir.

> **À toi : Un sens de variation**
>
> Soit $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$. Calcule $f'(x)$, puis étudie le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.
>
> **Indice 1**
> Un polynôme se dérive terme à terme, par les dérivées usuelles et la somme.
> **Indice 2**
> Factorise $6x^2 + 6x - 12$ par 6, puis cherche les racines du trinôme $x^2 + x - 2$.
> **Indice 3**
> Point délicat : conclus par le théorème du signe de la dérivée, intervalle par intervalle.
>
> **Réponse**
> La fonction f est un polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x :
>
> $$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 + 6x - 12 \\ &= 6(x + 2)(x - 1). \end{aligned}$$
>
> Ce trinôme est positif à l'extérieur de ses racines -2 et 1, négatif entre elles.
>
> Par le théorème du signe de la dérivée, f est strictement croissante sur $]-\infty, -2]$ et sur $[1, +\infty[$, strictement décroissante sur $[-2, 1]$.
>
> On a $f(-2) = 20$ et $f(1) = -7$. Tu retrouveras cette fonction plus loin.

Asymptotes verticales et horizontales

Des valeurs qui s'envolent

En clair. Soit f la fonction définie pour $x \neq 2$ par $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x - 2}$. Près de 2, le dénominateur devient très petit.

À droite de 2, on obtient $f(2{,}1) = 53$, puis $f(2{,}01) = 503$: la courbe s'envole vers le haut.

À gauche, $f(1{,}9) = -47$ et $f(1{,}99) = -497$: elle plonge vers le bas.

Devine : Et loin de 2 ?

Quand x devient très grand, de quel nombre $f(x)$ semble-t-il se rapprocher ?

A. De 0, car le dénominateur devient très grand.

Faux.

Le numérateur grandit aussi : le quotient ne devient pas petit.

B. De 3, quotient des coefficients de x.

Juste.

Juste : pour x grand, $\dfrac{3x-1}{x-2}$ ressemble à $\dfrac{3x}{x}$.

C. D'aucun nombre : les valeurs dépassent tout.

Faux.

Numérateur et dénominateur ont le même degré : la limite est finie.

D. De $\dfrac{1}{2}$, quotient des constantes.

Faux.

Pour x grand, les termes constants comptent peu : ce sont les termes en x qui dominent.

Correction

Pour $x = 1002$, $f(x) = \dfrac{3005}{1000} = 3{,}005$. Par la limite d'une fraction rationnelle à l'infini :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{x} = 3.$$

La courbe se rapproche de la droite horizontale d'équation $y = 3$.

Asymptote verticale

Définition : Asymptote verticale

Soit f une fonction, $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère, et a un réel. Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ quand x tend vers a à droite, ou quand x tend vers a à gauche, on dit que la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à $\mathcal{C}_f$.

Exemple : une asymptote verticale

Reprenons $f : x \mapsto \dfrac{3x-1}{x-2}$. Quand x tend vers 2, le numérateur tend vers 5. Le dénominateur tend vers 0 : il est positif à droite de 2, négatif à gauche. Par quotient :

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty.$$

La droite d'équation $x = 2$ est donc une asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$. Une seule de ces deux limites aurait suffi.

Asymptote horizontale

Définition : Asymptote horizontale

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]c, +\infty[$, et b un réel. Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$, on dit que la droite d'équation $y = b$ est une **asymptote horizontale** à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

De même au voisinage de $-\infty$, pour une fonction définie sur un intervalle $]-\infty, c[$.

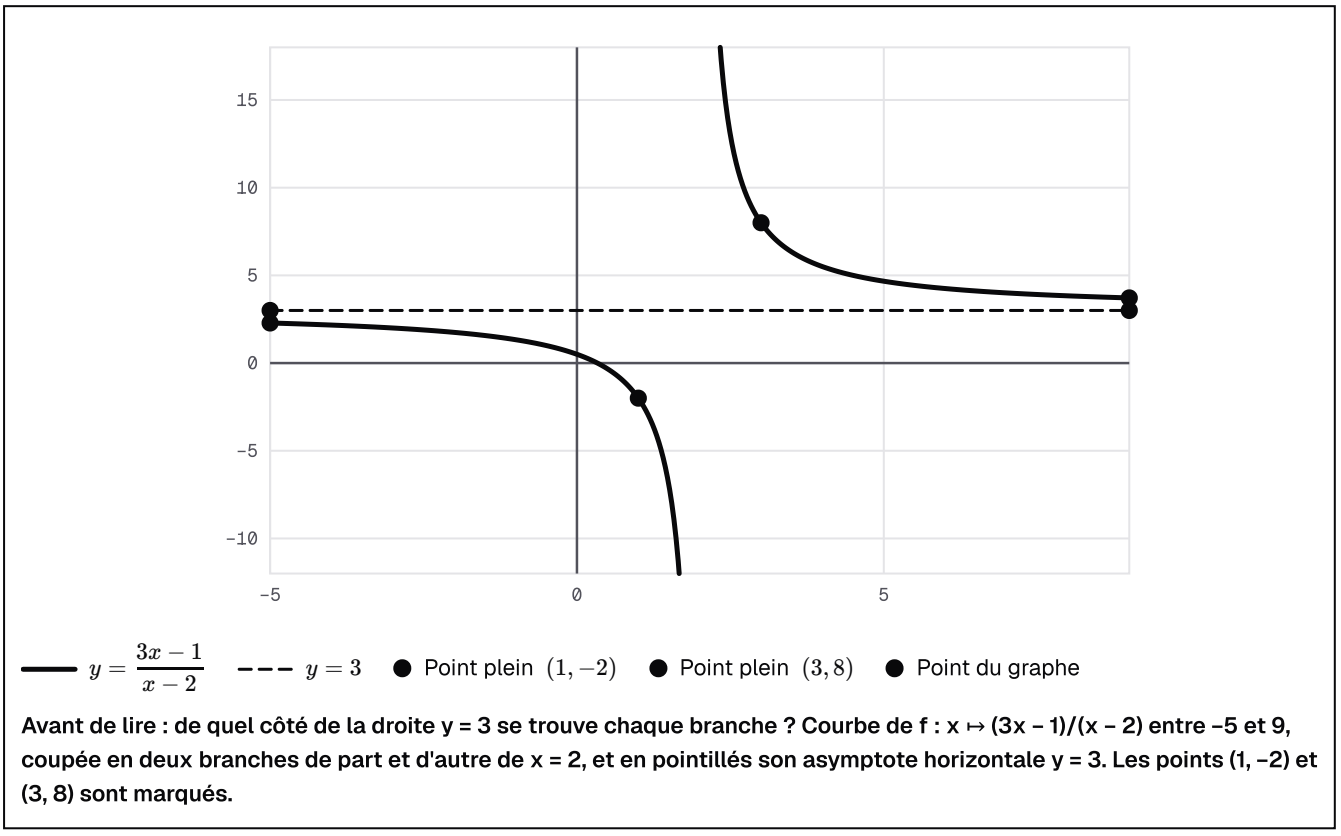
Exemple : une asymptote horizontale

Par la limite d'une fraction rationnelle à l'infini :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{x} = 3.$$

De même, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$. La droite d'équation $y = 3$ est donc une asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$, au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

Une même droite peut servir des deux côtés.



Avant de lire : de quel côté de la droite y = 3 se trouve chaque branche ? Courbe de f : x ↦ (3x − 1)/(x − 2) entre −5 et 9, coupée en deux branches de part et d'autre de x = 2, et en pointillés son asymptote horizontale y = 3. Les points (1, −2) et (3, 8) sont marqués.

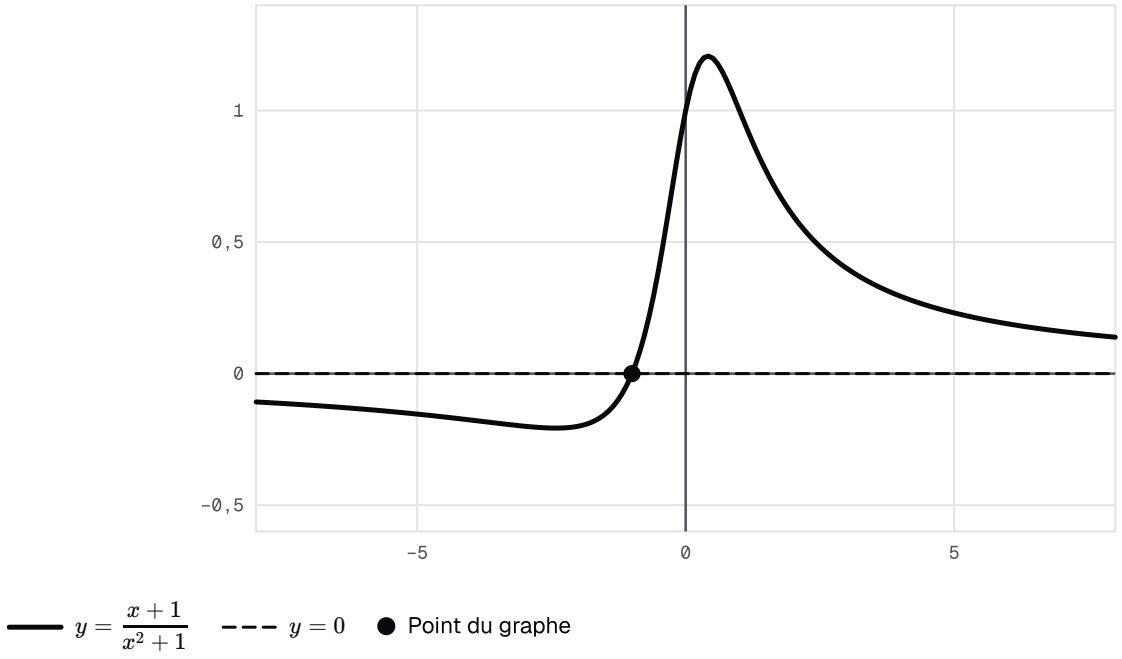
Un piège, une lecture

Attention : une asymptote peut être coupée

✗ « Une courbe ne rencontre jamais son asymptote. »

✓ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$. Par la limite d'une fraction rationnelle à l'infini, $f(x)$ tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$: la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale.

Pourtant $f(-1) = 0$: la courbe coupe cette asymptote au point $(-1, 0)$. Une asymptote décrit la courbe au loin, pas partout.



Courbe de f : x ↦ (x + 1)/(x² + 1). Son asymptote horizontale est l'axe des abscisses, d'équation y = 0 ; la courbe la coupe pourtant au point (−1, 0), puis s'en rapproche des deux côtés.

Remarque : lire chaque côté

Une asymptote verticale se lit sur une limite infinie, à droite ou à gauche. La fonction inverse tend vers $+\infty$ en 0 à droite, et vers $-\infty$ à gauche : l'axe des ordonnées est asymptote verticale.

En revanche, $\sqrt{x}$ tend vers 0 quand x tend vers 0 à droite. Ce bord de l'ensemble de définition ne donne alors aucune asymptote.

Écris toujours les deux limites, avec leur signe.

À toi : Deux asymptotes

Soit $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$, définie pour $x \neq 1$. Détermine les asymptotes de $\mathcal{C}_f$ parallèles aux axes. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Calcule les limites en 1 à droite et à gauche : quel est le signe du dénominateur ?

Indice 2

En $+\infty$ et en $-\infty$, garde les termes de plus haut degré.

Indice 3

Point délicat : le numérateur tend vers 3, positif ; c'est le signe de $x-1$ qui décide.

Réponse

En 1. Quand x tend vers 1, $2x+1$ tend vers 3 et $x-1$ tend vers 0. Par quotient :

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty.$$

La droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale.

En $+\infty$ et en $-\infty$. Par la limite d'une fraction rationnelle à l'infini, $f(x)$ tend vers 2.

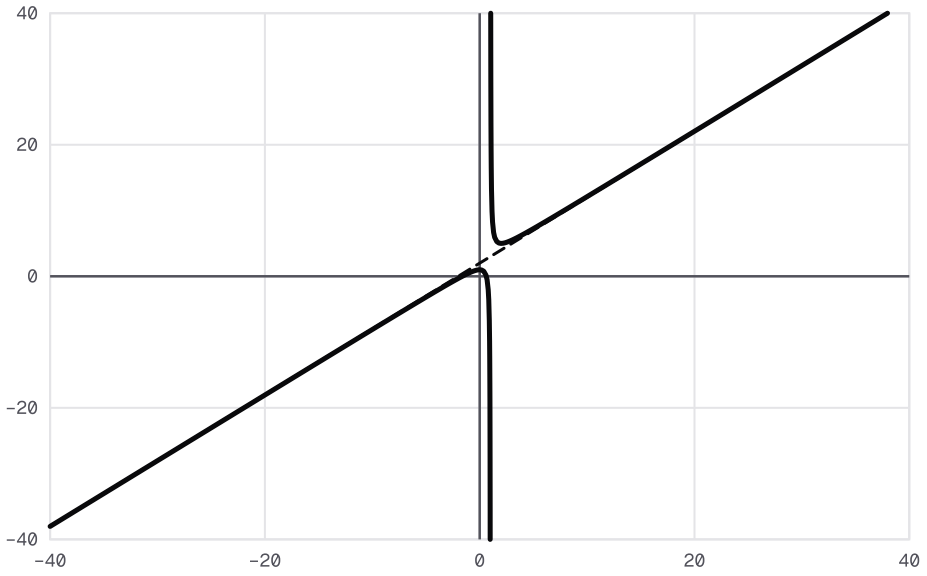
Conclusion. Les asymptotes de $\mathcal{C}_f$ parallèles aux axes sont la droite d'équation $x = 1$ et la droite d'équation $y = 2$, celle-ci des deux côtés.

Asymptote oblique

Zoom arrière

En clair. Reprends la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2+x-1}{x-1}$ de l'entrée. Fais un zoom arrière : la fenêtre va maintenant de -1000 à 1000. La courbe y ressemble à une droite qui monte en biais.

À droite, l'écart $f(x) - (x+2)$ valait $0{,}1$, puis $0{,}01$, puis $0{,}001$. Une droite ni verticale ni horizontale peut donc décrire une courbe au loin.



Courbe de f : x ↦ (x² + x − 1)/(x − 1) vue de loin, de −40 à 40, et en pointillés la droite d'équation y = x + 2 : à cette échelle, la courbe et la droite ne se distinguent plus, sauf tout près de l'abscisse 1.

Devine : Et à gauche ?

Pour $x = -9$, puis $x = -99$, que vaut l'écart $f(x) - (x + 2)$?

A. $0{,}1$, puis $0{,}01$: la courbe reste au-dessus.

Faux.

Pour $x < 1$, le dénominateur $x - 1$ est négatif : l'écart change de signe.

B. $-0{,}1$, puis $-0{,}01$: la courbe est au-dessous.

Juste.

Juste : l'écart vaut $\dfrac{1}{x - 1}$, négatif pour $x < 1$.

C. Il grandit sans fin : la droite ne convient qu'à droite.

Faux.

L'écart est un quotient de dénominateur $x - 1$: il devient petit des deux côtés.

D. Il vaut toujours $0{,}1$.

Faux.

L'écart dépend de x : il diminue quand x s'éloigne de 1.

Correction

On vérifie que $(x - 1)(x + 2) + 1 = x^2 + x - 1$. Donc, pour $x \neq 1$:

$$f(x) - (x + 2) = \frac{1}{x - 1}.$$

Pour $x = -9$, l'écart vaut $\dfrac{1}{-10} = -0{,}1$; pour $x = -99$, il vaut $-0{,}01$.

> L'écart devient petit des deux côtés : à gauche, la courbe approche la droite par-dessous.

Définition et méthode

Définition : Asymptote oblique

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]c, +\infty[$, et a, b deux réels, avec $a \neq 0$. On dit que la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est une **asymptote oblique** à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ si :

$$\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - (ax + b)\big) = 0.$$

De même au voisinage de $-\infty$, pour une fonction définie sur un intervalle $]-\infty, c[$.

Méthode : vérifier ou trouver une asymptote oblique

1. **Écrire** l'écart $f(x) - (ax + b)$, puis le simplifier : même dénominateur, factorisation, ou quantité conjuguée si une racine apparaît.
2. **Chercher** sa limite en $+\infty$, puis en $-\infty$ si f y est définie.
3. **Conclure** : une limite nulle fait de la droite une asymptote oblique de ce côté.
4. **Cas d'une fraction rationnelle** dont le numérateur a un degré de plus que le dénominateur : écrire $f(x)$ comme $ax + b$ plus une fraction de limite nulle, par identification des coefficients.

Exemple : trouver la droite par identification

Cherchons des réels a, b, c tels que, pour $x \neq 1$:

$$\frac{x^2 + x - 1}{x - 1} = ax + b + \frac{c}{x - 1}.$$

Au même dénominateur, le numérateur de droite vaut $ax^2 + (b - a)x + c - b$. Par identification des coefficients : $a = 1, b - a = 1$ et $c - b = -1$. Donc $a = 1, b = 2$ et $c = 1$.

L'écart $\dfrac{1}{x - 1}$ tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$, par quotient. La droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique des deux côtés.

Une caractérisation

Et si l'on ne connaît pas la droite à l'avance ? On cherche d'abord sa pente, puis son ordonnée à l'origine.

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve écrit $f(x)$ comme $ax + b$ plus un reste qui tend vers 0. Elle divise par x , puis passe à la limite par somme.

Propriété : Caractérisation d'une asymptote oblique

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]c, +\infty[$, et a, b deux réels, avec $a \neq 0$. La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ si et seulement si :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - ax\big) = b.$$

De même au voisinage de $-\infty$.

Démonstration

Étape 1. Supposons que la droite d'équation $y = ax + b$ soit asymptote oblique, et posons $g(x) = f(x) - (ax + b)$ pour $x > c$. Par F03, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

Étape 2. Pour $x > c$ et $x > 0$: $\dfrac{f(x)}{x} = a + \dfrac{b}{x} + \dfrac{g(x)}{x}$. Les quotients $\dfrac{b}{x}$ et $\dfrac{g(x)}{x}$ ont un numérateur de limite finie et un dénominateur qui tend vers $+\infty$: ils tendent vers 0 (opérations sur les limites, chapitre « Limite d'une fonction numérique »). Par somme, $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers a. De plus, $f(x) - ax = b + g(x)$ tend vers b.

Étape 3. Réciproquement, si $f(x) - ax$ tend vers b, alors $f(x) - (ax + b) = \big(f(x) - ax\big) - b$ tend vers 0 par somme : la droite est asymptote oblique (F03). En $-\infty$, même preuve pour $x < c$ et $x < 0$: les dénominateurs tendent vers $-\infty$, et les quotients vers 0.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On nomme l'écart entre la courbe et la droite : il tend vers 0. Diviser par x écrase la constante b et cet écart : il ne reste que la pente a.

Retrancher ax fait ensuite apparaître b. Les deux limites se calculent l'une après l'autre : d'abord celle de $\dfrac{f(x)}{x}$, puis celle de $f(x) - ax$.

Vérifie : Un quotient qui s'écrase

Dans la preuve, on note $g(x)$ l'écart $f(x) - (ax + b)$. Pourquoi $\dfrac{g(x)}{x}$ tend-il vers 0 en $+\infty$?

A. C'est une forme indéterminée, donc sa limite est nulle.

Faux.
Une forme indéterminée n'a pas de limite connue d'avance ; ici, il n'y en a pas.

B. Parce que $g(x)$ est égal à 0 pour x grand.

Faux.
$g(x)$ tend vers 0 sans être nul : dans l'exemple, il vaut $\dfrac{1}{x - 1}$.

C. Son numérateur tend vers 0, son dénominateur vers l'infini.

Juste.
Juste : un numérateur de limite finie et un dénominateur qui tend vers $+\infty$ donnent un quotient qui tend vers 0.

D. Parce que la dérivée de g est nulle.

Faux.
Aucune dérivée n'intervient dans cette preuve : seulement des opérations sur les limites.

Correction
Par définition de l'asymptote oblique, $g(x)$ tend vers 0. Le dénominateur x tend vers $+\infty$. Par les opérations sur les limites, le quotient $\dfrac{g(x)}{x}$ tend vers 0. Il en va de même pour $\dfrac{b}{x}$.

Exemple : chercher la droite sans la connaître

Reprenons $f : x \mapsto \dfrac{x^2+x-1}{x-1}$, sans utiliser l'identification.

Pente. Pour $x \notin \{0, 1\}$:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^2+x-1}{x^2-x}.$$

Ce quotient tend vers 1, par la limite d'une fraction rationnelle à l'infini.

Ordonnée à l'origine. Pour $x \neq 1$:

$$f(x) - x = \frac{2x-1}{x-1}.$$

Par la même limite de référence, cet écart tend vers 2.

Conclusion. Par la caractérisation, la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique en $+\infty$; de même en $-\infty$.

À toi ; en devoir

À toi : Une droite donnée

Soit $f(x) = \dfrac{2x^2+5x+1}{x+2}$, définie pour $x \neq -2$. Montre que la droite (D) d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Forme l'écart $f(x) - (2x+1)$ et réduis au même dénominateur.
Indice 2
Développe $(2x+1)(x+2)$: après la soustraction, seul un terme constant doit rester au numérateur.
Indice 3
Point délicat : nomme la règle de limite que tu emploies pour l'écart.

Réponse

Écart. Pour tout $x \neq -2$, $(2x+1)(x+2) = 2x^2+5x+2$. Au même dénominateur, le numérateur de $f(x)-(2x+1)$ vaut donc :

$$\begin{aligned}&(2x^2+5x+1)\\&\quad-(2x^2+5x+2)\\&=-1.\end{aligned}$$

Ainsi, pour $x \neq -2$:

$$\begin{aligned}&f(x)-(2x+1)\\&=-\frac{1}{x+2}.\end{aligned}$$

Limite. Par quotient, cet écart tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$.

Conclusion. La droite (D) est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Remarque : Coin devoir : une asymptote oblique

En devoir, écris l'écart, sa forme simplifiée, puis sa limite :

« Pour tout $x \neq 1$, $f(x)-(x+2) = \dfrac{1}{x-1}$. Or $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$, par quotient. Donc la droite d'équation $y = x+2$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$. »

Fais de même en $-\infty$.

Branches paraboliques et directions asymptotiques

Au loin, sans asymptote

En clair. Toutes les courbes ne s'approchent pas d'une droite. Le quotient $\dfrac{f(x)}{x}$ est la pente de la droite qui joint l'origine au point de la courbe d'abscisse x.

Pour $x \mapsto x^2$, il vaut 10 en $x = 10$, puis 100 en $x = 100$: la courbe se redresse.

Pour $x \mapsto \sqrt{x}$, il vaut $0{,}1$ en $x = 100$, puis $0{,}01$ en $x = 10\,000$.

Devine : Une direction au loin

On fait un zoom arrière sur la courbe de $x \mapsto \sqrt{x}$. Que semble-t-elle faire au loin ?

A. Elle s'approche d'une droite horizontale $y = b$.

Faux.

$\sqrt{x}$ dépasse tout nombre $b \geq 0$: il suffit de prendre $x > b^2$.

B. Elle se redresse vers la verticale.

Faux.

La pente $\dfrac{\sqrt{x}}{x}$ diminue : la courbe s'aplatit.

C. Elle s'approche de la droite $y = x$.

Faux.

L'écart $\sqrt{x} - x$ tend vers $-\infty$: la courbe s'éloigne de cette droite.

D. Elle s'aplatit tout en montant sans fin.

Juste.

Juste : la pente vue de l'origine tend vers 0, mais la courbe monte toujours.

Correction

Le quotient $\dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ tend vers 0 : vues de l'origine, les pentes s'aplatissent.

Mais $\sqrt{x}$ tend vers $+\infty$: aucune droite horizontale ne retient la courbe. C'est une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

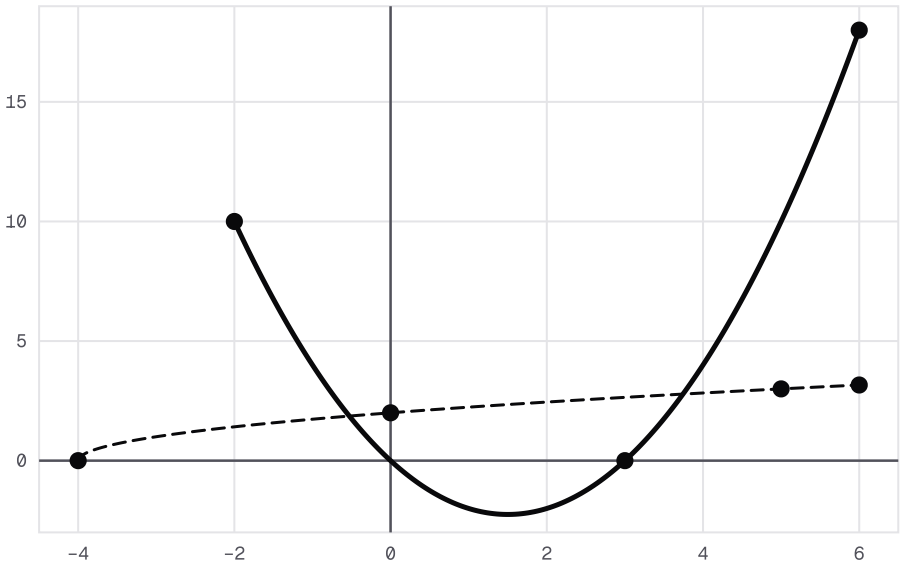
Branches paraboliques

Définition : Branches paraboliques ; directions asymptotiques

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]c, +\infty[$, telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$.

- Si $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ ou $-\infty$, $\mathcal{C}_f$ admet au voisinage de $+\infty$ une **branche parabolique de direction l'axe des ordonnées**.
- Si $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, $\mathcal{C}_f$ admet une **branche parabolique de direction l'axe des abscisses**.
- Si $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$, avec a réel non nul, et si $\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - ax\big) = +\infty$ ou $-\infty$, $\mathcal{C}_f$ admet une **branche parabolique de direction la droite** d'équation $y = ax$.

La droite qui donne cette direction est la **direction asymptotique** de la branche. De même au voisinage de $-\infty$.



Avant de lire : laquelle des deux courbes se redresse, laquelle s'aplatit ? Courbe de x ↦ x² − 3x entre −2 et 6, et en pointillés courbe de x ↦ √(x + 4) entre −4 et 6. La première a une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées, la seconde de direction l'axe des abscisses. Les points (3, 0), (0, 2) et (5, 3) sont marqués.

Exemple : une branche qui se redresse

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x$. Par la limite d'un polynôme à l'infini, $f(x)$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Pour $x \neq 0$, $\dfrac{f(x)}{x} = x - 3$. Ce quotient tend vers $+\infty$ en $+\infty$, et vers $-\infty$ en $-\infty$.

La courbe admet donc, des deux côtés, une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

Deux pièges

Attention : une pente nulle au loin

✗ « $\dfrac{\sqrt{x}}{x}$ tend vers 0, donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe de $x \mapsto \sqrt{x}$. »

✓ Une asymptote horizontale demande une limite **finie** de la fonction elle-même. Or $\sqrt{x}$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$. La limite nulle de $\dfrac{\sqrt{x}}{x}$ indique seulement que la courbe s'aplatit : branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

Attention : la pente ne suffit pas

✗ « $\dfrac{x+\sqrt{x}}{x}$ tend vers 1, donc la courbe de $x \mapsto x+\sqrt{x}$ a une asymptote oblique de pente 1. »

✓ Il faut aussi la limite de l'écart avec x. Ici, $(x+\sqrt{x})-x=\sqrt{x}$ tend vers $+\infty$: il n'y a aucune asymptote oblique. Sa branche infinie est parabolique, de direction la droite d'équation $y=x$. La courbe s'éloigne de cette droite par-dessus.

Vérifie : Quelle branche ?

En $+\infty$, une fonction f vérifie : $f(x)$ tend vers $+\infty$, $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers 2, et $f(x)-2x$ tend vers $-\infty$. Que peut-on dire de $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$?

A. Elle admet une asymptote oblique de pente 2.

Faux.

Il faudrait une limite finie de $f(x)-2x$; ici, elle est infinie.

B. Branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

Faux.

Cette direction correspond à une limite infinie de $\dfrac{f(x)}{x}$, pas à 2.

C. Branche parabolique de direction la droite $y=2x$.

Juste.

Juste : la pente a une limite réelle non nulle, mais l'écart est infini.

D. Branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

Faux.

Cette direction correspond à une limite nulle de $\dfrac{f(x)}{x}$.

Correction

La pente $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers le réel non nul 2, mais $f(x)-2x$ tend vers $-\infty$.

Par la définition des branches paraboliques, $\mathcal{C}_f$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=2x$. La courbe s'en éloigne vers le bas.

La méthode des branches infinies

Méthode : étudier les branches infinies

1. **Calculer** les limites de f aux bornes de D_f, en nommant chaque opération.
2. **En une borne réelle** a : une limite infinie, d'un côté au moins, donne l'asymptote verticale $x=a$.
3. **En $+\infty$ ou en $-\infty$** : une limite finie b donne l'asymptote horizontale $y=b$. Une limite infinie conduit à étudier $\dfrac{f(x)}{x}$: limite infinie, direction l'axe des ordonnées ; limite nulle, direction l'axe des abscisses.

4. **Si la pente tend vers un réel** $a \neq 0$, étudier $f(x) - ax$: une limite finie b donne l'asymptote $y = ax + b$; une limite infinie, la direction de la droite $y = ax$.

Exemple : Exemple guidé : la branche de x ↦ √(x + 4)

Énoncé. Soit g la fonction définie sur $[-4, +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x+4}$. Étudions la branche infinie de sa courbe en $+\infty$.

Limite de g. Par la limite de la racine carrée d'une fonction, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

Limite de la pente. Pour $x > 0$:

$$\frac{g(x)}{x} = \sqrt{\frac{x+4}{x^2}}.$$

Par la limite d'une fraction rationnelle à l'infini, $\frac{x+4}{x^2}$ tend vers 0. Par la limite de la racine carrée d'une fonction, $\frac{g(x)}{x}$ tend donc vers 0.

Conclusion. La courbe admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

À toi : Une pente, puis un écart

Soit $f(x) = 4x - \sqrt{x+1}$, définie sur $[-1, +\infty[$. Étudie la branche infinie de $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Pour $x > 0$, écris $\frac{\sqrt{x+1}}{x} = \sqrt{\frac{x+1}{x^2}}$: ce quotient tend vers 0.

Indice 2

Écris la pente $\frac{f(x)}{x}$ comme une somme, puis passe à la limite par somme.

Indice 3

Point délicat : une pente qui tend vers un réel non nul a ne suffit pas ; calcule encore la limite de $f(x) - ax$.

Réponse

Pente. Pour $x > 0$:

$$\frac{\sqrt{x+1}}{x} = \sqrt{\frac{x+1}{x^2}}.$$

Par la limite d'une fraction rationnelle à l'infini, puis par la limite de la racine carrée d'une fonction, ce quotient tend vers 0. Donc $\frac{f(x)}{x} = 4 - \frac{\sqrt{x+1}}{x}$ tend vers 4, par somme.

Limite de f. Par produit, $x \times \frac{f(x)}{x}$, c'est-à-dire $f(x)$, tend vers $+\infty$.

Écart. L'écart $f(x) - 4x = -\sqrt{x+1}$ tend vers $-\infty$.

Conclusion. La courbe admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = 4x$.

Asymptotes de x ↦ √(ax² + bx + c)

Une racine qui ressemble à une droite

Devine : Une racine au loin

Pour x grand et positif, de quelle expression $\sqrt{x^2 - 2x + 5}$ est-elle proche ? Pense à l'écriture $\sqrt{(x-1)^2 + 4}$.

A. De x.

Faux.

Le terme $-2x$ décale la droite : l'écart avec x tend vers -1.

B. De $x + \sqrt{5}$.

Faux.

On ne prend pas la racine terme à terme : $\sqrt{a+b}$ n'est pas $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.

C. De x^2.

Faux.

La racine d'un terme en x^2 est de l'ordre de x, pas de x^2.

D. De $x - 1$.

Juste.

Juste : le terme 4 compte peu devant $(x-1)^2$.

Correction

Par la forme canonique, $x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4$. Pour x grand, le terme 4 compte peu devant $(x-1)^2$.

La racine est donc proche de $|x - 1|$, c'est-à-dire de $x - 1$ pour $x > 1$. Pour $x = 101$, on trouve $\sqrt{10\,004}$, à moins de $0{,}02$ de 100.

Ce que montre l'activité vaut pour la racine de tout trinôme de coefficient dominant positif.

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve écrit le trinôme sous forme canonique. Elle multiplie ensuite l'écart par la quantité conjuguée. Le numérateur devient constant, et le dénominateur tend vers $+\infty$.

Deux asymptotes obliques

Propriété : Asymptotes de la courbe de x ↦ √(ax² + bx + c)

Soit a, b, c trois réels, avec $a > 0$, et $f : x \mapsto \sqrt{ax^2 + bx + c}$. Alors $\mathcal{C}_f$ admet :

- au voisinage de $+\infty$, l'asymptote oblique d'équation $y = \sqrt{a}\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)$;
- au voisinage de $-\infty$, l'asymptote oblique d'équation $y = -\sqrt{a}\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)$.

Démonstration

Étape 1. Posons $\alpha = \dfrac{b}{2a}$ et $k = \dfrac{4ac - b^2}{4a^2}$. Par la forme canonique du trinôme (chapitre « Généralités sur les fonctions numériques ») : $ax^2 + bx + c = a\big((x+\alpha)^2 + k\big)$. Posons $d = -\alpha + \sqrt{|k|}$ et $d' = -\alpha - \sqrt{|k|}$. Si $x > d$ ou $x < d'$, alors $(x+\alpha)^2 > |k| \geq -k$: le trinôme est strictement positif, et f est définie sur $]d, +\infty[$ et $]-\infty, d'[$.

Étape 2. Pour $x > d$, $x + \alpha > 0$ et, par la quantité conjuguée :

$$f(x) - \sqrt{a}\,(x+\alpha) = \frac{\sqrt{a}\,k}{\sqrt{(x+\alpha)^2 + k} + (x+\alpha)}.$$

En $+\infty$, ce dénominateur strictement positif tend vers $+\infty$ (racine carrée d'une fonction, somme, chapitre « Limite d'une fonction numérique ») : le quotient tend vers 0. F03 conclut, avec la pente $\sqrt{a} \neq 0$.

Étape 3. Pour $x < d'$, $-(x+\alpha) > 0$; de même, $f(x) + \sqrt{a}\,(x+\alpha) = \dfrac{\sqrt{a}\,k}{\sqrt{(x+\alpha)^2 + k} - (x+\alpha)}$, dont le dénominateur strictement positif tend vers $+\infty$ en $-\infty$. F03 conclut, avec la pente $-\sqrt{a} \neq 0$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Deux gestes. La forme canonique fait apparaître $(x+\alpha)^2$ sous la racine. La quantité conjuguée transforme une différence de deux termes infinis en un quotient de dénominateur infini.

Enfin, la racine de $(x+\alpha)^2$ vaut $|x+\alpha|$: c'est pourquoi la pente change de signe en $-\infty$.

Vérifie : Le signe en moins l'infini

Dans la preuve, pourquoi l'asymptote en $-\infty$ a-t-elle pour pente $-\sqrt{a}$?

A. Parce que le trinôme est négatif en moins l'infini.
Faux.
Avec $a > 0$, le trinôme tend vers $+\infty$ en $-\infty$: il est positif.

B. Parce que $\sqrt{(x+\alpha)^2}$ vaut $-(x+\alpha)$ pour $x < -\alpha$.
Juste.
Juste : $\sqrt{(x+\alpha)^2} = |x+\alpha|$, et $x + \alpha < 0$ à gauche de $-\alpha$.

C. Parce que $\sqrt{a}$ est négatif pour $x < 0$.
Faux.

$\sqrt{a}$ est un nombre positif fixé ; il ne dépend pas de x.

D. Parce que la quantité conjuguée change le signe du numérateur.

Faux.

Le numérateur obtenu, $\sqrt{a}\,k$, est le même des deux côtés.

Correction

Pour $x < -\alpha$, on a $x + \alpha < 0$, donc $|x+\alpha| = -(x+\alpha)$. Loin vers la gauche, la racine est proche de $\sqrt{a}\,|x+\alpha| = -\sqrt{a}\,(x+\alpha)$. D'où la pente $-\sqrt{a}$.

Exemple : les deux asymptotes de x ↦ √(x² − 2x + 5)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$. Ici $a = 1, b = -2, c = 5$. Le discriminant vaut -16 : le trinôme est strictement positif, et $D_f = \mathbb{R}$.

Avec $\dfrac{b}{2a} = -1$, la propriété donne l'asymptote $y = x - 1$ en $+\infty$, et l'asymptote $y = -x + 1$ en $-\infty$.

Contrôle en $+\infty$. Pour $x > 1$:

$$f(x) - (x-1) = \frac{4}{\sqrt{(x-1)^2 + 4} + x - 1}.$$

Le dénominateur tend vers $+\infty$: l'écart tend vers 0, par quotient.



Courbe de f : x ↦ √(x² − 2x + 5) et, en pointillés, ses deux asymptotes obliques : y = x − 1 en +∞ et y = −x + 1 en −∞. La courbe reste au-dessus de chacune.

Piège, à toi, en devoir

Attention : la racine d'un carré

✗ « Pour $x<0$, $\sqrt{4x^2+1}=2x\sqrt{1+\dfrac{1}{4x^2}}$. »

✓ Pour tout réel x, $\sqrt{x^2}=|x|$. Pour $x<0$, $\sqrt{4x^2}=-2x$, donc :

$$\sqrt{4x^2+1}=-2x\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}.$$

Le membre de gauche est positif, alors que $2x$ serait négatif. En $-\infty$, l'asymptote de la courbe de $x\mapsto\sqrt{4x^2+1}$ est donc $y=-2x$, et non $y=2x$.

À toi : Une quantité conjuguée

Soit $f(x)=\sqrt{4x^2+1}$. Montre, par la quantité conjuguée, que la droite d'équation $y=2x$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Multiplie $\sqrt{4x^2+1}-2x$ par $\sqrt{4x^2+1}+2x$, en haut et en bas.
Indice 2
Développe le numérateur : les termes en x^2 doivent disparaître.
Indice 3
Point délicat : vérifie que le dénominateur ne s'annule pas, puis nomme la règle de limite.

Réponse
Signe du dénominateur. Pour tout réel x, $\sqrt{4x^2+1}>|2x|$, donc $\sqrt{4x^2+1}+2x>0$.

Quantité conjuguée. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &f(x)-2x\\ &=\frac{(4x^2+1)-4x^2}{\sqrt{4x^2+1}+2x}\\ &=\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}+2x}. \end{aligned}$$

Limite. En $+\infty$, le dénominateur tend vers $+\infty$, par la limite de la racine carrée d'une fonction et par somme. Par quotient, l'écart tend vers 0.

Conclusion. La droite d'équation $y=2x$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

Remarque : Coin devoir : une fonction irrationnelle

En devoir, démontre chaque asymptote par la quantité conjuguée, un côté après l'autre :

« Pour $x>1$, $f(x)-(x-1)=\dfrac{4}{\sqrt{(x-1)^2+4}+x-1}$. Le dénominateur tend vers $+\infty$; donc l'écart tend vers 0, par quotient. »

Traite ensuite $-\infty$ à part, avec $|x-1| = 1-x$.

Position relative d'une courbe et d'une droite

Au-dessus ou au-dessous ?

En clair. Dans l'entrée, l'écart $f(x) - (x+2)$ était positif pour $x = 11$ et pour $x = 101$: la courbe passait au-dessus de la droite. Pour $x = -9$, il était négatif : la courbe passait au-dessous.

Comparer une courbe et une droite, c'est étudier le **signe** d'un écart.

Vérifie : Le signe d'un écart

Soit $f(x) = \dfrac{3x-1}{x-2}$ et la droite d'équation $y = 3$. Pour $x \neq 2$, $f(x) - 3 = \dfrac{5}{x-2}$. Sur quel ensemble la courbe est-elle strictement au-dessus de la droite ?

A. $]2, +\infty[$

Juste.

Juste : le numérateur 5 est positif, et $x - 2 > 0$ pour $x > 2$.

B. $]-\infty, 2[$

Faux.

Pour $x < 2$, $x - 2 < 0$: l'écart est négatif.

C. $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

Faux.

Le signe de $\dfrac{5}{x-2}$ change en 2.

D. $\left]\dfrac{1}{3}, +\infty\right[$

Faux.

$\dfrac{1}{3}$ annule $f(x)$, pas l'écart $f(x) - 3$.

Correction

Le numérateur 5 est positif : l'écart a le signe de $x - 2$. Il est strictement positif sur $]2, +\infty[$, où la courbe est strictement au-dessus de la droite. Sur $]-\infty, 2[$, elle est strictement au-dessous.

L'écart ne s'annule jamais : la courbe et la droite n'ont aucun point commun.

Définition et méthode

Définition : Position relative d'une courbe et d'une droite

Soit f une fonction, I un intervalle inclus dans D_f, et (D) la droite d'équation $y = mx + p$. On pose $d(x) = f(x) - (mx + p)$ pour $x \in I$.

- Si $d(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de (D) sur I ; si $d(x) > 0$ pour tout $x \in I$, elle est **strictement au-dessus**.
- Si $d(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$, $\mathcal{C}_f$ est **au-dessous** de (D) sur I ; si $d(x) < 0$, **strictement au-dessous**.
- Si $d(x_0) = 0$, le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x_0 est un **point d'intersection** de $\mathcal{C}_f$ et de (D).

Méthode : situer une courbe par rapport à une droite

1. **Former** l'écart $f(x) - (mx + p)$, noté $d(x)$, sur D_f.
2. **Simplifier** puis **factoriser** $d(x)$, et dresser son tableau de signes.
3. **Conclure** intervalle par intervalle : $d(x) > 0$, la courbe est strictement au-dessus ; $d(x) < 0$, strictement au-dessous.
4. **Repérer** les zéros de d : en chaque zéro x_0, la courbe et la droite se coupent au point d'abscisse x_0.

Exemple : la courbe et son asymptote oblique

Reprenons $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + x - 1}{x - 1}$ et la droite (D) d'équation $y = x + 2$. Pour $x \neq 1$:

$$f(x) - (x + 2) = \frac{1}{x - 1}.$$

Le numérateur est positif : l'écart a le signe de $x - 1$.

- Sur $]1, +\infty[$, $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de (D).
- Sur $]-\infty, 1[$, elle est strictement au-dessous.

L'écart ne s'annule pas : la courbe ne coupe pas son asymptote.

Avec une tangente

Exemple : la courbe et une tangente

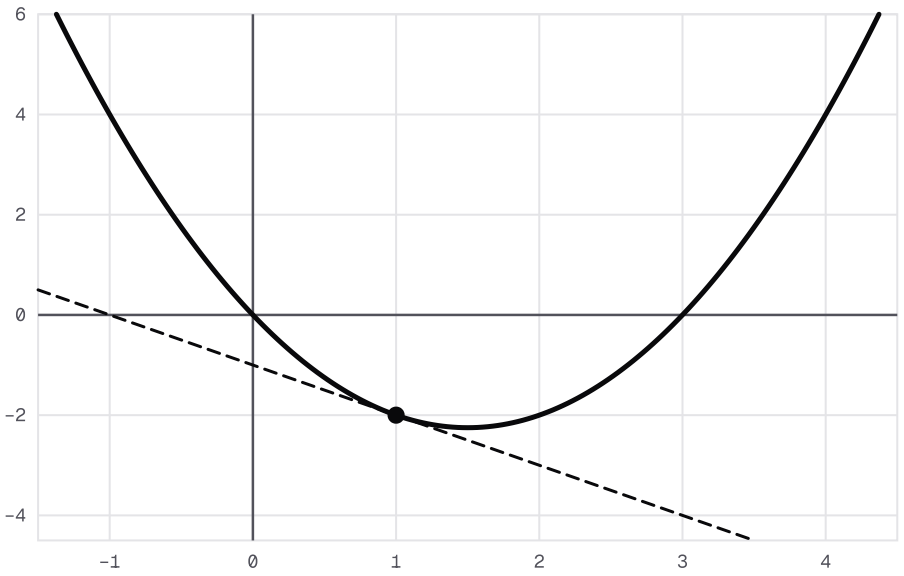
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x$. C'est un polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f'(x) = 2x - 3$.

Tangente. On a $f(1) = -2$ et $f'(1) = -1$. La tangente T_1 a pour équation $y = -(x - 1) - 2$, soit $y = -x - 1$.

Écart. Pour tout réel x :

$$
\begin{aligned}
&f(x) - (-x - 1) \\
&= x^2 - 2x + 1 \\
&= (x - 1)^2.
\end{aligned}
$$

Position. Cet écart est positif : $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de T_1 sur $\mathbb{R}$. Il ne s'annule qu'en 1 : le seul point commun est le point de contact.



Parabole de f : x ↦ x² − 3x et sa tangente T_1 d'équation y = −x − 1 au point (1, −2) : l'écart (x − 1)² est positif, la parabole reste au-dessus et ne touche T_1 qu'en ce point.

À toi : Une courbe et une droite

Soit $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ et la droite (Δ) d'équation $y = -12x$. Étudie la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de (Δ). Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Forme l'écart $f(x) - (-12x)$ et simplifie.
Indice 2
Factorise l'écart par x^2, puis dresse un tableau de signes.
Indice 3
Point délicat : x^2 est positif et s'annule en 0 sans changer de signe.

Réponse
Écart. Pour tout réel x :

$$
\begin{aligned}
&f(x) - (-12x) \\
&= 2x^3 + 3x^2 \\
&= x^2(2x + 3).
\end{aligned}
$$

Signe. Le facteur x^2 est positif et ne s'annule qu'en 0 ; le facteur $2x+3$ s'annule en $-\dfrac{3}{2}$.

- Sur $\left]-\infty, -\dfrac{3}{2}\right[$, cet écart est strictement négatif : la courbe est strictement au-dessous de (Δ).
- Sur $\left]-\dfrac{3}{2}, 0\right[$ et sur $]0, +\infty[$, il est strictement positif : la courbe est strictement au-dessus.

Points communs. Ils ont pour abscisses $-\dfrac{3}{2}$ et 0. En 0, la droite est la tangente T_0, car $f(0)=0$ et $f'(0)=-12$.

Remarque : Coin devoir : la position relative

En devoir, la conclusion nomme l'intervalle et la position :

« Pour tout $x \in]1, +\infty[$, $f(x)-(x+2)=\dfrac{1}{x-1}>0$; donc $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de (D) sur $]1, +\infty[$. »

Fais de même sur $]-\infty, 1[$, puis cherche les points d'intersection.

Dérivée seconde et concavité

Une courbe et ses tangentes

En clair. Prends la parabole de $x \mapsto x^2$ et trace sa tangente en un point quelconque : la parabole reste au-dessus. Pour la courbe de $x \mapsto -x^2$, c'est l'inverse : elle reste au-dessous de chacune de ses tangentes.

La position d'une courbe par rapport à ses tangentes décrit la façon dont elle tourne.

Devine : Des pentes qui grandissent

Pour $x \mapsto x^2$, la tangente au point d'abscisse a a pour pente $2a$. Comment varie cette pente quand a augmente ?

A. Elle diminue.

Faux.

$2a$ grandit avec a.

B. Elle augmente.

Juste.

Juste : $a \mapsto 2a$ est croissante.

C. Elle reste la même.

Faux.

Une pente constante serait celle d'une droite.

D. Elle reste positive.

Faux.
Pour $a < 0$, $2a < 0$: la pente est négative.

Correction
La pente $2a$ augmente avec a : la dérivée $x \mapsto 2x$ est croissante. Sa propre dérivée vaut 2, un nombre positif. On va relier ce fait à la position de la courbe au-dessus de ses tangentes.

Dérivée seconde, concavité

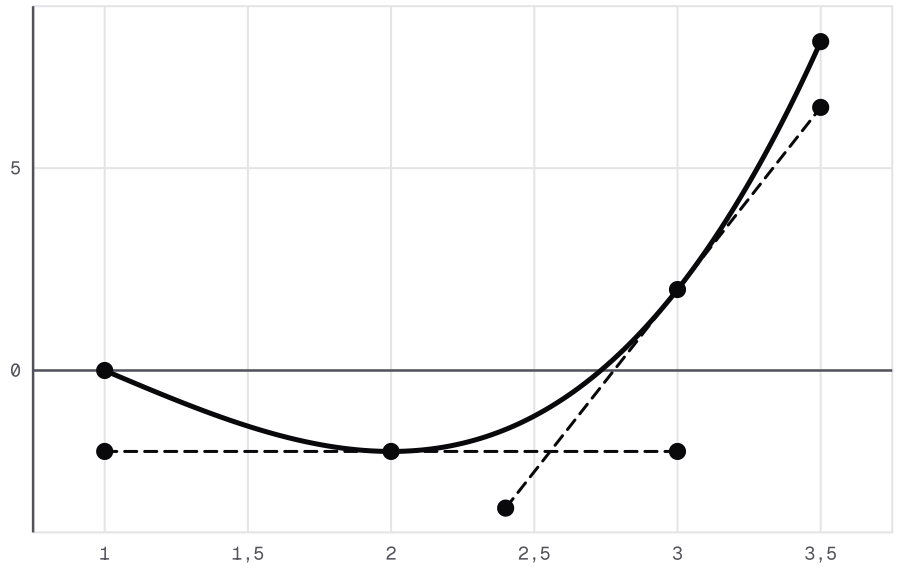
Définition : Dérivée seconde

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si sa fonction dérivée f' est elle-même dérivable sur I, on dit que f est **deux fois dérivable** sur I. La dérivée de f' est la **dérivée seconde** de f ; on la note f''.

Définition : Courbe convexe, courbe concave

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert J, et I un intervalle inclus dans J. Pour $a \in I$, on note T_a la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a, d'équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

- $\mathcal{C}_f$ est **convexe** sur I si elle est au-dessus de chacune de ses tangentes T_a, $a \in I$, sur I : pour tous a et x de I, $f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a)$.
- $\mathcal{C}_f$ est **concave** sur I si elle est au-dessous de chacune de ses tangentes T_a, $a \in I$, sur I : pour tous a et x de I, $f(x) \leq f'(a)(x-a) + f(a)$.



$y = x^3 - 3x^2 + 2$ $y = -2$ $y = 9x - 25$ Point plein $(2, -2)$ Point plein $(3, 2)$ Point du graphe

Avant de lire : la courbe passe-t-elle au-dessus ou au-dessous de ses tangentes ? Courbe de x ↦ x³ − 3x² + 2 entre 1 et 7/2, et en pointillés ses tangentes aux points (2, −2) et (3, 2), d'équations y = −2 et y = 9x − 25. Sur cet intervalle, la courbe reste au-dessus de chacune : elle y est convexe.

Le signe de la dérivée seconde

Pour $x \mapsto x^2$, la dérivée seconde vaut 2, et la courbe est au-dessus de ses tangentes. Est-ce général ?

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve fixe un point a et étudie l'écart entre la courbe et la tangente T_a. Elle applique deux fois le théorème du signe de la dérivée, admis au chapitre « Dérivabilité ».

Théorème : Concavité et signe de la dérivée seconde

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert J, et I un intervalle inclus dans J.

1. Si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors $\mathcal{C}_f$ est convexe sur I.
2. Si $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$, alors $\mathcal{C}_f$ est concave sur I.

Démonstration

Étape 1. Supposons $f'' \geq 0$ sur I. Soit $a \in I$; pour $x \in J$, posons $g(x) = f(x) - f'(a)(x - a) - f(a)$. Par somme, g est dérivable sur J et $g'(x) = f'(x) - f'(a)$.

Étape 2. La fonction f' est dérivable sur l'intervalle I, de dérivée $f'' \geq 0$: par le théorème du signe de la dérivée (chapitre « Dérivabilité », résultat admis), f' est croissante sur I. Donc $g'(x) \leq 0$ pour $x \in I$, $x \leq a$, et $g'(x) \geq 0$ pour $x \in I$, $x \geq a$.

Étape 3. Par le même théorème, g est décroissante sur l'intervalle $I \cap]-\infty, a]$ et croissante sur l'intervalle $I \cap [a, +\infty[$. Donc $g(x) \geq g(a) = 0$ pour tout $x \in I$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de T_a sur I. Comme a est quelconque, $\mathcal{C}_f$ est convexe sur I (F09).

Étape 4. Si $f'' \leq 0$ sur I, alors $(-f)'' = -f'' \geq 0$: par les étapes 1 à 3, $-f(x) \geq -f'(a)(x-a) - f(a)$, c'est-à-dire $f(x) \leq f'(a)(x-a) + f(a)$: $\mathcal{C}_f$ est concave sur I.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On fabrique une fonction auxiliaire : l'écart entre la courbe et la tangente T_a, qui s'annule en a.

Le signe de f'' donne le sens de variation de f', donc le signe de la dérivée de l'écart. L'écart atteint alors en a son minimum, 0 : il est positif, et la courbe est au-dessus de T_a.

Vérifie : Une étape de la preuve

Dans la preuve, $g'(x) = f'(x) - f'(a)$. Pourquoi $g'(x) \leq 0$ pour $x \in I$ avec $x \leq a$?

A. Car f'' est positive, donc f' est positive.
Faux.
$f'' \geq 0$ rend f' croissante, pas positive.

B. Car la courbe est au-dessous de sa tangente.
Faux.
C'est une conclusion possible, pas un argument : la preuve ne peut pas la supposer.

C. Car $g(a) = 0$.
Faux.
La valeur de g en a ne dit rien du signe de g'.

D. Car f' est croissante sur I, donc $f'(x) \leq f'(a)$.
Juste.
Juste : c'est le théorème du signe de la dérivée, appliqué à f'.

Correction
La fonction f' a pour dérivée $f'' \geq 0$ sur l'intervalle I. Par le théorème du signe de la dérivée, f' est croissante sur I. Pour $x \leq a$, on a donc $f'(x) \leq f'(a)$, c'est-à-dire $g'(x) \leq 0$.

Exemple : la concavité de x ↦ x³ − 3x² + 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. C'est un polynôme : il est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x :

$$f'(x) = 3x^2 - 6x,$$
$$f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1).$$

- Sur $]-\infty, 1]$, $f''(x) \leq 0$: par le lien entre concavité et signe de la dérivée seconde, $\mathcal{C}_f$ y est concave.
- Sur $[1, +\infty[$, $f''(x) \geq 0$: $\mathcal{C}_f$ y est convexe.

Un appui admis ; à toi

Remarque : un appui admis

Cette preuve utilise le théorème du signe de la dérivée. Or ce théorème a été admis dans le chapitre « Dérivabilité » : la preuve est complète à ce résultat admis près.

À toi : La concavité d'une fonction rationnelle

Soit $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$. Vérifie que, pour $x \neq 1$, $\dfrac{2x+1}{x-1} = 2 + \dfrac{3}{x-1}$. Calcule ensuite $f''(x)$, puis étudie la concavité de $\mathcal{C}_f$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Dérive $x \mapsto \dfrac{3}{x-1}$ par la propriété de l'inverse (la dérivée de $\dfrac{1}{v}$ est $-\dfrac{v'}{v^2}$), sur chacun des intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$.

Indice 2

Contrôle : ta dérivée seconde doit être un quotient de numérateur constant.

Indice 3

Point délicat : 1 n'appartient pas à D_f ; étudie chaque intervalle séparément.

Réponse

Écriture. Pour $x \neq 1$:

$$\begin{aligned} & 2 + \frac{3}{x-1} \\ &= \frac{2(x-1)+3}{x-1} \\ &= \frac{2x+1}{x-1}. \end{aligned}$$

Dérivées. Sur chacun des intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$, par la propriété de l'inverse :

$$f'(x) = -\frac{3}{(x-1)^2}.$$

Par la même propriété :

$$f''(x) = \frac{6}{(x-1)^3}.$$

Concavité. Sur $]-\infty, 1[$, $f''(x) < 0$: $\mathcal{C}_f$ est concave. Sur $]1, +\infty[$, $f''(x) > 0$: elle est convexe.

Points d'inflexion

Un virage qui change de sens

Devine : Sur la route

La courbe de $x \mapsto x^3 - 3x^2 + 2$ est concave sur $]-\infty, 1]$ et convexe sur $[1, +\infty[$. Imagine que tu la parcours de gauche à droite, comme une route. Que se passe-t-il au point $A(1, 0)$?

A. La courbe atteint un maximum.

Faux.
$f'(1) = -3 \neq 0$: la courbe descend en A, ce n'est pas un extremum.

B. La courbe devient une droite.

Faux.
Seul le point A sépare les deux parties ; aucune portion n'est droite.

C. Le virage change de sens.

Juste.
Juste : la courbe passe de concave à convexe.

D. Rien de particulier.

Faux.
La position par rapport aux tangentes change en A.

Correction
À gauche de A, la courbe est au-dessous de ses tangentes ; à droite, au-dessus. Le sens du virage change en A.

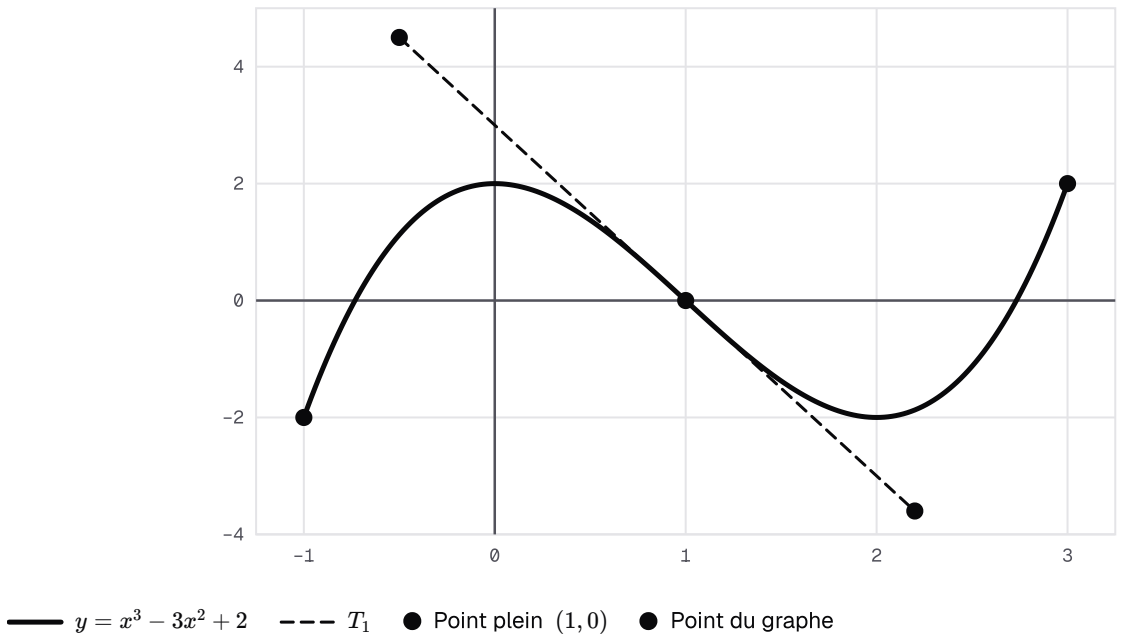
Un tel point s'appelle un **point d'inflexion**.

Définition : Point d'inflexion

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, $a \in I$, et $A\big(a, f(a)\big)$ le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a. On dit que A est un **point d'inflexion** de $\mathcal{C}_f$ s'il existe un réel $r > 0$, avec $]a - r, a + r[\subset I$, tel que :

- $\mathcal{C}_f$ soit convexe sur $]a - r, a]$ et concave sur $[a, a + r[$,
- ou $\mathcal{C}_f$ soit concave sur $]a - r, a]$ et convexe sur $[a, a + r[$.

En un point d'inflexion, la courbe **change de concavité**.



Avant de lire : de quel côté de la tangente la courbe passe-t-elle, à gauche puis à droite de A ? Courbe de x ↦ x³ − 3x² + 2 entre −1 et 3, et en pointillés sa tangente au point A(1, 0), d'équation y = −3x + 3. Le point (1, 0) est marqué.

Repérer un point d'inflexion

Comment repérer un point d'inflexion par le calcul ? Le signe de f'' décide de la concavité.

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve applique le lien entre concavité et signe de f'' de chaque côté de a. Elle conclut par la définition d'un point d'inflexion.

Propriété : Dérivée seconde qui s'annule en changeant de signe

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I, $a \in I$, et $r > 0$ tel que $]a - r, a + r[\subset I$. Si $f''(a) = 0$ et si :

- $f''(x) > 0$ pour $x \in]a - r, a[$ et $f''(x) < 0$ pour $x \in]a, a + r[$,
- ou $f''(x) < 0$ pour $x \in]a - r, a[$ et $f''(x) > 0$ pour $x \in]a, a + r[$,

alors le point $A\big(a, f(a)\big)$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

Démonstration

Étape 1. Plaçons-nous dans le premier cas. Comme $f''(a) = 0$, on a $f'' \geq 0$ sur $]a - r, a]$ et $f'' \leq 0$ sur $[a, a + r[$. Ces deux intervalles sont inclus dans l'intervalle ouvert I, sur lequel f est deux fois dérivable.

Étape 2. Sur $]a - r, a]$, $f'' \geq 0$: par F10, $\mathcal{C}_f$ est convexe sur $]a - r, a]$. Sur $[a, a + r[$, $f'' \leq 0$: par F10, $\mathcal{C}_f$ est concave sur $[a, a + r[$.

Étape 3. Par F11, A est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$. Le second cas se traite de même, en échangeant « convexe » et « concave ».

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Un point d'inflexion se lit sur le **signe** de f'' des deux côtés de a. On applique la propriété de la concavité sur $]a-r, a]$, puis sur $[a, a+r[$.

L'annulation $f''(a)=0$ ne suffit pas : c'est le changement de signe qui produit le changement de concavité.

Vérifie : La bonne condition

Laquelle de ces conditions assure que le point d'abscisse a est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$?

A. $f''(a)=0$, sans autre condition.
Faux.
Une annulation sans changement de signe ne suffit pas.

B. $f'(a)=0$, avec une tangente horizontale.
Faux.
Une dérivée nulle signale une tangente horizontale, pas un changement de concavité.

C. $f''(a)>0$, avec une courbe convexe.
Faux.
Un signe positif en a ne dit rien d'un changement de concavité.

D. $f''(a)=0$, avec un changement de signe.
Juste.
Juste : c'est la condition de la propriété.

Correction
La propriété demande que $f''(a)=0$ et que f'' change de signe en a : positive d'un côté, négative de l'autre. Alors la courbe est convexe d'un côté de a et concave de l'autre.

Exemple : le point d'inflexion de x ↦ x³ − 3x² + 2

Reprenons $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 2$, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f''(x) = 6(x-1)$.

On a $f''(1)=0$. De plus, $f''(x)<0$ pour $x<1$ et $f''(x)>0$ pour $x>1$: f'' s'annule en 1 en changeant de signe.

Comme $f(1)=0$, le point $A(1,0)$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

La courbe et sa tangente

En A, que devient la tangente ? D'un côté, la courbe est au-dessus de ses tangentes ; de l'autre, au-dessous.

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve applique la définition de la concavité à la seule tangente T_a, de chaque côté de a.

Propriété : La courbe traverse sa tangente en un point d'inflexion

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, et $a \in I$. Si $A\big(a, f(a)\big)$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$, alors il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{C}_f$ soit au-dessus de sa tangente T_a sur $]a-r, a]$ et au-dessous sur $[a, a+r[$, ou l'inverse : de part et d'autre de A, la courbe est de part et d'autre de sa tangente, au sens large.

Démonstration

Étape 1. Par F11, il existe $r > 0$, avec $]a-r, a+r[\subset I$, tel que, par exemple, $\mathcal{C}_f$ soit convexe sur $]a-r, a]$ et concave sur $[a, a+r[$.

Étape 2. Le réel a appartient à l'intervalle $]a-r, a]$, sur lequel $\mathcal{C}_f$ est convexe : par F09, appliquée à la tangente T_a, $f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a)$ pour tout $x \in]a-r, a]$.

Étape 3. Le réel a appartient aussi à $[a, a+r[$, sur lequel $\mathcal{C}_f$ est concave : par F09, $f(x) \leq f'(a)(x-a) + f(a)$ pour tout $x \in [a, a+r[$. L'autre cas se traite de même, les inégalités étant renversées.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le réel a appartient aux deux intervalles $]a-r, a]$ et $[a, a+r[$. La tangente T_a est donc une tangente de chaque partie.

D'un côté, la courbe est au-dessus d'elle ; de l'autre, au-dessous. De part et d'autre de A, la courbe est donc de part et d'autre de T_a, au sens large.

Aucun calcul nouveau : la définition de la concavité, appliquée deux fois.

Vérifie : L'écart à la tangente

La courbe de $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 2$ a pour tangente en $A(1, 0)$ la droite T_1 d'équation $y = -3x + 3$. Que vaut l'écart $f(x) - (-3x + 3)$?

A. $(x-1)^2$

Faux.
Un carré ne change pas de signe : la courbe ne traverserait pas sa tangente.

B. $(x-1)^3$

Juste.

Juste : un cube change de signe en 1.

C. $x^3 - 3x^2 - 3x + 5$

Faux.

Retrancher $-3x + 3$ revient à ajouter $3x$ et à retrancher 3.

D. 0

Faux.

La courbe n'est pas confondue avec sa tangente : en $x = 0$, l'écart vaut -1.

Correction

Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & f(x) - (-3x + 3) \\ &= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \\ &= (x - 1)^3. \end{aligned}$$

Cet écart est négatif pour $x < 1$ et positif pour $x > 1$. La courbe passe sous sa tangente à gauche de A, au-dessus à droite : elle traverse T_1 en A.

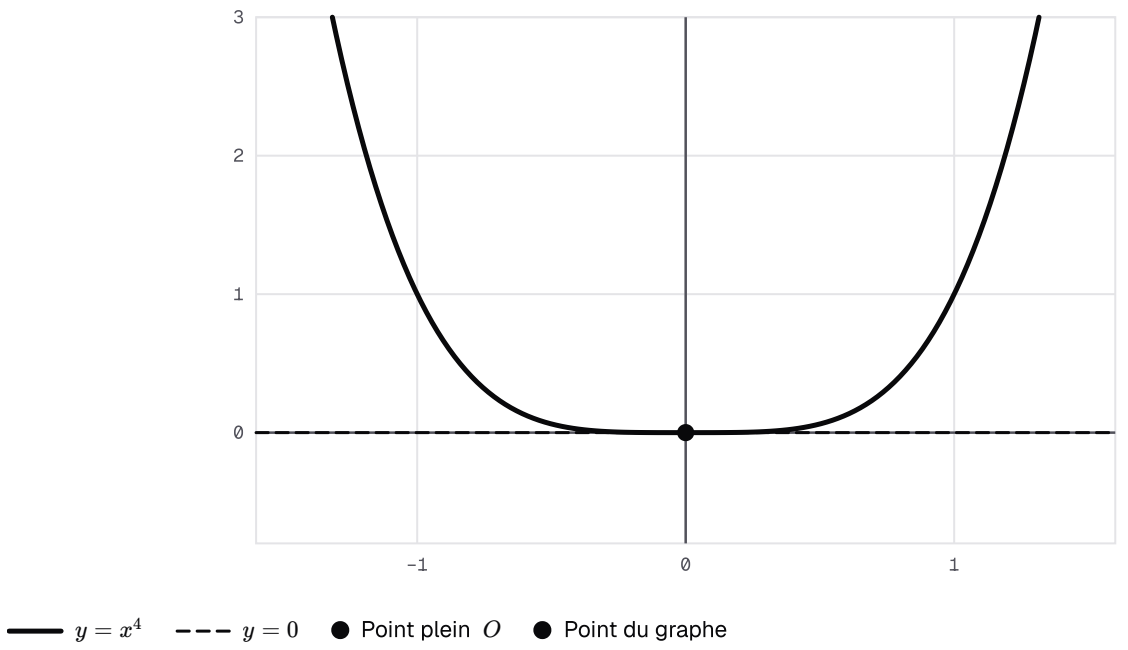
Exemple : une courbe qui ne traverse pas sa tangente

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4$. C'est un polynôme, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f''(x) = 12x^2$, donc $f''(0) = 0$.

Pour $x \neq 0$, $x^4 > 0$: la courbe est strictement au-dessus de sa tangente en O, l'axe des abscisses, des deux côtés de 0. Elle ne passe au-dessous d'aucun côté : par la propriété précédente, O n'est pas un point d'inflexion.

Une dérivée seconde nulle ne suffit pas ; il faut un changement de signe.

Et comment exclure tous les autres points ? **Pourquoi est-ce vrai ?** La preuve qui suit raisonne par l'absurde. En un point d'inflexion, la courbe serait convexe et concave d'un même côté : elle s'y confondrait avec sa tangente.



Courbe de x ↦ x⁴ et sa tangente en O, l'axe des abscisses : la courbe reste au-dessus des deux côtés de 0, sans la traverser. O n'est pas un point d'inflexion.

Aucun autre point ; à toi

Propriété : Dérivée seconde de signe strict : aucun point d'inflexion

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert K. Si $f''(x) > 0$ pour tout $x \in K$, ou si $f''(x) < 0$ pour tout $x \in K$, alors aucun point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse appartenant à K n'est un point d'inflexion.

Démonstration

Étape 1. Supposons $f'' > 0$ sur K et, par l'absurde, que le point $A\big(a, f(a)\big)$, avec $a \in K$, soit un point d'inflexion. Par F11, quitte à réduire $r > 0$ pour avoir $]a - r, a + r[\subset K$, $\mathcal{C}_f$ est concave sur un intervalle L égal à $]a - r, a]$ ou à $[a, a + r[$.

Étape 2. Par F10, $\mathcal{C}_f$ est aussi convexe sur L. Par F09, appliquée à la tangente T_a, $f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a)$ et $f(x) \leq f'(a)(x - a) + f(a)$ pour tout $x \in L$: $f(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Étape 3. Ainsi f coïncide avec une fonction affine sur l'intervalle ouvert J égal à $]a - r, a[$ ou à $]a, a + r[$: $f'(x) = f'(a)$ pour tout $x \in J$, donc $f''(x) = 0$ sur J. Cela contredit $f'' > 0$. Si $f'' < 0$ sur K, on applique ce résultat à $-f$, dont la courbe a les mêmes points d'inflexion (F09, F11).

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le raisonnement est par l'absurde. D'un côté de a, la courbe serait concave, par la définition d'un point d'inflexion. Elle y serait aussi convexe, par le signe de f''.

Elle serait donc à la fois au-dessus et au-dessous de sa tangente T_a : elle se confondrait avec elle. La fonction serait affine sur un intervalle ouvert, et f'' y serait nulle : c'est contraire au signe strict.

Exemple : un seul point d'inflexion, ou aucun

Reprenons $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 2$, avec $f''(x) = 6(x-1)$. Sur l'intervalle ouvert $]-\infty, 1[$, $f''(x) < 0$; sur $]1, +\infty[$, $f''(x) > 0$.

Par la propriété du signe strict de la dérivée seconde, un point d'abscisse différente de 1 n'est jamais un point d'inflexion. Le point $A(1, 0)$ est donc le seul.

Pour $x \mapsto x^4$, la dérivée seconde $12x^2$ est strictement positive sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Avec l'exemple précédent pour O, cette courbe n'a aucun point d'inflexion.

À toi : Deux points d'inflexion

Soit $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2$. Étudie la concavité de $\mathcal{C}_f$, puis détermine tous ses points d'inflexion. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
C'est un polynôme : dérive deux fois sur $\mathbb{R}$.
Indice 2
Contrôle : ta dérivée seconde doit se factoriser en un produit de facteurs du premier degré.
Indice 3
Point délicat : vérifie le changement de signe en chaque zéro, puis exclus les autres points par la propriété du signe strict.

Réponse
Dérivées. La fonction f est un polynôme, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x :

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2,$$
$$f''(x) = 12x(x-2).$$

Concavité. Ce trinôme est positif à l'extérieur de $[0, 2]$ et négatif entre 0 et 2. La courbe est convexe sur $]-\infty, 0]$ et sur $[2, +\infty[$, concave sur $[0, 2]$.

Points d'inflexion. En 0 et en 2, f'' s'annule en changeant de signe : les points $(0, 2)$ et $(2, -14)$ sont des points d'inflexion.

Sur chacun des intervalles ouverts $]-\infty, 0[$, $]0, 2[$ et $]2, +\infty[$, f'' garde un signe strict. Par la propriété du signe strict de la dérivée seconde, il n'y en a pas d'autre.

Éléments de symétrie et réduction du domaine d'étude

Une moitié suffit

Petit rappel du chapitre « Généralités sur les fonctions numériques ».

- La droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$ si et seulement si, pour tout $x \in D_f$, $2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) = f(x)$.
- Le point $\Omega(a, b)$ est un centre de symétrie si et seulement si, pour tout $x \in D_f$, $2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$.

Avec un axe, une moitié de la courbe suffit. **Pourquoi est-ce vrai ?** La preuve associe à chaque point d'abscisse $x < a$ le point d'abscisse $2a - x$. Pour une période, elle décale par un multiple de T.

Devine : Un axe à deviner

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 5$. On a $f(1) = 2$ et $f(3) = 2$, puis $f(0) = 5$ et $f(4) = 5$. Quelle droite semble être un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$?

A. L'axe des ordonnées.

Faux.
$f(-1) = 10$ et $f(1) = 2$: f n'est pas paire.

B. La droite d'équation $x = 1$.

Faux.
$f(0) = 5$ et $f(2) = 1$: les valeurs ne se répètent pas autour de 1.

C. La droite d'équation $x = 4$.

Faux.
$f(3) = 2$ mais $f(5) = 10$: les valeurs ne se répètent pas autour de 4.

D. La droite d'équation $x = 2$.

Juste.
Juste : 1 et 3, puis 0 et 4, sont symétriques par rapport à 2.

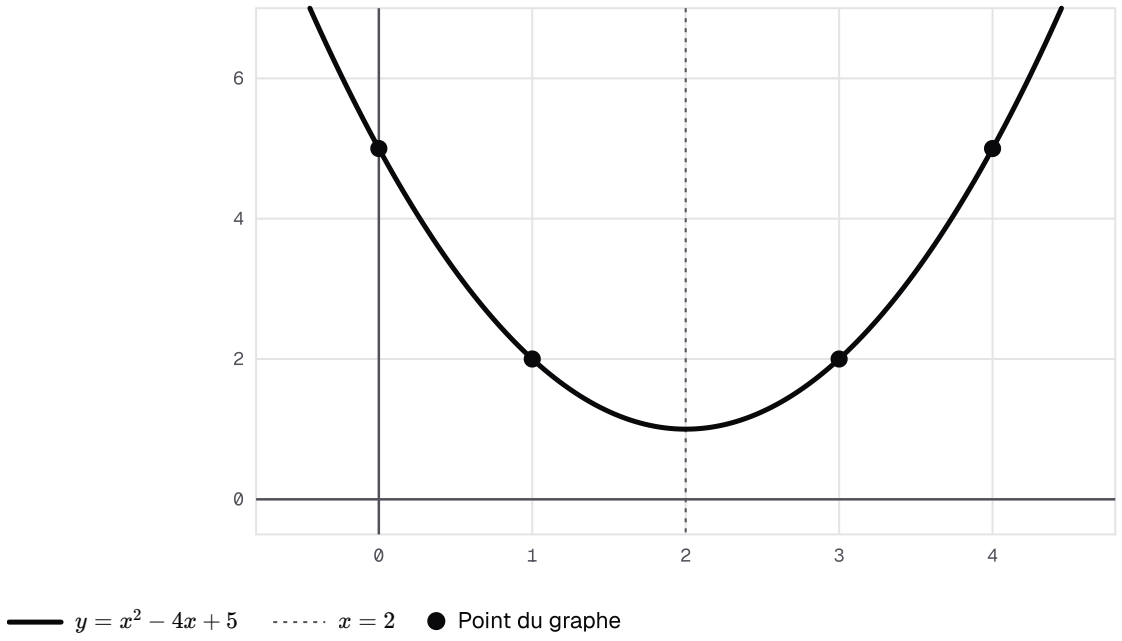
Correction

Les abscisses 1 et 3, puis 0 et 4, sont symétriques par rapport à 2, et ont les mêmes images.

On le confirme : pour tout réel x, $4 - x$ est un réel, et :

$$\begin{aligned} & f(4 - x) \\ & = (4 - x)^2 - 4(4 - x) + 5 \\ & = x^2 - 4x + 5. \end{aligned}$$

La caractérisation d'un axe de symétrie s'applique : la droite d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.



Parabole de f : x ↦ x² – 4x + 5 et la droite d'équation x = 2 : les points (1, 2) et (3, 2), puis (0, 5) et (4, 5), ont même ordonnée et des abscisses symétriques par rapport à 2.

Réduire le domaine d'étude

Propriété : Réduction du domaine d'étude

Soit f une fonction, $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, et Γ la partie de $\mathcal{C}_f$ formée des points d'abscisse $x \geq a$.

1. Si la droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$, alors $\mathcal{C}_f$ est la réunion de Γ et de son image par la symétrie d'axe cette droite.
2. Si $\Omega(a, b)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$, alors $\mathcal{C}_f$ est la réunion de Γ et de son image par la symétrie de centre Ω.
3. Si f est périodique de période $T > 0$ et si c est un réel, alors $\mathcal{C}_f$ est la réunion des images de sa partie d'abscisses dans $[c, c + T[$ par les translations de vecteur $kT\vec{i}$, où $k \in \mathbb{Z}$.

On étudie donc f sur $D_f \cap [a, +\infty[$ (cas 1 et 2), ou sur $D_f \cap [c, c + T[$ (cas 3).

Démonstration

Étape 1. La symétrie d'axe $x = a$ envoie (u, v) sur $(2a - u, v)$. Soit $x \in D_f$, avec $x < a$. Par la caractérisation d'un axe de symétrie (chapitre « Généralités sur les fonctions numériques »), $2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) = f(x)$: le point $\big(x, f(x)\big)$ est l'image du point $\big(2a - x, f(2a - x)\big)$ de Γ. Réciproquement, la même caractérisation place sur $\mathcal{C}_f$ l'image de tout point de Γ.

Étape 2. La symétrie de centre Ω envoie (u, v) sur $(2a - u, 2b - v)$, et $f(x) = 2b - f(2a - x)$ (chapitre « Généralités sur les fonctions numériques ») : même raisonnement.

Étape 3. Soit $x \in D_f$, et k la partie entière du réel $\dfrac{x-c}{T}$: $k \leq \dfrac{x-c}{T} < k+1$, donc $c \leq x - kT < c + T$. Par les multiples d'une période (chapitre « Généralités sur les fonctions numériques »), $x - kT \in D_f$ et $f(x-kT) = f(x)$: $\big(x, f(x)\big)$ est l'image de $\big(x - kT, f(x-kT)\big)$ par la translation de vecteur $kT\,\vec{i}$. Réciproquement, ces images sont sur $\mathcal{C}_f$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Tout repose sur la caractérisation. À chaque point d'abscisse $x < a$, elle associe un point d'abscisse $2a - x > a$, déjà tracé.

Pour une période, on décale par un multiple de T jusqu'à retomber dans $[c, c+T[$. On étudie donc une partie de la courbe, puis on la reproduit.

Exemple : réduire par un axe, puis par une période

Un axe. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 5$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(4-x) &= 16 - 8x + x^2 \\ &\quad - 16 + 4x + 5 \\ &= x^2 - 4x + 5. \end{aligned}$$

La droite d'équation $x = 2$ est donc un axe de symétrie de sa courbe : on étudie f sur $[2, +\infty[$. Pour $x \geq 2$, $f'(x) = 2x - 4 \geq 0$: par le théorème du signe de la dérivée, f y est croissante, à partir de $f(2) = 1$. La symétrique de cette moitié complète la parabole.

Une période. Pour tout réel x, $\cos(3x + 2\pi) = \cos(3x)$: la fonction $x \mapsto \cos(3x)$ a pour période $\dfrac{2\pi}{3}$. On l'étudie sur $\left[0, \dfrac{2\pi}{3}\right[$, puis on reproduit cet arc par translations.

Vérifie : Le plus petit intervalle

Une fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, impaire et périodique de période π. Quel est le plus petit intervalle d'étude que donnent ces deux propriétés ?

A. $[0, \pi]$
Faux.
C'est une période entière : l'imparité permet d'en garder la moitié.

B. $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$
Juste.
Juste : la période ramène à une longueur π, l'imparité à la moitié.

C. $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$
Faux.

Rien ne permet de couper encore en deux : il faudrait une autre symétrie.

D. $[0, +\infty[$

Faux.

L'imparité donne cet intervalle, mais la période le réduit encore à une longueur finie.

Correction

La période permet d'étudier f sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, de longueur π. L'imparité, de centre O, permet de n'en garder que les abscisses positives : $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On complète par la symétrie de centre O, puis par les translations de vecteur $k\pi\,\vec{i}$, où $k \in \mathbb{Z}$.

Et le sens de variation sur la partie symétrique ? **Pourquoi est-ce vrai ?** La preuve qui suit compare deux points à l'aide de leurs symétriques.

Symétrie et variations

Propriété : Symétrie et sens de variation

Soit f une fonction, a et b deux réels, I un intervalle inclus dans $D_f \cap [a, +\infty[$, et $I' = \{2a - x \,/\, x \in I\}$ l'intervalle symétrique de I par rapport à a.

- Si la droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$, alors f est croissante sur I si et seulement si f est décroissante sur I'.
- Si le point $\Omega(a, b)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$, alors f est croissante sur I si et seulement si f est croissante sur I'.

Les mêmes équivalences valent pour la monotonie stricte, et en échangeant « croissante » et « décroissante ».

Démonstration

Étape 1. Cas d'un axe. Supposons f croissante sur I. Soit u et v dans I', avec $u < v$. Alors $2a - u$ et $2a - v$ sont dans I, et $2a - v < 2a - u$, donc $f(2a - v) \leq f(2a - u)$. Or $f(2a - u) = f(u)$ et $f(2a - v) = f(v)$ (chapitre « Généralités sur les fonctions numériques ») : $f(v) \leq f(u)$. Donc f est décroissante sur I'.

Étape 2. Cas d'un centre : $f(u) = 2b - f(2a - u)$ et $f(v) = 2b - f(2a - v)$. De $f(2a - v) \leq f(2a - u)$, on tire $f(u) \leq f(v)$: f est croissante sur I'.

Étape 3. Les réciproques s'obtiennent de même, en échangeant les rôles de I et de I', car I est le symétrique de I' par rapport à a. Si f est décroissante sur I, les mêmes calculs, inégalités renversées, concluent. Avec des inégalités strictes, la preuve est identique.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Une symétrie d'axe renverse l'ordre des abscisses, mais garde les ordonnées : le sens de variation s'inverse. Une symétrie de centre renverse à la fois les abscisses et les ordonnées : les deux renversements se compensent, et le sens de variation se conserve.

Vérifie : Lire sans dériver

La droite d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de la courbe de $x \mapsto x^2 - 4x + 5$, et cette fonction est croissante sur $[2, +\infty[$. Que peut-on dire sur $]-\infty, 2]$?

A. Elle y est décroissante.

Juste.

Juste : un axe inverse le sens de variation.

B. Elle y est croissante.

Faux.

C'est le cas d'un centre de symétrie, pas d'un axe.

C. On ne peut rien dire sans dériver.

Faux.

La propriété donne la réponse sans calcul.

D. Elle y est constante.

Faux.

Elle prend la valeur 5 en 0 et la valeur 2 en 1.

Correction

L'intervalle $]-\infty, 2]$ est le symétrique de $[2, +\infty[$ par rapport à 2. Dans le cas d'un axe, la propriété donne : la fonction est décroissante sur $]-\infty, 2]$.

On le vérifie : la dérivée $x \mapsto 2x - 4$ est négative pour $x \leq 2$.

Exemple : un centre de symétrie et les variations

Centre. Soit f la fonction définie pour $x \neq 1$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$. Pour $x \neq 1$, on a $2 - x \neq 1$ et :

$$\begin{aligned} f(2-x) &= \frac{5-2x}{1-x} \\ &= \frac{2x-5}{x-1}. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} f(2-x) + f(x) &= \frac{4x-4}{x-1} \\ &= 4. \end{aligned}$$

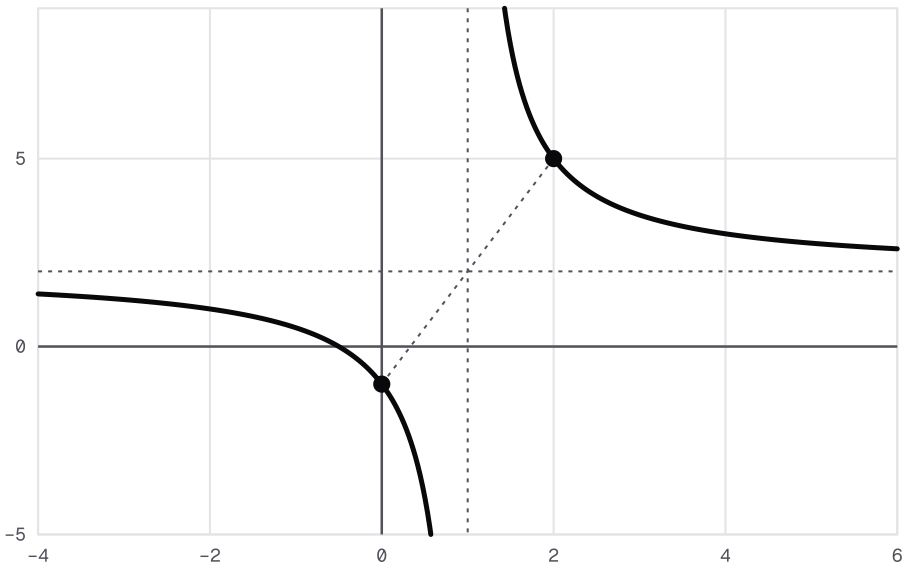
Par la caractérisation d'un centre, $\Omega(1, 2)$ est centre de symétrie.

Variations. Sur $]1, +\infty[$, par la propriété du quotient, $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, on obtient :

$$f'(x) = -\frac{3}{(x-1)^2} < 0.$$

Par le théorème du signe de la dérivée, f y est strictement décroissante ; elle l'est aussi sur $]-\infty, 1[$, par la propriété précédente.

Et les nombres dérivés en deux points symétriques ? **Pourquoi est-ce vrai ?** La preuve suivante dérive l'égalité de symétrie.



$y = \frac{2x+1}{x-1}$ ● Point plein M ● Point plein M' ------ $x = 1$ ------ $y = 2$ ------ Ω ● Point du graphe

Courbe de f : x ↦ (2x + 1)/(x − 1), de centre de symétrie Ω(1, 2), avec ses deux asymptotes d'équations x = 1 et y = 2. Chaque branche descend, et le segment qui joint M(0, −1) et M'(2, 5) a pour milieu Ω.

Symétrie et dérivée

Propriété : Symétrie et dérivée

Soit f une fonction dérivable sur son ensemble de définition D_f, réunion d'intervalles ouverts, et a, b deux réels.

- Si la droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$, alors $f'(2a - x) = -f'(x)$ pour tout $x \in D_f$.
- Si le point $\Omega(a, b)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$, alors $f'(2a - x) = f'(x)$ pour tout $x \in D_f$.

En particulier, la dérivée d'une fonction paire est impaire, et la dérivée d'une fonction impaire est paire.

Démonstration

Étape 1. Dans les deux cas, pour tout $x \in D_f$, $2a - x \in D_f$ (chapitre « Généralités sur les fonctions numériques »). La fonction $g : x \mapsto f(-x + 2a)$ est donc définie sur D_f ; par la dérivée de $x \mapsto f(\lambda x + \mu)$, avec $\lambda = -1$ et $\mu = 2a$ (chapitre « Dérivabilité »), elle est dérivable sur D_f et $g'(x) = -f'(2a - x)$.

Étape 2. Axe : $g = f$ sur D_f, donc $g' = f'$, c'est-à-dire $-f'(2a - x) = f'(x)$.

Étape 3. Centre : $f(x) = 2b - g(x)$ pour tout $x \in D_f$. Par différence, $f'(x) = -g'(x) = f'(2a - x)$.

Étape 4. Pour $a = 0$: une fonction paire a pour axe de symétrie l'axe des ordonnées, donc $f'(-x) = -f'(x)$; une fonction impaire a pour centre l'origine, donc $f'(-x) = f'(x)$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On dérive les deux membres de l'égalité de symétrie. La fonction $x \mapsto f(2a - x)$ a pour dérivée $x \mapsto -f'(2a - x)$: le signe moins vient du coefficient -1 devant x. Pour un axe, ce signe moins reste. Pour un centre, la constante $2b$ disparaît et deux signes moins se compensent.

Vérifie : Un nombre dérivé symétrique

La courbe d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ admet le point $\Omega(1, 2)$ pour centre de symétrie, et $f'(3) = -\dfrac{3}{4}$. Que vaut $f'(-1)$?

A. $\dfrac{3}{4}$

Faux.

C'est la règle d'un axe : pour un centre, les nombres dérivés sont égaux.

B. $2 - \dfrac{3}{4}$

Faux.

L'ordonnée b du centre disparaît en dérivant.

C. $-\dfrac{3}{4}$

Juste.

Juste : pour un centre, $f'(2a - x) = f'(x)$.

D. On ne peut pas le savoir.

Faux.

Pour un centre, $f'(2 - x) = f'(x)$: avec $x = 3$, on obtient $f'(-1)$.

Correction

Pour un centre $\Omega(a, b)$, $f'(2a - x) = f'(x)$. Avec $a = 1$ et $x = 3$, on obtient $f'(-1) = f'(3) = -\dfrac{3}{4}$.
On le vérifie sur $x \mapsto \dfrac{2x + 1}{x - 1}$: en -1, $-\dfrac{3}{(-2)^2} = -\dfrac{3}{4}$.

Exemple : la tangente sur un axe

Reprenons $f : x \mapsto x^2 - 4x + 5$, d'axe de symétrie la droite d'équation $x = 2$. Pour tout réel x, $f'(x) = 2x - 4$ et $f'(4 - x) = 4 - 2x$: c'est bien $-f'(x)$, la règle d'un axe.

Avec $x = 2$, la règle donne $f'(2) = -f'(2)$, donc $f'(2) = 0$. Sur un axe de symétrie, la tangente est horizontale, dès que f y est dérivable.

Méthode, à toi, en devoir

Méthode : réduire le domaine d'étude

1. **Chercher** une symétrie : parité, axe $x = a$ ou centre $\Omega(a, b)$. Contrôler d'abord que $2a - x$ reste dans D_f, puis calculer $f(2a - x)$. Pour une fonction trigonométrique, chercher aussi une période.
2. **Réduire** : étudier f sur $D_f \cap [a, +\infty[$, ou sur un intervalle de longueur une période. Avec une période T et un centre $\Omega(a, b)$, l'étude sur $D_f \cap \left[a, a + \dfrac{T}{2}\right]$ suffit.
3. **Étudier** f sur cette partie, puis **en déduire** les variations sur la partie symétrique.
4. **Compléter** la courbe par la symétrie, puis par les translations de vecteur $kT\vec{i}$, où $k \in \mathbb{Z}$.

À toi : Un centre de symétrie

Soit $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x + 1}$, définie pour $x \neq -1$. Montre que le point $\Omega(-1, -2)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Ici $a = -1$: calcule $2a - x = -2 - x$, et vérifie qu'il reste dans D_f.
Indice 2
Contrôle : écris $f(-2 - x)$ avec le dénominateur $x + 1$; la somme doit alors se simplifier.
Indice 3
Point délicat : réduis $f(x) + f(-2 - x)$ au même dénominateur, puis simplifie par $x + 1$.

Réponse
Appartenance. On a $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Pour $x \neq -1$, $-2 - x \neq -1$, donc $-2 - x \in D_f$.

Calcul. On a $(-2 - x)^2 + 3 = x^2 + 4x + 7$ et $(-2 - x) + 1 = -(x + 1)$. Donc, pour $x \neq -1$:

$$\begin{aligned} & f(x)+f(-2-x) \\ &= \frac{x^2+3}{x+1} \\ &\quad - \frac{x^2+4x+7}{x+1} \\ &= \frac{-4(x+1)}{x+1} = -4. \end{aligned}$$

Conclusion. Comme $-4 = 2 \times (-2)$, par la caractérisation d'un centre de symétrie, $\Omega(-1,-2)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

Remarque : Coin devoir : un centre de symétrie

En devoir, justifie l'appartenance avant le calcul :

« Pour tout $x \neq 1$, on a $2-x \neq 1$, et $f(2-x)+f(x)=4$. Donc le point $\Omega(1,2)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$, et on étudie f sur $]1,+\infty[$. »

Annonce ensuite comment tu complètes la courbe.

Courbe d'une fonction polynôme de degré 3

Un point remarquable

Devine : Le milieu des sommets

Reprends $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ des rappels. Son maximum local est atteint au point $(-2, 20)$, son minimum local au point $(1, -7)$. Soit I le milieu de ces deux points. Que remarques-tu ?

A. $I\left(-\frac{1}{2}, \frac{13}{2}\right)$, qui n'est pas sur la courbe.

Faux.

Calcule $f\left(-\frac{1}{2}\right)$: tu trouves $\frac{13}{2}$.

B. $I\left(-\frac{1}{2}, \frac{27}{2}\right)$, qui est sur la courbe.

Faux.

L'ordonnée du milieu est $\frac{20+(-7)}{2}$, et non $\frac{20+7}{2}$.

C. $I\left(-\frac{1}{2}, \frac{13}{2}\right)$, qui est sur la courbe.

Juste.

Juste : $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{2}$.

D. $I(0,0)$, l'origine du repère.

Faux.

L'abscisse du milieu est $\frac{-2+1}{2} = -\frac{1}{2}$.

Correction

Le milieu des points $(-2, 20)$ et $(1, -7)$ est $I\left(-\frac{1}{2}, \frac{13}{2}\right)$. Et :

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{2}\right) &= -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 6 \\ &= \frac{13}{2}. \end{aligned}$$

Le point I est sur la courbe. Ce n'est pas un hasard.

Pour toute fonction polynôme de degré 3, un point joue ce rôle.

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve calcule f'' : elle s'annule en changeant de signe en $x_0 = -\frac{b}{3a}$. Elle développe ensuite $f(x_0 + t)$. Seules des puissances impaires de t s'ajoutent alors à $f(x_0)$.

Inflexion et centre

Propriété : Courbe d'une fonction polynôme de degré 3

Soit $f : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$, où a, b, c, d sont des réels avec $a \neq 0$, et $x_0 = -\frac{b}{3a}$. Alors le point $\Omega\big(x_0, f(x_0)\big)$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$, et Ω est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

Démonstration

Étape 1. f est un polynôme : elle est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ et $f''(x) = 6ax + 2b = 6a(x - x_0)$ (chapitre « Dérivabilité »).

Étape 2. $f''(x_0) = 0$, et $f''(x)$ a le signe de a pour $x > x_0$, le signe contraire pour $x < x_0$: f'' s'annule en x_0 en changeant de signe. Par F12, Ω est un point d'inflexion.

Étape 3. Soit t un réel. En développant, $f(x_0 + t) = f(x_0) + (3ax_0 + b)t^2 + (3ax_0^2 + 2bx_0 + c)t + at^3$. Comme $3ax_0 + b = 0$, $f(x_0 + t) - f(x_0)$ ne contient que des puissances impaires de t : $f(x_0 + t) + f(x_0 - t) = 2f(x_0)$.

Étape 4. Avec $x = x_0 + t$: $f(2x_0 - x) + f(x) = 2f(x_0)$ pour tout réel x, et $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à x_0. Par la caractérisation d'un centre de symétrie (chapitre « Généralités sur les fonctions numériques »), Ω est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Deux idées. Pour l'inflexion, f'' est affine et change de signe en son zéro x_0.

Pour le centre, on pose $x = x_0 + t$: le terme en t^2 disparaît, car son coefficient $3ax_0 + b$ est nul. Une expression en t qui n'a que des puissances impaires est changée en son opposée quand on remplace t par $-t$: c'est la symétrie de centre Ω.

Vérifie : Le centre d'une cubique

Soit $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 2$. Quel est le centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$?

A. $(0, 2)$

Faux.

En 0, la tangente est horizontale : c'est un maximum local, pas le centre.

B. $(1, 0)$

Juste.

Juste : $x_0 = -\dfrac{b}{3a} = 1$ et $f(1) = 0$.

C. $(-1, -2)$

Faux.

Attention au signe : $x_0 = -\dfrac{-3}{3} = 1$.

D. $(2, -2)$

Faux.

C'est le minimum local : $f(2) = -2$.

Correction

Ici $a = 1$ et $b = -3$, donc $x_0 = -\dfrac{b}{3a} = 1$, et $f(1) = 0$. Le centre est $\Omega(1, 0)$: c'est le point d'inflexion trouvé plus haut. On vérifie que $f(2 - x) + f(x) = 0$ pour tout réel x.

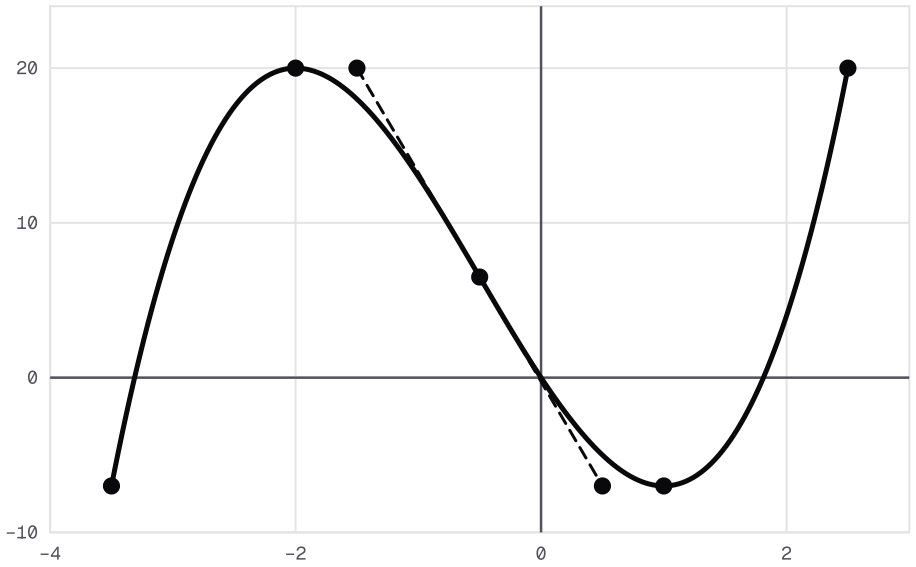
Exemple : le centre de x ↦ 2x³ + 3x² – 12x

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$. Ici $a = 2$ et $b = 3$, donc $x_0 = -\dfrac{3}{6} = -\dfrac{1}{2}$, et $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{13}{2}$.

Par la propriété, $\Omega\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{13}{2}\right)$ est à la fois point d'inflexion et centre de symétrie.

Contrôle. Pour tout réel x, $f''(x) = 12x + 6 = 12\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$, qui change de signe en $-\dfrac{1}{2}$. Les sommets $(-2, 20)$ et $(1, -7)$ sont bien symétriques par rapport à Ω.

La courbe ; la méthode



Avant de lire : où se trouve le centre de symétrie ? Courbe de x ↦ 2x³ + 3x² − 12x entre −7/2 et 5/2, et en pointillés sa tangente au point Ω(−1/2, 13/2), d'équation y = −27x/2 − 1/4. Les sommets (−2, 20) et (1, −7) et le point Ω sont marqués ; la courbe traverse sa tangente en Ω.

Méthode : concavité et points d'inflexion

1. **Préciser** les intervalles ouverts où f est deux fois dérivable, puis **calculer** $f''(x)$ et le factoriser.
2. **Dresser** le tableau de signes de f'' : la courbe est convexe là où $f'' \geq 0$, concave là où $f'' \leq 0$.
3. **Retenir** les réels a de D_f où f'' s'annule en changeant de signe : $A\big(a, f(a)\big)$ est un point d'inflexion. Sur chaque intervalle ouvert où f'' garde un signe strict, il n'y en a aucun, par la propriété du signe strict de la dérivée seconde.
4. **Écrire**, si on la demande, la tangente T_a : de part et d'autre de A, la courbe passe d'un côté à l'autre de T_a, au sens large.

À toi ; en devoir

À toi : Inflexion et centre

Soit $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 4$. Détermine le point d'inflexion Ω de $\mathcal{C}_f$. Montre ensuite que Ω est un centre de symétrie, en calculant $f(1+t) + f(1-t)$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Calcule $f''(x)$ et étudie son signe.
Indice 2

Développe $f(1+t)$: le terme en t^2 doit disparaître.

Indice 3

Point délicat : remplace t par $-t$ pour obtenir $f(1-t)$, puis additionne.

Réponse

Point d'inflexion. La fonction f est un polynôme, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x :

$$f'(x) = -3x^2 + 6x + 9,$$
$$\begin{aligned} f''(x) &= -6x + 6 \\ &= -6(x-1). \end{aligned}$$

La dérivée seconde s'annule en 1 en changeant de signe, et $f(1) = 7$: $\Omega(1,7)$ est un point d'inflexion.

Centre de symétrie. Pour tout réel t, en développant :

$$f(1+t) = 7 + 12t - t^3.$$

En remplaçant t par $-t$, on obtient $f(1-t) = 7 - 12t + t^3$. Donc :

$$f(1+t) + f(1-t) = 14.$$

Soit x un réel. Avec $t = x - 1$, on a $1 + t = x$ et $1 - t = 2 - x$, donc $f(2-x) + f(x) = 2 \times 7$. Par la caractérisation d'un centre de symétrie, Ω est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

Remarque : Coin devoir : un point d'inflexion

En devoir, justifie le changement de signe, puis donne le point :

« La dérivée seconde $f''(x) = 6(x-1)$ s'annule en 1 en changeant de signe : négative sur $]-\infty, 1[$, positive sur $]1, +\infty[$. Donc le point $A(1,0)$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$. »

Un tableau de signes de f'' peut accompagner la phrase.

Plan d'étude : une fonction rationnelle

Un plan d'étude

Devine : Par où commencer ?

Tu dois tracer la courbe d'une fonction rationnelle, sans calculatrice graphique. Par quoi commences-tu ?

A. Par la dérivée.

Faux.

La dérivée se calcule sur des intervalles de l'ensemble de définition : il faut le connaître d'abord.

B. Par un tableau de valeurs.

Faux.

Un tableau de valeurs ne montre ni les asymptotes ni les extremums exacts.

C. Par quelques points entiers.

Faux.

Quelques points ne disent rien de la courbe près d'une valeur interdite.

D. Par l'ensemble de définition.

Juste.

Juste : limites, dérivée et asymptotes en dépendent.

Correction

Tout part de l'ensemble de définition : il fixe les bornes où chercher les limites, et les intervalles où dériver. La méthode ci-dessous ordonne les étapes suivantes.

Méthode : le plan d'étude d'une fonction

1. **Domaine** : ensemble de définition ; symétries ou période qui réduisent l'étude.
2. **Comportement aux bornes** : limites, asymptotes et branches paraboliques, puis position de la courbe par rapport aux asymptotes.
3. **Variations** : dérivée sur chaque intervalle, signe, tableau de variations ; demi-tangentes là où f n'est dérivable que d'un côté.
4. **Compléments** : concavité et points d'inflexion si l'énoncé le demande, intersections avec les axes, puis tracé.

Une étude guidée

Exemple : Étude guidée : ensemble, limites, asymptotes

Soit f la fonction définie sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x+1}$.

En -1. Le numérateur tend vers 4. Par quotient :

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty.$$

La droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale.

À l'infini. Par la limite d'une fraction rationnelle à l'infini, $f(x)$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$, et vers $-\infty$ en $-\infty$. Pour $x \neq -1$:

$$\frac{x^2+3}{x+1} = x - 1 + \frac{4}{x+1}.$$

L'écart $\dfrac{4}{x+1}$ tend vers 0, par quotient : la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique des deux côtés.

Position. Cet écart a le signe de $x + 1$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (D) sur $]-1, +\infty[$, au-dessous sur $]-\infty, -1[$.

Exemple : Étude guidée : variations

Par la propriété du quotient, f est dérivable sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$, avec :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(x+1) - (x^2+3)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

Le dénominateur est strictement positif : $f'(x)$ a le signe du trinôme $(x+3)(x-1)$. Par le théorème du signe de la dérivée :

- f est strictement croissante sur $]-\infty, -3]$ et sur $[1, +\infty[$;
- elle est strictement décroissante sur $[-3, -1[$ et sur $]-1, 1]$.

Elle admet un maximum local $f(-3) = -6$ et un minimum local $f(1) = 2$.

Le tracé

Méthode : tracer la courbe

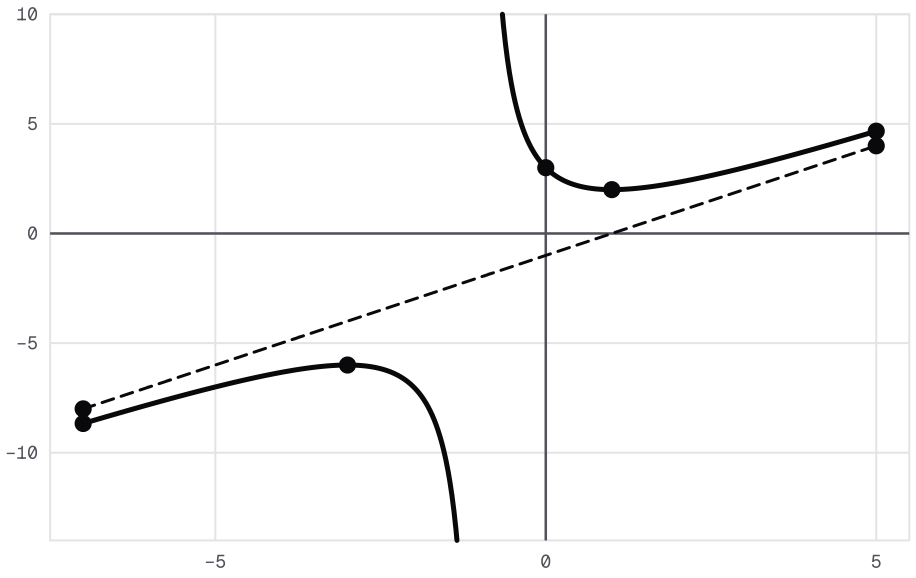
1. **Choisir** une unité adaptée aux valeurs du tableau de variations.
2. **Tracer** les asymptotes en premier, puis esquisser la direction de chaque branche parabolique.
3. **Placer** les points clés : chaque extremum avec sa tangente horizontale, chaque point d'inflexion avec sa tangente, les bords avec leurs demi-tangentes.
4. **Relier** les points en respectant les variations, le sens de la courbure et le côté de chaque asymptote ; **reproduire** la partie tracée par symétrie si le domaine a été réduit.

Exemple : Étude guidée : points remarquables et tracé

La courbe coupe l'axe des ordonnées au point $(0, 3)$. Elle ne coupe pas l'axe des abscisses, car $x^2 + 3 > 0$.

Les sommets $(-3, -6)$ et $(1, 2)$ ont pour milieu $\Omega(-1, -2)$, point commun des deux asymptotes. Pour $x \neq -1$, on vérifie que $-2 - x \neq -1$ et $f(-2 - x) + f(x) = -4$: par la caractérisation d'un centre, Ω est un centre de symétrie.

On trace les asymptotes, on place les sommets avec leurs tangentes horizontales, puis on relie en suivant le tableau.



$y = \dfrac{x^2+3}{x+1}$ $y = x - 1$ Point plein $(-3, -6)$ Point plein $(1, 2)$ Point plein $(0, 3)$ Point du graphe

Avant de lire : de quel côté de son asymptote oblique se trouve chaque branche ? Courbe de f : x ↦ (x² + 3)/(x + 1) entre −7 et 5, en deux branches de part et d'autre de x = −1, et en pointillés l'asymptote oblique y = x − 1. Les points (−3, −6), (1, 2) et (0, 3) sont marqués.

Vérifie : Une valeur minimale

Sur l'intervalle $]-1, +\infty[$, quelle est la plus petite valeur prise par $f(x)$?

A. 3, atteinte en 0.

Faux.

$f(0) = 3$, mais f décroît encore sur $[0, 1]$.

B. -2, l'ordonnée du centre.

Faux.

Le centre n'est pas un point de la courbe : $-1 \notin D_f$.

C. 2, atteinte en 1.

Juste.

Juste : c'est le minimum local, et le tableau n'a pas d'autre creux sur cet intervalle.

D. Aucune : la fonction tend vers l'infini.

Faux.

Les limites infinies sont aux bords ; entre les deux, la fonction atteint un minimum.

Correction

Sur $]-1,+\infty[$, f décroît sur $]-1,1]$, puis croît sur $[1,+\infty[$. Sa plus petite valeur sur cet intervalle est $f(1)=2$.

Pour tout $x>-1$, $f(x)\geq 2$.

Un piège ; la concavité

Attention : un point d'inflexion est un point de la courbe

✗ « La dérivée seconde de $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ change de signe en 0, donc sa courbe a un point d'inflexion d'abscisse 0. »

✓ Sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$, la dérivée seconde vaut $\dfrac{2}{x^3}$. La courbe est concave sur $]-\infty,0[$ et convexe sur $]0,+\infty[$.

Mais 0 n'appartient pas à l'ensemble de définition : aucun point de la courbe n'a pour abscisse 0. Sur chacun de ces deux intervalles ouverts, la dérivée seconde garde un signe strict. Par la propriété du signe strict de la dérivée seconde, la courbe n'a aucun point d'inflexion.

À toi : La concavité de la même courbe

Pour la même fonction, étudie la concavité de $\mathcal{C}_f$, puis ses points d'inflexion. Utilise l'écriture $x-1+\dfrac{4}{x+1}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Dérive deux fois $x\mapsto\dfrac{4}{x+1}$ par la propriété de l'inverse.

Indice 2

Contrôle : le numérateur de ta dérivée seconde doit être une constante positive.

Indice 3

Point délicat : -1 n'appartient pas à D_f ; étudie chaque intervalle séparément.

Réponse

Dérivées. Sur chacun des intervalles $]-\infty,-1[$ et $]-1,+\infty[$, par la propriété de l'inverse :

$$f'(x)=1-\frac{4}{(x+1)^2},$$

$$f''(x)=\frac{8}{(x+1)^3}.$$

Concavité. Sur $]-\infty,-1[$, $f''(x)<0$: $\mathcal{C}_f$ est concave. Sur $]-1,+\infty[$, $f''(x)>0$: elle est convexe.

Points d'inflexion. La concavité change de part et d'autre de -1, mais $-1\notin D_f$. Sur chacun des deux intervalles ouverts, f'' garde un signe strict : par la propriété du signe strict de la dérivée seconde, la courbe n'a aucun point d'inflexion.

Une étude trigonométrique ; exploiter une courbe

Une étude trigonométrique

Devine : Deux symétries cachées

Soit $f(x) = 2\cos x + \cos(2x)$, définie sur $\mathbb{R}$. Laquelle de ces affirmations est vraie pour tout réel x ?

A. $f(x+\pi) = f(x)$ et $f(-x) = f(x)$

Faux.

$f(\pi) = -1$ alors que $f(0) = 3$: π n'est pas une période.

B. $f(x+2\pi) = f(x)$ et $f(-x) = -f(x)$

Faux.

Le cosinus est pair : $\cos(-x) = \cos x$, donc f est paire.

C. $f(x+2\pi) = f(x)$ et $f(-x) = f(x)$

Juste.

Juste : $\cos x$ et $\cos(2x)$ sont paires et admettent la période 2π.

D. Aucune égalité de ce type n'est vraie.

Faux.

Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \cos(2x)$ sont paires et admettent la période 2π.

Correction

Pour tout réel x, $\cos(x+2\pi) = \cos x$ et $\cos(2x+4\pi) = \cos(2x)$: 2π est une période de f. De plus, $\cos(-x) = \cos x$ et $\cos(-2x) = \cos(2x)$: f est paire.

On étudie donc f sur $[0, \pi]$, puis on complète la courbe par symétrie et par translations.

Exemple : Étude guidée : variations sur $[0, \pi]$

Par la propriété de $x \mapsto f(ax+b)$ et par somme, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x :

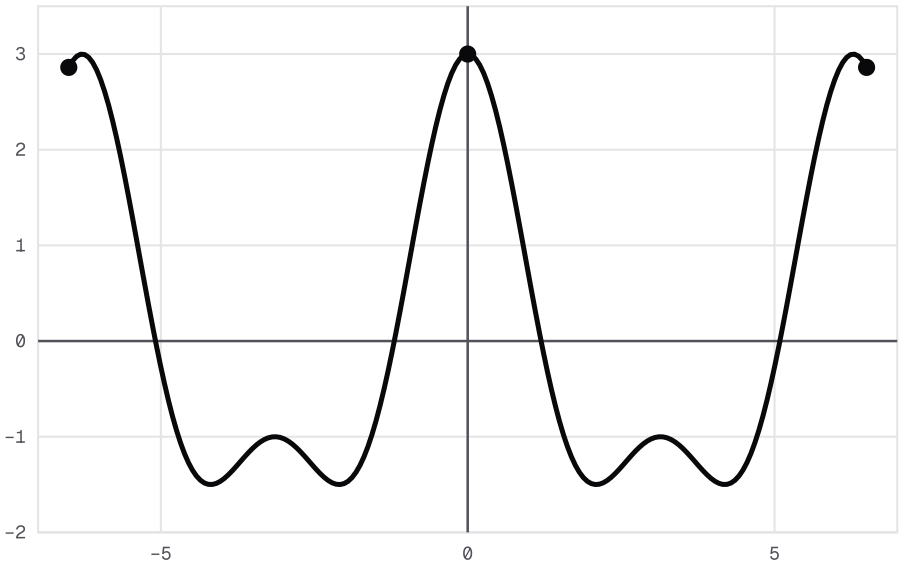
$$f'(x) = -2\sin x - 2\sin(2x).$$

Comme $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$, on obtient :

$$f'(x) = -2\sin x\,(1 + 2\cos x).$$

Signe. Sur $[0, \pi]$, $\sin x \geq 0$. Le cosinus est strictement décroissant sur $[0, \pi]$, et $\cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$. Donc $1 + 2\cos x \geq 0$ sur $\left[0, \dfrac{2\pi}{3}\right]$ et $1 + 2\cos x \leq 0$ sur $\left[\dfrac{2\pi}{3}, \pi\right]$.

Variations. Par le théorème du signe de la dérivée, f est décroissante sur $\left[0, \dfrac{2\pi}{3}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{2\pi}{3}, \pi\right]$. On a $f(0) = 3$, $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{3}{2}$ et $f(\pi) = -1$.



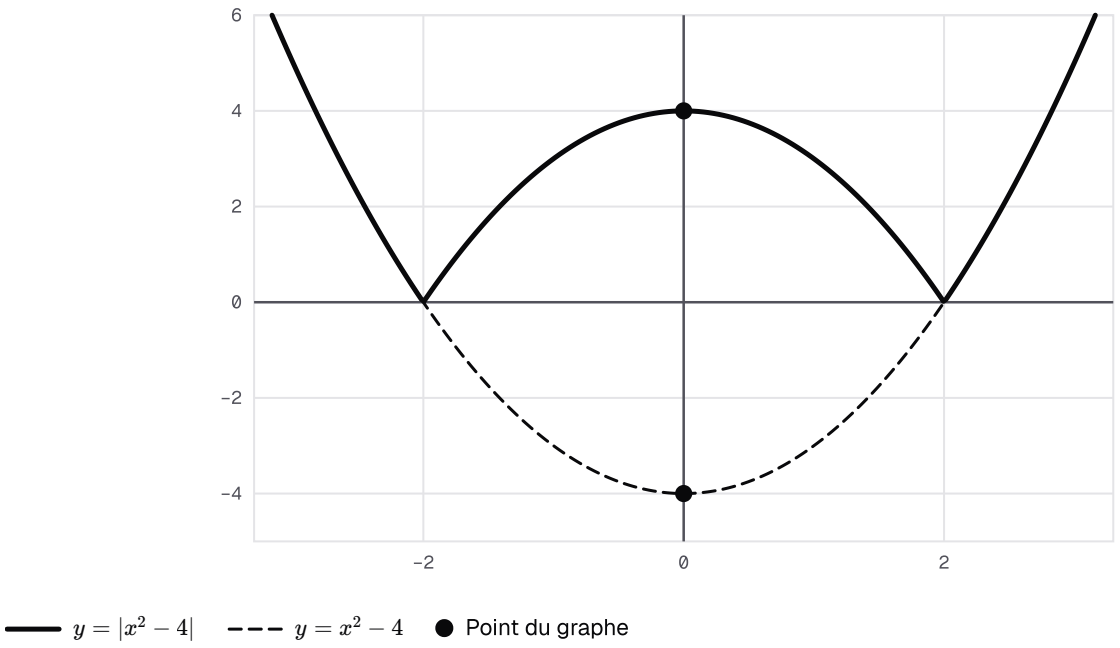
$y = 2\cos x + \cos(2x)$ ● Point plein $(0, 3)$ ● Point du graphe

Avant de lire : quelle partie de la courbe suffit pour reconstruire le reste ? Courbe de x ↦ 2cos x + cos(2x) entre −13/2 et 13/2. Elle est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, et se reproduit par les translations de 2π le long de l'axe des abscisses. Le point (0, 3) est marqué ; les minimums valent −3/2.

Courbes avec une valeur absolue

Après les symétries et la période, une autre transformation : la valeur absolue. Pour $x = 0$, la parabole d'équation $y = x^2 - 4$ passe par $(0, -4)$, sous l'axe des abscisses. La courbe de $x \mapsto |x^2 - 4|$ passe par $(0, 4)$: ce point est retourné.

Pourquoi est-ce vrai ? Pour $|f|$, la preuve distingue le signe de $f(x)$. Pour $x \mapsto f(|x|)$, elle montre que la fonction est paire, puis lit la partie d'abscisse positive.



Parabole d'équation y = x² − 4 (en pointillés) et courbe de x ↦ |x² − 4| : entre −2 et 2, la partie située sous l'axe des abscisses est retournée au-dessus ; le point (0, −4) devient (0, 4).

Propriété : Courbes obtenues avec la valeur absolue

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthogonal.

1. La courbe de $g : x \mapsto |f(x)|$ est formée des points de $\mathcal{C}_f$ d'ordonnée positive ou nulle, et des symétriques, par rapport à l'axe des abscisses, des points de $\mathcal{C}_f$ d'ordonnée strictement négative.
2. Soit $h : x \mapsto f(|x|)$, définie pour les réels x tels que $|x| \in D_f$. La fonction h est paire ; sa courbe est formée des points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse positive ou nulle, et de leurs symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Démonstration

Étape 1. Soit $x \in D_f$. Si $f(x) \geq 0$, alors $g(x) = f(x)$: le point de la courbe de g d'abscisse x est celui de $\mathcal{C}_f$. Si $f(x) < 0$, alors $g(x) = -f(x)$: le point $\big(x, -f(x)\big)$ est le symétrique de $\big(x, f(x)\big)$ par rapport à l'axe des abscisses.

Étape 2. Pour tout réel x, $|-x| = |x|$: l'ensemble de définition de h est symétrique par rapport à 0, et $h(-x) = h(x)$. Donc h est paire.

Étape 3. Pour $x \geq 0$ tel que $x \in D_f$, $h(x) = f(x)$: ces points sont ceux de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse positive ou nulle. Pour $x < 0$, $h(x) = h(-x) = f(-x)$: le point $\big(x, h(x)\big)$ est le symétrique, par rapport à l'axe des ordonnées, du point $\big(-x, f(-x)\big)$ de $\mathcal{C}_f$, d'abscisse $-x > 0$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour $|f|$: là où f est positive, rien ne change ; là où elle est négative, on change le signe de l'ordonnée.

Pour $x \mapsto f(|x|)$: la valeur absolue rend la fonction paire, et pour $x \geq 0$ elle coïncide avec f. Une moitié de $\mathcal{C}_f$, puis un miroir.

Vérifie : Un point retourné

Soit $g : x \mapsto |x^2 - 4|$. Quel est le point de la courbe de g d'abscisse 1 ?

A. $(1, -3)$

Faux.
C'est le point de la parabole d'équation $y = x^2 - 4$; la valeur absolue le remplace par son symétrique.

B. $(-1, 3)$

Faux.
La valeur absolue de la fonction garde l'abscisse et change l'ordonnée.

C. $(1, 4)$

Faux.
$|1 - 4| = 3$, et non 4.

D. $(1, 3)$

Juste.
Juste : $|1 - 4| = 3$.

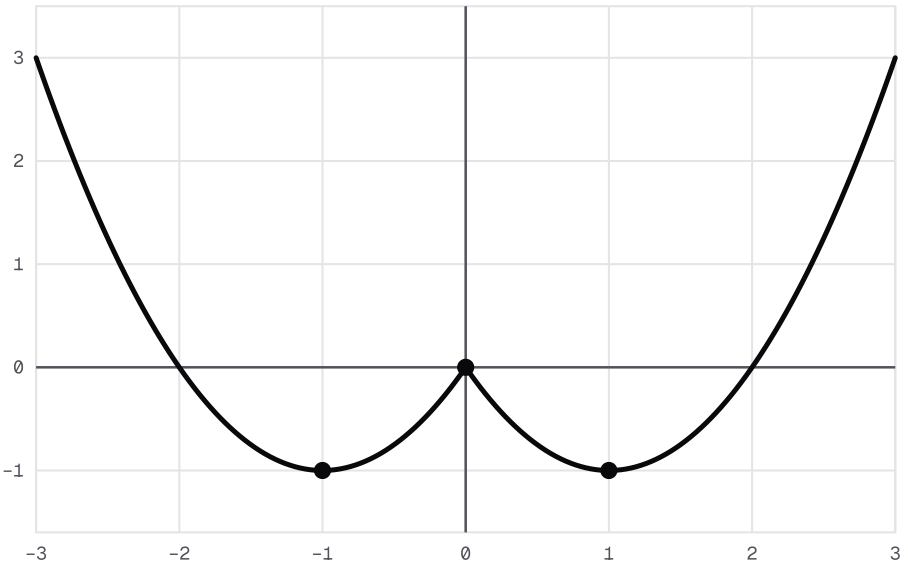
Correction
On a $1^2 - 4 = -3 < 0$: le point $(1, -3)$ de la parabole est sous l'axe des abscisses. Sur la courbe de g, il est remplacé par son symétrique $(1, 3)$ par rapport à cet axe.

Exemple : la courbe de x ↦ x² – 2|x|

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2|x|$. Pour $x \geq 0$, $f(x)$ vaut $x^2 - 2x$: on retrouve la parabole de $x \mapsto x^2 - 2x$, de sommet $(1, -1)$.

Par la propriété, f est paire : on complète par la symétrie d'axe l'axe des ordonnées. La courbe a deux sommets, $(-1, -1)$ et $(1, -1)$, et passe par l'origine.

En 0, elle forme une pointe : les nombres dérivés à droite et à gauche valent -2 et 2.



Courbe de f : x ↦ x² − 2|x| : la parabole de x ↦ x² − 2x pour x ≥ 0, complétée par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées. Sommets (−1, −1) et (1, −1), pointe à l'origine.

Lire une équation sur une courbe

Méthode : valeur absolue, puis lecture d'une équation

Courbes avec une valeur absolue.

1. **Courbe de** $|f|$: conserver la partie de $\mathcal{C}_f$ située au-dessus de l'axe des abscisses ; remplacer l'autre par son image dans le miroir de cet axe.
2. **Courbe de** $x \mapsto f(|x|)$: conserver la partie d'abscisse positive ou nulle, puis la doubler par la symétrie d'axe l'axe des ordonnées.

Lire une équation $f(x) = m$ sur une courbe.

3. **Tracer** la droite d'équation $y = m$: les solutions sont les abscisses des points communs.
4. **Conclure prudemment** : le nombre de points lus n'est qu'une conjecture. Si l'équation se résout, le calcul la confirme.

Exemple : une conjecture, puis une confirmation

Combien l'équation $2\cos x + \cos(2x) = 0$ a-t-elle de solutions dans $[0, \pi]$?

Lecture. Sur la courbe, f descend de 3 à $-\dfrac{3}{2}$, puis remonte à -1 : on lit **une** solution. Ce n'est qu'une conjecture.

Calcul. Confirmons-la. Avec $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ et $c = \cos x$, l'équation devient :

$$2c^2 + 2c - 1 = 0.$$

Ses racines sont $\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$. La seconde est inférieure à -1 : elle est exclue. La première est entre -1 et 1 : sur le cercle trigonométrique, $\cos x = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ a une solution dans $[0, \pi]$. Elle est unique, car le cosinus est strictement décroissant sur $[0, \pi]$.

Conclusion. L'équation a une seule solution dans $[0, \pi]$. La conjecture est confirmée.

À toi ; en devoir

À toi : Une valeur absolue et une équation

On note g la fonction $x \mapsto |x^2 - 4|$. Décris sa courbe à partir de la parabole d'équation $y = x^2 - 4$. Conjecture ensuite le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 3$, puis confirme par le calcul. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
La parabole est sous l'axe des abscisses pour $-2 < x < 2$: retourne cette partie.
Indice 2
Calcule $g(0)$ et compare-le à 3 : la droite d'équation $y = 3$ coupe-t-elle l'arc retourné ?
Indice 3
Point délicat : $|u| = 3$ équivaut à $u = 3$ ou $u = -3$.

Réponse
Courbe. La parabole d'équation $y = x^2 - 4$ est sous l'axe des abscisses entre -2 et 2. On remplace cette partie par sa symétrique : un arc qui monte jusqu'à $(0, 4)$.

Lecture. La droite d'équation $y = 3$ coupe la courbe en quatre points : on conjecture quatre solutions.

Calcul. L'équation $|x^2 - 4| = 3$ équivaut à $x^2 - 4 = 3$ ou $x^2 - 4 = -3$, c'est-à-dire à $x^2 = 7$ ou $x^2 = 1$. Les solutions sont $-\sqrt{7}$, -1, 1 et $\sqrt{7}$: la conjecture est confirmée.

Remarque : Coin devoir : une lecture graphique

En devoir, une lecture graphique s'annonce comme telle :

« Graphiquement, la droite d'équation $y = 3$ coupe la courbe de g en quatre points ; on conjecture que l'équation $g(x) = 3$ a quatre solutions. »

Si tu sais résoudre l'équation, confirme par le calcul, puis conclus.

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir : quelle méthode pour quelle question

- Asymptote verticale ou horizontale : une limite infinie en un réel, ou une limite finie à l'infini.
- Asymptote oblique : la limite de $\frac{f(x)}{x}$, puis celle de $f(x) - ax$; ou une écriture $ax + b$ plus une fraction de limite nulle.
- Branche parabolique : la limite de $\frac{f(x)}{x}$ donne la direction.
- Position relative : le signe de $f(x) - (mx + p)$.
- Concavité : le signe de f'' ; point d'inflexion : f'' s'annule en changeant de signe ; aucun sur un intervalle ouvert où f'' garde un signe strict.
- Symétries et période : réduire l'étude, puis compléter la courbe.
- Étude complète : domaine, bornes et asymptotes, variations, compléments, puis tracé.
- Courbe de $|f|$: miroir de la partie sous l'axe des abscisses ; courbe de $x \mapsto f(|x|)$: partie d'abscisse positive, doublée par symétrie.
- Nombre de solutions de $f(x) = m$: une lecture sur la courbe, à confirmer par le calcul.

Le mot du prof. Tu sais maintenant lire une courbe au loin, mesurer la façon dont elle tourne et repérer ses symétries. Tu sais aussi conduire une étude complète, de l'ensemble de définition jusqu'au tracé.

Garde l'ordre du plan d'étude, et nomme chaque règle. En 2BAC SM, ces gestes reviendront avec de nouvelles fonctions.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Étude et représentation des fonctions » (1bac · sciences-mathematiques · mathematiques)