BURHAN

Résumé : Ensembles et applications

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/ensembles-et-applications/resume

Chapitre	Semestre
Ensembles et applications	Semestre 1

Ensembles, appartenance, inclusion

> **À retenir : Le réflexe : élément ou partie ?**
>
> Un ensemble se donne en extension, par la liste de ses éléments : $\{0, 5, 10\}$. Il se donne aussi en compréhension, par une propriété : $\{n \in \mathbb{N} \,/\, n \leq 10 \text{ et } 5 \text{ divise } n\}$. Ici, les deux écritures désignent le même ensemble.
>
> Avant d'écrire un symbole, demande-toi si l'objet est un élément ($\in$) ou une partie ($\subset$).

Définition : Ensemble, appartenance, inclusion, égalité

Un **ensemble** est une collection d'objets, appelés ses **éléments**. On écrit $x \in E$ lorsque x est un élément de l'ensemble E, et $x \notin E$ sinon. L'**ensemble vide**, noté $\varnothing$, n'a aucun élément.

Soit A et B deux ensembles.

- A est **inclus** dans B, noté $A \subset B$, si tout élément de A est un élément de B : $\forall x,\ (x \in A \Rightarrow x \in B)$. On dit aussi que A est une **partie** de B.
- A et B sont **égaux**, noté $A = B$, s'ils ont les mêmes éléments, c'est-à-dire si $(A \subset B \text{ et } B \subset A)$.

Méthode : démontrer une inclusion

1. **Introduis** un élément quelconque : « Soit $x \in A$ ».
2. **Traduis** $x \in A$ par la propriété qui définit A.
3. **Déduis**, pas à pas, la propriété qui définit B.
4. **Conclus** : « donc $x \in B$ ». Comme x est quelconque, $A \subset B$ (définition de l'inclusion, F01).
5. **Pour réfuter** $A \subset B$, exhibe un élément de A qui n'appartient pas à B.

Exemple

Énoncé. On pose $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, |x - 3| \leq 1\}$. Montre que $A \subset [1, 5]$.

Rédaction. Soit $x \in A$. Alors $|x - 3| \leq 1$, donc $-1 \leq x - 3 \leq 1$, puis $2 \leq x \leq 4$.

Comme $1 \leq 2$ et $4 \leq 5$, on obtient $1 \leq x \leq 5$: $x \in [1, 5]$. Ainsi $A \subset [1, 5]$.

L'autre inclusion est fausse. $5 \in [1,5]$, mais $|5-3| = 2 > 1$, donc $5 \notin A$: $[1,5] \not\subset A$.

Attention : Appartenance ou inclusion

On a $0 \in \{0,5\}$ et $\{0\} \subset \{0,5\}$, mais $\{0\} \notin \{0,5\}$: les éléments de $\{0,5\}$ sont des nombres.

De même, $\varnothing \subset E$ pour tout ensemble E, mais $\{\varnothing\}$ n'est pas vide : il a un élément.

Dans $\mathcal{P}(E)$, les éléments sont des parties : $X \in \mathcal{P}(E)$ équivaut à $X \subset E$ (définition de l'ensemble des parties, F05).

Opérations sur les parties d'un ensemble

Définition : Intersection, réunion, différence, complémentaire

Soit E un ensemble, et A et B deux parties de E.

- L'**intersection** de A et B est $A \cap B = \{x \in E \,/\, x \in A \text{ et } x \in B\}$.
- La **réunion** de A et B est $A \cup B = \{x \in E \,/\, x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
- La **différence** de A et B est $A \setminus B = \{x \in E \,/\, x \in A \text{ et } x \notin B\}$.
- Le **complémentaire** de A dans E est $\overline{A} = E \setminus A$.

On dit que A et B sont **disjointes** lorsque $A \cap B = \varnothing$.

Propriété : Distributivité de l'intersection et de la réunion

Soit E un ensemble, et A, B et C trois parties de E. Alors :

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Propriété : Complémentaire et lois de Morgan

Soit E un ensemble, et A et B deux parties de E. Les complémentaires sont pris dans E. Alors :

- $\overline{\overline{A}} = A$ et $A \setminus B = A \cap \overline{B}$;
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (**lois de Morgan**) ;
- $A \subset B$ si et seulement si $\overline{B} \subset \overline{A}$.

Intersection	Réunion
$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B)$	$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B)$

Différence

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \notin B)$$

Complémentaire dans E

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } x \notin A)$$

Différence et complémentaire

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}$$

Loi de Morgan (intersection)

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Loi de Morgan (réunion)

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Distributivité

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Exemple

Énoncé. Dans $E = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, on pose $A = \{0, 3, 6, 9\}$, les multiples de 3, et $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, les nombres pairs. Calcule $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, puis le complémentaire de $A \cup B$ dans E.

Calculs. $A \cap B = \{0, 6\}$; $A \cup B = \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$; $A \setminus B = \{3, 9\}$.

Complémentaire. $\overline{A \cup B} = \{1, 5, 7\}$.

Contrôle par les lois de Morgan (F04). $\overline{A} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ et $\overline{B} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, donc $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1, 5, 7\}$.

Attention : Morgan échange intersection et réunion

Le complémentaire d'une intersection est une réunion : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (lois de Morgan, F04).

Dans l'exemple précédent, $\overline{A \cap B} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$, alors que $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1, 5, 7\}$.

La différence dépend aussi de l'ordre : $A \setminus B = \{3, 9\}$, mais $B \setminus A = \{2, 4, 8\}$.

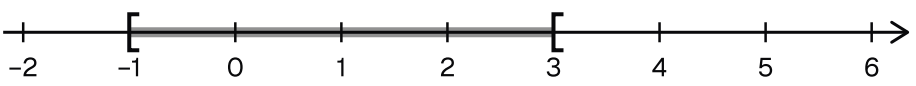
Exemple

Énoncé. Dans $\mathbb{R}$, on pose $A = [-1, 3[$ et $B =]2, 5]$.

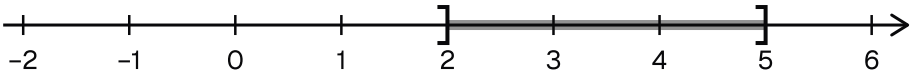
Résultats. $A \cap B =]2, 3[$ et $A \cup B = [-1, 5]$. Puis $A \setminus B = [-1, 2]$: le réel 2 y est, car $2 \notin B$.

Le complémentaire de A dans $\mathbb{R}$ est $]-\infty, -1[\cup [3, +\infty[$.

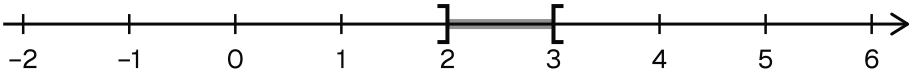
Réflexe. Place les bornes sur une droite graduée. Pour chacune, décide si elle appartient à l'ensemble cherché.



La partie A = [-1, 3[: fermée à gauche, ouverte en 3.



La partie B =]2, 5] : ouverte en 2, fermée en 5.



Leur partie commune]2, 3[: les deux bornes manquent, l'une à B, l'autre à A.

Démontrer une égalité d'ensembles

Méthode : démontrer une égalité d'ensembles

1. **Double inclusion** : montre $A \subset B$, puis $B \subset A$, chacune par la méthode de l'inclusion (définition de l'égalité, F01).
2. **Équivalences successives** : pour x quelconque, écris $x \in A \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x \in B$. Chaque pas doit être vrai dans les deux sens.
3. **Calcul sur les ensembles** : transforme un membre avec la distributivité (F03) et les lois de Morgan (F04), sans repasser par les éléments.
4. **Pour réfuter** l'égalité, trouve un élément qui appartient à un seul des deux ensembles.

Exemple

Énoncé. Soit A et B deux parties d'un ensemble E. Montre que $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$.

Premier sens. Soit $x \in (A \setminus B) \cup (A \cap B)$. Si $x \in A \setminus B$, alors $x \in A$. Si $x \in A \cap B$, alors $x \in A$ aussi.

Second sens. Soit $x \in A$. Raisonnons par disjonction des cas. Si $x \in B$, alors $x \in A \cap B$. Si $x \notin B$, alors $x \in A \setminus B$. Dans les deux cas, x appartient à la réunion.

Conclusion. Par double inclusion, les deux ensembles sont égaux.

Exemple

Énoncé. A-t-on toujours $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$?

Contre-exemple. Prenons $A = \{0, 1\}$ et $B = C = \{1\}$. Alors $B \setminus C = \varnothing$, donc $A \setminus (B \setminus C) = \{0, 1\}$. Mais $A \setminus B = \{0\}$, donc $(A \setminus B) \setminus C = \{0\}$.

Conclusion. Le nombre 1 est dans le premier ensemble, pas dans le second : l'égalité est fausse en général.

Ensemble des parties, produit cartésien

Définition : Ensemble des parties ; produit cartésien

Soit E un ensemble. L'**ensemble des parties** de E, noté $\mathcal{P}(E)$, est l'ensemble dont les éléments sont les parties de E : $X \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow X \subset E$. En particulier, $\varnothing \in \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$.

Soit E et F deux ensembles. Le **produit cartésien** $E \times F$ est l'ensemble des **couples** (x, y) tels que $x \in E$ et $y \in F$. Deux couples sont égaux lorsqu'ils ont les mêmes composantes, dans le même ordre : $(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow (x = x' \text{ et } y = y')$. On note $E^2 = E \times E$.

Propriété : Produit cartésien, intersection et ensemble vide

Soit E et F deux ensembles, A et C deux parties de E, B et D deux parties de F. Alors :

- $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$;
- $A \times B = \varnothing$ si et seulement si $(A = \varnothing \text{ ou } B = \varnothing)$.

Exemple

Énoncé. Écris $\mathcal{P}(\{u, v\})$, puis $\mathcal{P}(\varnothing)$.

Méthode. Range les parties selon leur nombre d'éléments : aucun, un, puis deux.

Résultats. $\mathcal{P}(\{u, v\}) = \{\varnothing, \{u\}, \{v\}, \{u, v\}\}$.

L'ensemble vide n'a qu'une partie, lui-même : $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$. Cet ensemble n'est pas vide.

Exemple

Énoncé. On pose $A = \{0, 7\}$ et $B = \{-1, 1\}$. Écris $A \times B$ et compare avec $B \times A$.

Résultat. $A \times B = \{(0, -1), (0, 1), (7, -1), (7, 1)\}$.

L'ordre compte. $(0, 1) \in A \times B$, mais $(0, 1) \notin B \times A$, car $0 \notin B$. Donc $A \times B \neq B \times A$. Au contraire, $\{0, 1\} = \{1, 0\}$: un ensemble ne tient pas compte de l'ordre.

Attention : Une réunion de produits n'est pas toujours un produit

La propriété des produits cartésiens (F06) donne l'intersection de deux produits, pas leur réunion. Par exemple, $D = ([0, 1] \times [0, 1]) \cup ([2, 3] \times [2, 3])$ n'est pas un produit.

Supposons par l'absurde que $D = A \times B$. Comme $(0, 0) \in D$, $0 \in A$; comme $(2, 2) \in D$, $2 \in B$. Donc $(0, 2) \in A \times B = D$.

Or $2 \notin [0, 1]$ et $0 \notin [2, 3]$, donc $(0, 2) \notin D$: contradiction.

Applications

Définition : Application ; égalité ; identité ; restriction et prolongement

Soit E et F deux ensembles. Une **application** f de E dans F, notée $f : E \to F$, associe à **chaque** élément x de E **un unique** élément de F, noté $f(x)$ et appelé l'**image** de x par f. Si $y = f(x)$, on dit que x est **un antécédent** de y par f. E est l'ensemble de départ, F l'ensemble d'arrivée.

Deux applications $f : E \to F$ et $g : E' \to F'$ sont **égales** si $E = E'$, $F = F'$ et $\forall x \in E,\ f(x) = g(x)$.

L'**application identique** de E est $\mathrm{Id}_E : E \to E, x \mapsto x$.

Soit A une partie de E. La **restriction** de f à A est l'application $f_{|A} : A \to F, x \mapsto f(x)$. Une application $h : E \to F$ telle que $h_{|A} = g$, où $g : A \to F$, est un **prolongement** de g à E.

À retenir : Une application : départ, arrivée, une image pour chaque élément

Une formule ne suffit pas : il faut aussi l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée. La formule $x \mapsto \sqrt{x-4}$ ne définit pas une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: le réel 0 n'a pas d'image. Elle définit une application de $[4, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

Exemple

Énoncé. On pose $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (x-1)(x+1)$, puis $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 1$ et $h : \mathbb{R} \to [-1, +\infty[, x \mapsto x^2 - 1$.

Égalité. Pour tout réel x, $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$. Mêmes ensembles, mêmes images : $f = g$ (égalité de deux applications, F07).

Différence. L'application h est bien définie, car $x^2 - 1 \geq -1$. Pourtant $g \neq h$: leurs ensembles d'arrivée diffèrent.

Restriction. $g_{|[0,+\infty[}$ est l'application de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $x^2 - 1$.

Image directe, image réciproque

Définition : Image directe, image réciproque d'une partie

Soit $f : E \to F$ une application, A une partie de E et B une partie de F.

- L'**image directe** de A par f est la partie de F : $f(A) = \{f(x) \,/\, x \in A\}$. Ainsi, $y \in f(A) \Leftrightarrow (\exists x \in A,\ y = f(x))$.
- L'**image réciproque** de B par f est la partie de E : $f^{-1}(B) = \{x \in E \,/\, f(x) \in B\}$. Ainsi, pour tout $x \in E$, $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$.

La notation $f^{-1}(B)$ a un sens pour **toute** application f, bijective ou non.

Méthode : déterminer une image directe ou réciproque

1. **Image réciproque** $f^{-1}(B)$: résous la condition $f(x) \in B$, d'inconnue x dans l'ensemble de départ (définition de l'image réciproque, F08).
2. **Image directe** $f(A)$: cherche les y pour lesquels $f(x) = y$ a une solution x **dans** A.
3. **Rédige** $f(A)$ par double inclusion : chaque $f(x)$, avec $x \in A$, est dans l'ensemble annoncé ; chaque y annoncé a un antécédent dans A.
4. **Contrôle** sur quelques valeurs, sans t'en contenter.

Exemple

Énoncé. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 2x$. Détermine $f^{-1}(\{3\})$ et $f^{-1}(]-\infty, -2])$.

Forme utile. Pour tout réel x, $f(x) = (x-1)^2 - 1$.

Premier calcul. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(x) = 3 &\Leftrightarrow (x-1)^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow x - 1 = 2 \text{ ou } x - 1 = -2. \end{aligned}$$

Donc $f^{-1}(\{3\}) = \{-1, 3\}$.

Second calcul. Pour tout réel x, $f(x) \geq -1 > -2$. Aucun réel ne convient : $f^{-1}(]-\infty, -2]) = \varnothing$.

Exemple

Énoncé. Avec la même application f, montre que $f([0,3]) = [-1,3]$.

Première inclusion. Soit $x \in [0,3]$. Alors $-1 \leq x - 1 \leq 2$, donc $|x-1| \leq 2$ et $0 \leq (x-1)^2 \leq 4$. Ainsi $-1 \leq f(x) \leq 3$.

Seconde inclusion. Soit $y \in [-1,3]$. Posons $x = 1 + \sqrt{y+1}$. Comme $0 \leq \sqrt{y+1} \leq 2$, on a $x \in [1,3]$, donc $x \in [0,3]$. Et $f(x) = (y+1) - 1 = y$.

Conclusion. Par double inclusion, $f([0,3]) = [-1,3]$.

Propriété : Image directe : inclusion, réunion, intersection

Soit $f : E \to F$ une application, et A et A' deux parties de E. Alors :

- si $A \subset A'$, alors $f(A) \subset f(A')$;
- $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$;
- $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$, et cette inclusion peut être stricte.

Propriété : Image réciproque : inclusion, réunion, intersection, complémentaire

Soit $f : E \to F$ une application, et B et B' deux parties de F. Alors :

- si $B \subset B'$, alors $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$;
- $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$ et $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$;
- $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$, le premier complémentaire étant pris dans F, le second dans E.

Inclusion conservée
$$A \subset A' \Rightarrow f(A) \subset f(A')$$

Image d'une réunion
$$f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$$

Image d'une intersection
$$f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$$

Image réciproque d'une réunion
$$f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$$

Image réciproque d'une intersection
$$f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$$

Image réciproque du complémentaire
$$f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$$

Attention : L'image d'une intersection peut être plus petite

La propriété des images directes (F09) ne donne qu'une inclusion pour l'intersection.

Avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 2x$, prends $A = \{0\}$ et $A' = \{2\}$. Alors $A \cap A' = \varnothing$, donc $f(A \cap A') = \varnothing$. Pourtant $f(0) = f(2) = 0$, donc $f(A) \cap f(A') = \{0\}$.

Deux éléments distincts de même image suffisent à rendre l'inclusion stricte.

Attention : Une image réciproque n'exige pas de bijection

L'image réciproque $f^{-1}(B)$ a un sens pour toute application : c'est l'ensemble des éléments de départ dont l'image est dans B.

Avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 2x$, on a trouvé $f^{-1}(\{3\}) = \{-1, 3\}$, et f n'est pas bijective. Une image réciproque peut aussi être vide.

Seule l'application réciproque f^{-1} exige une bijection.

Injections, surjections

Définition : Application injective, application surjective

Soit $f : E \to F$ une application.

- f est **injective** si : $\forall (x, x') \in E^2,\ \big(f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'\big)$. Par contraposée, deux éléments distincts de E ont des images distinctes : tout élément de F a **au plus un** antécédent.

- f est **surjective** si : $\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)$. Tout élément de F a **au moins un** antécédent : $f(E) = F$.

Méthode : étudier l'injectivité

1. **Pour démontrer** : « Soit x et x' deux éléments de E de même image ». Déduis $x = x'$ (définition de l'injectivité, F11).
2. **Pour réfuter** : exhibe deux éléments distincts de E, puis calcule leurs images et constate qu'elles sont égales.
3. **Variante** : par contraposée, montre que deux éléments distincts ont des images distinctes.

Méthode : étudier la surjectivité

1. **Pour démontrer** : « Soit $y \in F$ ». Résous $f(x) = y$, d'inconnue x.
2. **Vérifie** que la solution trouvée appartient à l'ensemble de départ E ; sinon, ce n'est pas un antécédent.
3. **Pour réfuter** : exhibe $y_0 \in F$, puis montre qu'aucun $x \in E$ ne vérifie $f(x) = y_0$.

Exemple

Énoncé. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 2x$. Étudie l'injectivité de f, puis celle de sa restriction $f_{|[1,+\infty[}$: $[1, +\infty[\to \mathbb{R}$.

Pour f. Les réels 0 et 2 sont distincts et ont la même image, 0 : f n'est pas injective.

Pour la restriction. Soit x et x' dans $[1, +\infty[$ de même image. Alors $(x-1)^2 - 1 = (x'-1)^2 - 1$, donc $(x-1)^2 = (x'-1)^2$.

Or $x - 1 \geq 0$ et $x' - 1 \geq 0$; deux réels positifs de même carré sont égaux. Donc $x = x'$: cette restriction est injective.

Exemple

Énoncé. L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 2x$ est-elle surjective ? Et $k : [1, +\infty[\to [-1, +\infty[$, $x \mapsto x^2 - 2x$?

Pour f. Pour tout réel x, $f(x) = (x-1)^2 - 1 \geq -1$. Le réel -2 n'a donc pas d'antécédent : f n'est pas surjective.

Pour k. Elle est bien définie, car $x^2 - 2x \geq -1$. Soit $y \geq -1$. Le réel $x = 1 + \sqrt{y+1}$ vérifie $x \geq 1$ et $k(x) = y$. Donc k est surjective.

Attention : Tout dépend des ensembles de départ et d'arrivée

Une même formule donne des réponses différentes selon les ensembles. Ci-dessus, $x \mapsto x^2 - 2x$ n'est ni injective ni surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Elle devient injective sur $[1, +\infty[$, et surjective vers $[-1, +\infty[$.

Écris toujours les deux ensembles avant de conclure. Un antécédent doit appartenir à l'ensemble de départ.

Bijections, application réciproque

Définition : Application bijective ; application réciproque

Une application $f : E \to F$ est **bijective** si elle est injective et surjective, c'est-à-dire si tout élément de F a **exactement un** antécédent : $\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ y = f(x)$.

Dans ce cas, l'**application réciproque** de f est l'application $f^{-1} : F \to E$ qui associe à chaque $y \in F$ son unique antécédent par f. Pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$: $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

Propriété : Bijection et application réciproque

Soit $f : E \to F$ une application.

- Si f est bijective, alors $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$.
- Réciproquement, s'il existe une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$, alors f est bijective et $g = f^{-1}$.

Méthode : démontrer une bijection, trouver la réciproque

1. **Résous** $f(x) = y$ pour $y \in F$ quelconque. L'existence d'une solution $x \in E$ donne la surjectivité ; son unicité dans E donne l'injectivité. Donc f est bijective et $f^{-1}(y) = x$ (définitions de l'injectivité, F11, et de la bijectivité, F12).
2. **Ou propose** une application $g : F \to E$, puis vérifie $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ (caractérisation par une réciproque, F15).
3. **Ou démontre** l'injectivité, puis la surjectivité.
4. **N'oublie pas** de vérifier que g arrive bien dans E.

Exemple

Énoncé. Montre que $k : [1, +\infty[\to [-1, +\infty[,\ x \mapsto x^2 - 2x$ est bijective, et détermine k^{-1}.

Réciproque proposée. Soit $g : [-1, +\infty[\to [1, +\infty[,\ y \mapsto 1 + \sqrt{y+1}$. Elle est bien définie, car $1 + \sqrt{y+1} \geq 1$.

Première composée. Pour $x \geq 1$, $k(x)+1=(x-1)^2$ et $x-1 \geq 0$. Donc $g(k(x))=1+(x-1)=x$.

Seconde composée. Pour $y \geq -1$, $k(g(y))=(\sqrt{y+1})^2-1=y$.

Conclusion. D'après la caractérisation par une réciproque (F15), k est bijective et $k^{-1}=g$.

> **À retenir : Vérifie les deux composées**
>
> Une seule égalité $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ ne suffit pas. Prends $E=\{0\}$, $F=\{0,1\}$, l'application $f : E \to F$ qui envoie 0 sur 0, et $g : F \to E$ constante égale à 0. Alors $g \circ f = \mathrm{Id}_E$. Pourtant f n'est pas surjective : 1 n'a pas d'antécédent.

Composée de deux applications

Définition : Composée de deux applications

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. La **composée** de f suivie de g est l'application notée $g \circ f$ (lue « g rond f ») :

$$g \circ f : E \to G, \quad x \mapsto g\big(f(x)\big).$$

On applique d'abord f, puis g.

Méthode : calculer une composée

1. **Vérifie** que l'ensemble d'arrivée de f est l'ensemble de départ de g (définition de la composée, F13).
2. **Calcule** $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$: remplace la variable de g par l'expression de $f(x)$.
3. **Écris** la composée complète : $g \circ f : E \to G$, avec sa formule.

Exemple

Énoncé. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x+4$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2+1$. Calcule $g \circ f$ et $f \circ g$.

Calculs. Pour tout réel x, $(g \circ f)(x)=(x+4)^2+1$ et $(f \circ g)(x)=x^2+5$.

Comparaison. En 0, $(g \circ f)(0)=17$ et $(f \circ g)(0)=5$. Donc $g \circ f \neq f \circ g$.

Propriété : Composée : associativité ; injections, surjections, bijections

Soit $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ des applications. Alors :

- $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$, et $f \circ \mathrm{Id}_E = f$, $\mathrm{Id}_F \circ f = f$;
- si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective ;
- si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective ;

- si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.

Propriété : Réciproque d'une réciproque, réciproque d'une composée

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux bijections. Alors :

- f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$;
- $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Attention : La composée dépend de l'ordre

Dans $g \circ f$, on applique d'abord f, bien qu'elle soit écrite à droite. L'ordre compte : l'exemple ci-dessus donne $g \circ f \neq f \circ g$.

Pour la réciproque, l'ordre s'inverse : $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ (réciproque d'une composée, F16). On défait d'abord la dernière opération.

Choisir sa méthode

Méthode : Quelle méthode pour quel « montrer que » ?

Repère la forme de ce qu'on te demande, puis choisis.

Montrer que…	Méthode à essayer
$A \subset B$	« Soit $x \in A$ », puis établir $x \in B$
$A = B$	double inclusion, ou équivalences successives
$A \not\subset B$ ou $A \neq B$	un élément témoin, vérifié par le calcul
$y \in f(A)$	un antécédent de y qui appartient à A
$f^{-1}(B) = \dots$	résoudre $f(x) \in B$ dans l'ensemble de départ
f injective	deux éléments de même image, puis leur égalité
f non injective	deux éléments distincts de même image
f surjective	« Soit $y \in F$ », puis un antécédent dans E
f non surjective	un y_0 sans antécédent, justifié
f bijective	injective et surjective, ou une réciproque vérifiée par les deux composées
$g \circ f$ injective, surjective ou bijective	composée d'applications (F14), si f et g le sont

À retenir : Rédiger en devoir

Nomme chaque ensemble avant de t'en servir. Précise dans quel ensemble tu prends un complémentaire.

Introduis chaque élément par « Soit ». Annonce le raisonnement : « par double inclusion », « par l'absurde ».

Pour une bijection, donne l'injectivité et la surjectivité, ou la réciproque et ses deux composées.