BURHAN

# Ensembles et applications : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/ensembles-et-applications/exercices/examen

| Chapitre | Palier | Exercices |
| --- | --- | --- |
| Ensembles et applications | Niveau examen | 5 |

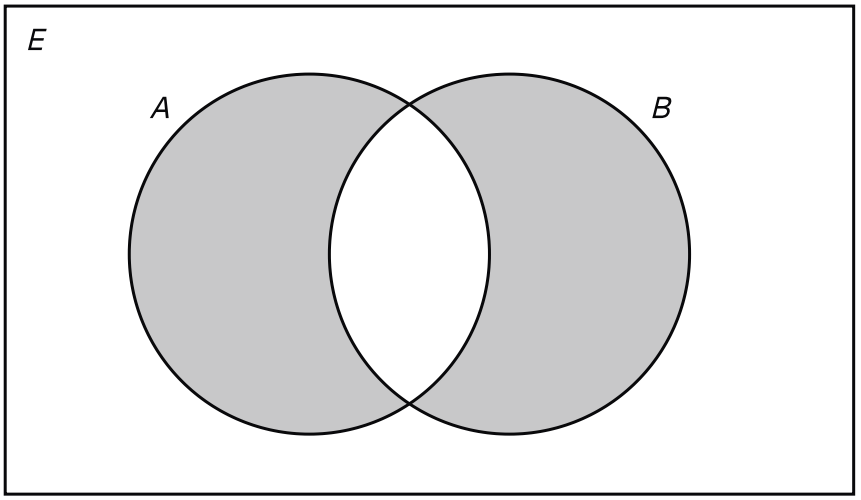
**Exercice 1** 5 pts

## La différence symétrique de deux parties

Soit $E$ un ensemble. Pour deux parties $A$ et $B$ de $E$, on appelle **différence symétrique** de $A$ et $B$ la partie :

$$A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Les complémentaires sont pris dans $E$.




**La différence symétrique de A et B, teintée : les deux lunules extérieures, sans la partie commune.**

**1.** 0,75 pts

Dans cette question seulement, on pose :

$$E = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\},$$
$$A = \{x \in E \,/\, x \geq 0\},$$
$$B = \{x \in E \,/\, x^2 \leq 1\}.$$

Écrire $A$, $B$ et $A \,\Delta\, B$ en extension.

INDICE

**Outil :** les définitions de la réunion et de la différence (F02). **Début :** teste chacun des sept éléments de $E$. **Point délicat :** pour $A \,\Delta\, B$, calcule d'abord les deux différences.

**2.** 1,5 pts

Revenons au cas général. Montrer, par double inclusion, que :

$$A \,\Delta\, B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

INDICE

**Outil :** la double inclusion. **Début :** pour la première inclusion, distingue deux cas selon la différence qui contient $x$. **Point délicat :** pour la seconde, $x$ est dans $A$ ou dans $B$ ; utilise $x \notin A \cap B$.

**3.** 0,75 pts

En déduire que $A \,\Delta\, B = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$.

INDICE

**Outil :** les propriétés du complémentaire et une loi de Morgan (F04). **Début :** pars de l'égalité obtenue en 2. **Point délicat :** une différence s'écrit comme l'intersection avec un complémentaire.

**4.** 1,25 pts

Montrer que $A \,\Delta\, B = \varnothing$ si et seulement si $A = B$.

INDICE

**Outil :** une réunion est vide si et seulement si ses deux termes le sont. **Début :** traite d'abord le sens « si $A = B$ ». **Point délicat :** montre par l'absurde que $A \setminus B = \varnothing$ entraîne $A \subset B$.

**5.** 0,75 pts

Montrer que $\overline{A} \,\Delta\, \overline{B} = A \,\Delta\, B$.

INDICE

**Outil :** une différence écrite comme intersection avec un complémentaire (F04). **Début :** écris $\overline{A} \setminus \overline{B}$ comme une intersection. **Point délicat :** utilise $\overline{\overline{B}} = B$.

## Exercice 2 — 5 pts

### Une bijection de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{N}$

On définit l'application $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ par :

$$f(n) = \begin{cases} 2n & \text{si } n \geq 0, \\ -2n - 1 & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

**1.** — 0,5 pts

Justifier que $f(n) \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Calculer $f(-3)$, $f(-1)$, $f(0)$ et $f(2)$.

**2.** — 0,75 pts

Déterminer $f(\{-2, -1, 0, 1, 2\})$, puis $f^{-1}(\{0, 1, 2, 3, 4, 5\})$.

INDICE

**Outil :** la définition de l'image réciproque (F08) et la définition par cas de $f$. **Début :** pour l'image directe, calcule les cinq images. **Point délicat :** pour l'image réciproque, résous $f(n) \leq 5$ séparément pour $n \geq 0$ et pour $n < 0$.

**3.** — 1,5 pts

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(n)$ est pair si et seulement si $n \geq 0$. En déduire que $f$ est injective.

INDICE

**Outil :** la parité de $f(n)$ indique dans quel cas de la définition on se trouve. **Début :** traite $n \geq 0$, puis $n < 0$. **Point délicat :** pour $n < 0$, mets $f(n)$ sous la forme $2k + 1$ avec $k$ entier ; pour l'injectivité, commence par « Soit $n$ et $m$ tels que $f(n) = f(m)$ » et exploite l'équivalence démontrée.

**4.** — 1 pts

Montrer que $f$ est surjective.

INDICE

**Outil :** la méthode de la surjectivité, par disjonction des cas. **Début :** soit $p \in \mathbb{N}$ ; distingue $p = 2k$ et $p = 2k + 1$, avec $k \in \mathbb{N}$. **Point délicat :** vérifie que l'antécédent proposé est dans le bon cas de la définition.

**5.** — 0,75 pts

En déduire que $f$ est bijective, et donner $f^{-1}(p)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, selon la parité de $p$.

INDICE

**Outil :** la définition d'une bijection (F12). **Début :** exprime $k$ à l'aide de $p$ dans chacun des deux cas de 4. **Point délicat :** justifie que l'antécédent trouvé en 4. est le seul.

**6.** `0,5 pts`

On note $P$ l'ensemble des entiers naturels pairs. Déterminer $f^{-1}(P)$, puis $f(\mathbb{N})$.

INDICE

**Outil :** l'équivalence démontrée en 3. **Début :** traduis $f(n) \in P$. **Point délicat :** pour $f(\mathbb{N})$, rédige les deux inclusions.

**Exercice 3** 5 pts

## Une bijection de [0, +∞[ sur [0, 1[ et une composée

On considère l'application :

$$f : [0, +\infty[ \to [0, 1[$$
$$x \mapsto \frac{x}{x+1}.$$

**1.** 0,5 pts

Montrer que $f$ est bien définie : pour tout $x \geq 0$, $0 \leq \frac{x}{x+1} < 1$.

INDICE

**Outil :** des inégalités sur un quotient. **Début :** le dénominateur est strictement positif. **Point délicat :** compare $x$ et $x+1$.

**2.** 0,75 pts

Montrer que $f$ est injective.

INDICE

**Outil :** la méthode de l'injectivité. **Début :** pars de deux images égales. **Point délicat :** fais disparaître les dénominateurs, qui ne sont pas nuls.

**3.** 1 pts

Montrer que $f$ est surjective. En déduire que $f$ est bijective et déterminer $f^{-1}$.

INDICE

**Outil :** la méthode de la surjectivité, puis la définition d'une bijection (F12). **Début :** soit $y \in [0, 1[$ ; résous $\frac{x}{x+1} = y$. **Point délicat :** vérifie que la solution est positive ou nulle.

**4.** 1,25 pts

Montrer que $f([0, 1]) = \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

INDICE

**Outil :** la réciproque $f^{-1}$ obtenue en 3. **Début :** pour $y \in [0, 1[$, écris ce que signifie « $y$ a un antécédent dans $[0, 1]$ ». **Point délicat :** vérifie que les $y$ trouvés sont bien dans $[0, 1[$.

**5.** 0,75 pts

Soit $g : [0, 1[ \to ]0, 1]$, $y \mapsto 1 - y$. Montrer que $g$ est bien définie et bijective, puis calculer $(g \circ f)(x)$ pour $x \geq 0$.

INDICE

**Outil :** la caractérisation d'une bijection par une réciproque (F15). **Début :** résous $1 - y = z$ pour $z \in ]0, 1]$, et propose l'application obtenue, de $]0, 1]$ dans $[0, 1[$. **Point délicat :** vérifie les deux composées, puis que l'arrivée de $f$ est le départ de $g$.

**6.** `0,75 pts`

En déduire que $g \circ f$ est bijective et déterminer sa réciproque.

INDICE

**Outil :** la composée de deux bijections (F14), puis la réciproque d'une composée (F16). **Début :** rappelle pourquoi $f$ et $g$ sont bijectives. **Point délicat :** l'ordre des réciproques.

**Exercice 4** 5 pts

## Les parties d'un ensemble découpées par une partie fixe

Soit $E$ un ensemble et $A$ une partie de $E$. Les complémentaires sont pris dans $E$. On définit l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{P}(E) &\to \mathcal{P}(E) \\ X &\mapsto X \cap A. \end{aligned}$$

**1.** 0,75 pts

Dans cette question seulement, $E = \{2, 5, 7, 9\}$ et $A = \{2, 5\}$.

Calculer $\varphi(\{2, 7\})$, $\varphi(\{5, 7, 9\})$ et $\varphi(\{7, 9\})$, puis écrire $\varphi^{-1}(\{\{2\}\})$ en extension.

INDICE

**Outil :** la définition de l'image réciproque (F08) ; ici, les éléments de l'ensemble de départ sont des parties de $E$. **Début :** dans chaque partie, garde seulement les éléments qui sont dans $A$. **Point délicat :** $\varphi^{-1}(\{\{2\}\})$ est l'ensemble des parties $X$ de $E$ telles que $X \cap A = \{2\}$.

**2.** 1 pts

Revenons au cas général. Montrer que $\varphi(X) \subset A$ pour toute partie $X$ de $E$, et que $\varphi(Y) = Y$ pour toute partie $Y$ de $A$. En déduire, par double inclusion, que $\varphi\big(\mathcal{P}(E)\big) = \mathcal{P}(A)$.

INDICE

**Outil :** la définition de l'ensemble des parties (F05) : $Y \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow Y \subset A$. **Début :** tout élément de $X \cap A$ est dans $A$. **Point délicat :** pour la seconde inclusion, une partie $Y$ de $A$ est aussi une partie de $E$, et c'est sa propre image.

**3.** 1,25 pts

En déduire que $\varphi$ est surjective si et seulement si $A = E$.

Montrer ensuite que, si $A \neq E$, l'application $\varphi$ n'est pas injective. Que dire de $\varphi$ lorsque $A = E$ ?

INDICE

**Outil :** la définition de la surjectivité (F11) : $\varphi$ est surjective si et seulement si $\varphi\big(\mathcal{P}(E)\big) = \mathcal{P}(E)$. **Début :** utilise 2. et le fait que $E \in \mathcal{P}(E)$. **Point délicat :** si $A \neq E$, choisis $x \in E$ tel que $x \notin A$, et compare les images de $\{x\}$ et de $\varnothing$.

**4.** 1 pts

On définit maintenant les applications :

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{P}(E) &\to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(\overline{A}) \\ X &\mapsto (X \cap A, X \cap \overline{A}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(\overline{A}) &\to \mathcal{P}(E) \\ (Y, Z) &\mapsto Y \cup Z. \end{aligned}$$

Justifier que $\psi$ et $\theta$ sont bien définies, puis montrer que $\theta \circ \psi = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(E)}$.

INDICE

**Outil :** la distributivité (F03). **Début :** $X \cap A \subset A$ et $X \cap \overline{A} \subset \overline{A}$. **Point délicat :** $A \cup \overline{A} = E$, et $X \cap E = X$ lorsque $X \subset E$.

**5.** 1 pts

Montrer que $\psi \circ \theta = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(\overline{A})}$. En déduire que $\psi$ est bijective et donner $\psi^{-1}$.

Avec $E$ et $A$ de la question 1, calculer $\psi(\{2, 9\})$ et $\psi^{-1}(\{5\}, \{7, 9\})$.

INDICE

**Outil :** la distributivité (F03), puis la caractérisation d'une bijection par une réciproque (F15). **Début :** calcule $(Y \cup Z) \cap A$ pour $Y \subset A$ et $Z \subset \overline{A}$. **Point délicat :** $Z \cap A = \varnothing$, car $Z \subset \overline{A}$ ; l'égalité de deux couples se vérifie composante par composante.

**Exercice 5** 5 pts

## Images directes et réciproques par une composée

Soit $E$, $F$ et $G$ trois ensembles, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

**1.** 1 pts

Montrer que, pour toute partie $A$ de $E$, $(g \circ f)(A) = g\big(f(A)\big)$.

INDICE

**Outil :** les définitions de l'image directe (F08) et de la composée (F13). **Début :** par double inclusion ; soit $z \in (g \circ f)(A)$, écris $z = g\big(f(x)\big)$ avec $x \in A$. **Point délicat :** pour la seconde inclusion, $z \in g\big(f(A)\big)$ s'écrit $z = g(y)$ avec $y \in f(A)$, puis $y = f(x)$ avec $x \in A$.

**2.** 0,5 pts

Montrer que, pour toute partie $C$ de $G$, $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}\big(g^{-1}(C)\big)$.

INDICE

**Outil :** la définition de la composée (F13), puis celle de l'image réciproque (F08) : $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$. **Début :** soit $x \in E$ ; traduis $x \in (g \circ f)^{-1}(C)$. **Point délicat :** $(g \circ f)^{-1}(C)$ est une image réciproque ; $f$ et $g$ ne sont pas supposées bijectives.

**3.** 1 pts

Dans la question 3. et dans la seconde partie de la question 5., $E = F = G = \mathbb{R}$, et :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 4 - 2x,$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto |y|.$$

En déduire, à l'aide de 1. et 2., $(g \circ f)([0, 3])$ et $(g \circ f)^{-1}([0, 1])$.

INDICE

**Outil :** 1. et 2. **Début :** calcule d'abord $f([0, 3])$, en résolvant $4 - 2x = y$. **Point délicat :** pour $g([-2, 4])$, un réel $t \in [0, 4]$ est sa propre image, et $t \in [-2, 4]$.

**4.** 1 pts

On revient au cas général, et on suppose $f$ injective. Montrer que, pour toutes parties $A$ et $A'$ de $E$, $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$.

INDICE

**Outil :** l'image d'une intersection (F09) donne déjà une inclusion. **Début :** soit $y \in f(A) \cap f(A')$ ; écris $y = f(x)$ avec $x \in A$, et $y = f(x')$ avec $x' \in A'$. **Point délicat :** l'injectivité de $f$ donne $x = x'$.

**5.** 1,5 pts

On suppose encore $f$ injective. Soit $A$ et $A'$ deux parties de $E$. En déduire, à l'aide de 4. et de F09 (image d'une réunion, inclusion conservée), que $f(A \setminus A') = f(A) \setminus f(A')$.

On reprend ensuite $f$ et $g$ de la question 3, avec $A = [0, 3]$ et $A' = [0, 1]$.

- Calculer $(g \circ f)(A \setminus A')$ et $(g \circ f)(A) \setminus (g \circ f)(A')$.
- En déduire par contraposée que $g \circ f$ n'est pas injective, puis que $g$ n'est pas injective, bien que $f$ le soit.

INDICE

**Outil :** F09 (image d'une réunion, inclusion conservée), 4., puis la composée de deux injections (F14). **Début :** écris $A = (A \setminus A') \cup (A \cap A')$ et applique F09 ; utilise 4. avec les parties $A \setminus A'$ et $A'$. **Point délicat :** l'égalité démontrée vaut pour toute application injective, en particulier pour $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ; dans l'exemple, $A \setminus A' = ]1, 3]$, et $(g \circ f)(A)$ est connu par 3.