BURHAN

Ensembles et applications : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/ensembles-et-applications/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Ensembles et applications	Niveau examen	5

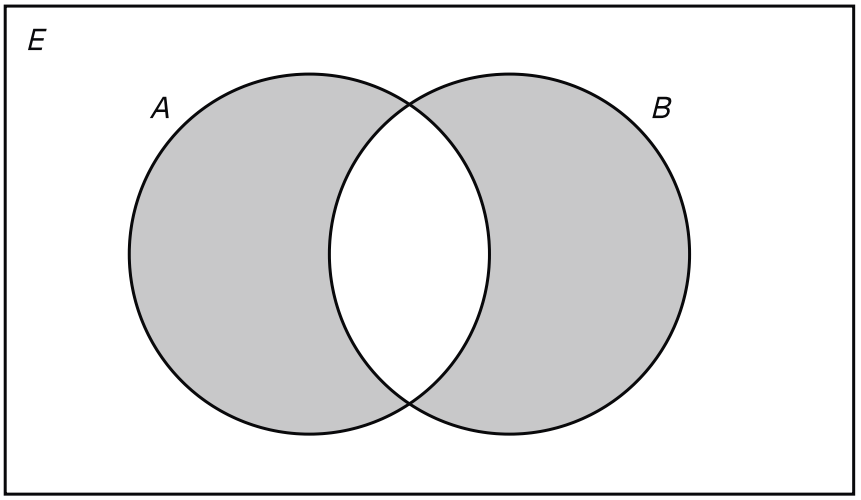
Exercice 1 5 pts

La différence symétrique de deux parties

Soit E un ensemble. Pour deux parties A et B de E, on appelle **différence symétrique** de A et B la partie :

$$A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Les complémentaires sont pris dans E.



La différence symétrique de A et B, teintée : les deux lunules extérieures, sans la partie commune.

1. 0,75 pts

Dans cette question seulement, on pose :

$$E = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\},$$
$$A = \{x \in E \,/\, x \geq 0\},$$
$$B = \{x \in E \,/\, x^2 \leq 1\}.$$

Écrire A, B et $A \,\Delta\, B$ en extension.

INDICE

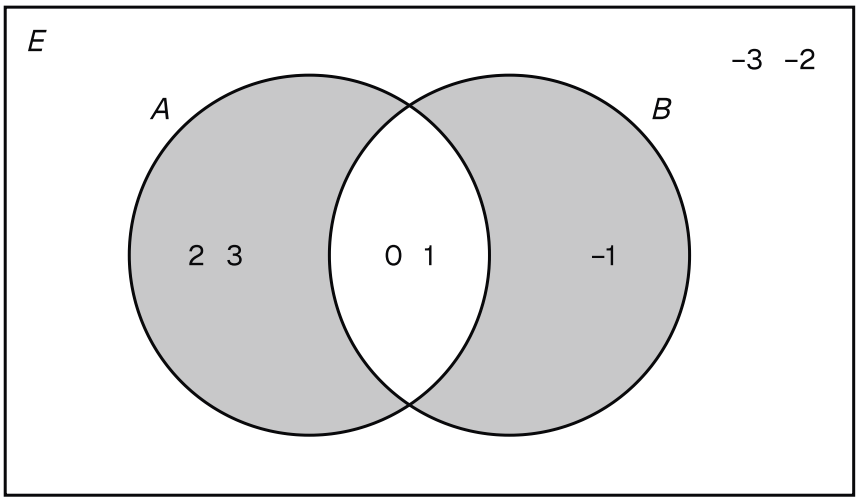
Outil : les définitions de la réunion et de la différence (F02). **Début :** teste chacun des sept éléments de E. **Point délicat :** pour $A \,\Delta\, B$, calcule d'abord les deux différences.

CORRIGÉ

Ensembles A et B. Les éléments positifs ou nuls de E donnent $A = \{0, 1, 2, 3\}$. Parmi les éléments de E, seuls $-1, 0$ et 1 ont un carré inférieur ou égal à 1 : $B = \{-1, 0, 1\}$.

Les deux différences. $A \setminus B = \{2, 3\}$ et $B \setminus A = \{-1\}$.

Conclusion. $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$ et, en réunissant les deux différences, $A \,\Delta\, B = \{-1, 2, 3\}$.



Les sept éléments de E rangés dans leur zone ; la partie teintée regroupe −1, 2 et 3, la différence symétrique trouvée.

2. 1,5 pts

Revenons au cas général. Montrer, par double inclusion, que :

$$A \,\Delta\, B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

INDICE

Outil : la double inclusion. **Début :** pour la première inclusion, distingue deux cas selon la différence qui contient x. **Point délicat :** pour la seconde, x est dans A ou dans B ; utilise $x \notin A \cap B$.

CORRIGÉ

Première inclusion. Soit $x \in A \,\Delta\, B$. Raisonnons par disjonction des cas.

- Si $x \in A \setminus B$: $x \in A$, donc $x \in A \cup B$; et $x \notin B$, donc $x \notin A \cap B$.
- Si $x \in B \setminus A$: $x \in B$, donc $x \in A \cup B$; et $x \notin A$, donc $x \notin A \cap B$.

Dans les deux cas, $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Seconde inclusion. Soit $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Alors $x \in A$ ou $x \in B$, et $x \notin A \cap B$.

- Si $x \in A$: comme $x \notin A \cap B$, on a $x \notin B$, donc $x \in A \setminus B$.
- Si $x \in B$: de même, $x \notin A$, donc $x \in B \setminus A$.

Dans les deux cas, $x \in A \,\Delta\, B$.

Conclusion. Par double inclusion, $A \,\Delta\, B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

3. 0,75 pts

En déduire que $A \,\Delta\, B = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$.

INDICE

Outil : les propriétés du complémentaire et une loi de Morgan (F04). **Début :** pars de l'égalité obtenue en 2. **Point délicat :** une différence s'écrit comme l'intersection avec un complémentaire.

CORRIGÉ

On part de 2. Une différence s'écrit comme l'intersection avec un complémentaire (F04), puis une loi de Morgan (F04) donne $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$:

$$\begin{aligned} A \,\Delta\, B &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) \\ &= (A \cup B) \cap \overline{A \cap B} \\ &= (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}). \end{aligned}$$

Conclusion. $A \,\Delta\, B = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$.

4. 1,25 pts

Montrer que $A \Delta B = \varnothing$ si et seulement si $A = B$.

INDICE

Outil : une réunion est vide si et seulement si ses deux termes le sont. **Début :** traite d'abord le sens « si $A = B$ ». **Point délicat :** montre par l'absurde que $A \setminus B = \varnothing$ entraîne $A \subset B$.

CORRIGÉ

Si $A = B$. Alors $A \setminus B = A \setminus A = \varnothing$, et de même $B \setminus A = \varnothing$. Donc $A \Delta B = \varnothing$.

Si $A \Delta B = \varnothing$. Les parties $A \setminus B$ et $B \setminus A$ sont incluses dans $A \Delta B$, donc vides.

Montrons $A \subset B$. Soit $x \in A$, et supposons par l'absurde $x \notin B$. Alors $x \in A \setminus B$, qui est vide : c'est une contradiction. Donc $x \in B$, et $A \subset B$.

Le même raisonnement, avec $B \setminus A = \varnothing$, donne $B \subset A$. Par double inclusion, $A = B$.

Conclusion. Les deux implications donnent l'équivalence :

$$A \Delta B = \varnothing \Leftrightarrow A = B.$$

5. 0,75 pts

Montrer que $\overline{A} \Delta \overline{B} = A \Delta B$.

INDICE

Outil : une différence écrite comme intersection avec un complémentaire (F04). **Début :** écris $\overline{A} \setminus \overline{B}$ comme une intersection. **Point délicat :** utilise $\overline{\overline{B}} = B$.

CORRIGÉ

Première différence. D'après F04, une différence est l'intersection avec un complémentaire, et $\overline{\overline{B}} = B$:

$$\begin{aligned} \overline{A} \setminus \overline{B} &= \overline{A} \cap \overline{\overline{B}} \\ &= \overline{A} \cap B \\ &= B \setminus A. \end{aligned}$$

Seconde différence. En échangeant les rôles de A et B, $\overline{B} \setminus \overline{A} = A \setminus B$.

Conclusion. En réunissant les deux différences :

$$\begin{aligned} \overline{A} \Delta \overline{B} &= (B \setminus A) \cup (A \setminus B) \\ &= A \Delta B. \end{aligned}$$

Exercice 2 5 pts

Une bijection de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{N}$

On définit l'application $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ par :

$$f(n) = \begin{cases} 2n & \text{si } n \geq 0, \\ -2n - 1 & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

1. 0,5 pts

Justifier que $f(n) \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Calculer $f(-3)$, $f(-1)$, $f(0)$ et $f(2)$.

CORRIGÉ

Valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

- Si $n \geq 0$, alors $2n$ est un entier positif ou nul.
- Si $n < 0$, alors $n \leq -1$, donc $-2n \geq 2$ et $-2n - 1 \geq 1$: c'est un entier naturel.

Donc f est bien à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Valeurs. On applique le cas qui convient :

$f(-3) = 6 - 1 = 5$, $f(-1) = 2 - 1 = 1$, $f(0) = 0$ et $f(2) = 4$.

2. 0,75 pts

Déterminer $f(\{-2, -1, 0, 1, 2\})$, puis $f^{-1}(\{0, 1, 2, 3, 4, 5\})$.

INDICE

Outil : la définition de l'image réciproque (F08) et la définition par cas de f. **Début :** pour l'image directe, calcule les cinq images. **Point délicat :** pour l'image réciproque, résous $f(n) \leq 5$ séparément pour $n \geq 0$ et pour $n < 0$.

CORRIGÉ

Image directe. $f(-2) = 3$, $f(-1) = 1$, $f(0) = 0$, $f(1) = 2$ et $f(2) = 4$. Donc :

$$\begin{aligned} &f(\{-2, -1, 0, 1, 2\}) \\ &= \{0, 1, 2, 3, 4\}. \end{aligned}$$

Image réciproque. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Comme $f(n)$ est un entier naturel, $f(n) \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ équivaut à $f(n) \leq 5$.

- Si $n \geq 0$: $2n \leq 5$ équivaut à $n \leq \dfrac{5}{2}$, soit $n \in \{0, 1, 2\}$.
- Si $n < 0$: $-2n - 1 \leq 5$ équivaut à $n \geq -3$, soit $n \in \{-3, -2, -1\}$.

Conclusion. En réunissant les deux cas :

$$\begin{aligned} &f^{-1}(\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}) \\ &= \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}. \end{aligned}$$

3. 1,5 pts

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(n)$ est pair si et seulement si $n \geq 0$. En déduire que f est injective.

INDICE

Outil : la parité de $f(n)$ indique dans quel cas de la définition on se trouve. **Début :** traite $n \geq 0$, puis $n < 0$. **Point délicat :** pour $n < 0$, mets $f(n)$ sous la forme $2k+1$ avec k entier ; pour l'injectivité, commence par « Soit n et m tels que $f(n) = f(m)$ » et exploite l'équivalence démontrée.

CORRIGÉ

Parité selon le cas. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

- Si $n \geq 0$, $f(n) = 2n$ est pair.
- Si $n < 0$, $f(n) = 2(-n-1)+1$, avec $-n-1 \in \mathbb{Z}$: $f(n)$ est impair.

Équivalence. Si $n \geq 0$, $f(n)$ est pair. Réciproquement, si $f(n)$ est pair, le cas $n < 0$ est exclu : $f(n)$ serait impair, et un entier n'est pas à la fois pair et impair. Donc $f(n)$ est pair si et seulement si $n \geq 0$.

Injectivité. Soit n et m dans $\mathbb{Z}$ tels que $f(n) = f(m)$. Ces images ont la même parité ; d'après l'équivalence, n et m sont tous deux positifs ou nuls, ou tous deux strictement négatifs.

- Si $n \geq 0$ et $m \geq 0$: $2n = 2m$, donc $n = m$.
- Si $n < 0$ et $m < 0$: $-2n-1 = -2m-1$, donc $n = m$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(n)$ est pair si et seulement si $n \geq 0$; et dans tous les cas $n = m$, donc f est injective.

4. 1 pts

Montrer que f est surjective.

INDICE

Outil : la méthode de la surjectivité, par disjonction des cas. **Début :** soit $p \in \mathbb{N}$; distingue $p = 2k$ et $p = 2k+1$, avec $k \in \mathbb{N}$. **Point délicat :** vérifie que l'antécédent proposé est dans le bon cas de la définition.

CORRIGÉ

Soit $p \in \mathbb{N}$. Raisonnons par disjonction des cas sur la parité de p.

- Si p est pair, $p = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Alors $k \geq 0$, donc $f(k) = 2k = p$.
- Si p est impair, $p = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$. Posons $n = -k-1$. Alors $n \leq -1 < 0$, donc $f(n) = -2(-k-1)-1 = 2k+1 = p$.

Conclusion. Tout entier naturel a un antécédent dans $\mathbb{Z}$: f est surjective.

5. 0,75 pts

En déduire que f est bijective, et donner $f^{-1}(p)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, selon la parité de p.

INDICE

Outil : la définition d'une bijection (F12). **Début :** exprime k à l'aide de p dans chacun des deux cas de 4. **Point délicat :** justifie que l'antécédent trouvé en 4. est le seul.

CORRIGÉ

Bijectivité. D'après 3. et 4., f est injective et surjective : elle est bijective (application bijective, F12). L'antécédent trouvé en 4. est donc l'unique antécédent.

Réciproque. Pour p pair, $k = \dfrac{p}{2}$. Pour p impair, $k = \dfrac{p-1}{2}$ et $-k-1 = -\dfrac{p+1}{2}$.

Conclusion. f est bijective, et $f^{-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ est donnée, pour tout $p \in \mathbb{N}$, par :

$$f^{-1}(p) = \begin{cases} \dfrac{p}{2} & \text{si } p \text{ pair,} \\ -\dfrac{p+1}{2} & \text{si } p \text{ impair.} \end{cases}$$

Par exemple, $f^{-1}(5) = -3$, et en effet $f(-3) = 5$ d'après 1.

6. 0,5 pts

On note P l'ensemble des entiers naturels pairs. Déterminer $f^{-1}(P)$, puis $f(\mathbb{N})$.

INDICE

Outil : l'équivalence démontrée en 3. **Début :** traduis $f(n) \in P$. **Point délicat :** pour $f(\mathbb{N})$, rédige les deux inclusions.

CORRIGÉ

Image réciproque. D'après 3., pour $n \in \mathbb{Z}$, $f(n) \in P$ équivaut à $n \geq 0$. Donc $f^{-1}(P) = \mathbb{N}$.

Image directe : première inclusion. Pour $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = 2n \in P$. Donc $f(\mathbb{N}) \subset P$.

Image directe : seconde inclusion. Soit $p \in P$: $p = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$, et $f(k) = p$. Donc $P \subset f(\mathbb{N})$.

Conclusion. $f^{-1}(P) = \mathbb{N}$ et, par double inclusion, $f(\mathbb{N}) = P$.

Exercice 3 5 pts

Une bijection de [0, +∞[sur [0, 1[et une composée

On considère l'application :

$$\begin{aligned} f : [0, +\infty[&\to [0, 1[\\ x &\mapsto \frac{x}{x+1}. \end{aligned}$$

1. 0,5 pts

Montrer que f est bien définie : pour tout $x \geq 0, 0 \leq \frac{x}{x+1} < 1$.

INDICE

Outil : des inégalités sur un quotient. **Début :** le dénominateur est strictement positif. **Point délicat :** compare x et $x+1$.

CORRIGÉ

Soit $x \geq 0$.

Le quotient existe et est positif. On a $x+1 \geq 1 > 0$, donc le quotient existe, et il est positif ou nul, comme x.

Il est strictement inférieur à 1**.** On a $x < x+1$. En divisant par $x+1 > 0$, on obtient $\frac{x}{x+1} < 1$.

Conclusion. Pour tout $x \geq 0, 0 \leq \frac{x}{x+1} < 1$, donc $f(x) \in [0, 1[$: f est bien définie.

2. 0,75 pts

Montrer que f est injective.

INDICE

Outil : la méthode de l'injectivité. **Début :** pars de deux images égales. **Point délicat :** fais disparaître les dénominateurs, qui ne sont pas nuls.

CORRIGÉ

Soit x et x' dans $[0, +\infty[$ tels que $\frac{x}{x+1} = \frac{x'}{x'+1}$.

Les dénominateurs étant non nuls, on multiplie par $(x+1)(x'+1)$:

$$\begin{aligned} x(x'+1) &= x'(x+1), \\ xx' + x &= xx' + x'. \end{aligned}$$

Donc $x = x'$.

Conclusion. f est injective.

3. 1 pts

Montrer que f est surjective. En déduire que f est bijective et déterminer f^{-1}.

INDICE

Outil : la méthode de la surjectivité, puis la définition d'une bijection (F12). **Début :** soit $y \in [0,1[$; résous $\dfrac{x}{x+1} = y$. **Point délicat :** vérifie que la solution est positive ou nulle.

CORRIGÉ

Surjectivité. Soit $y \in [0,1[$. Posons $x = \dfrac{y}{1-y}$, défini car $1-y>0$.

Comme $y \geq 0$ et $1-y>0$, on a $x \geq 0$. De plus, $x+1 = \dfrac{1}{1-y}$, donc :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{y}{1-y} \times (1-y) \\ &= y. \end{aligned}$$

Tout $y \in [0,1[$ a un antécédent dans $[0,+\infty[$: f est surjective.

Bijectivité. D'après 2., f est aussi injective : elle est bijective (application bijective, F12). Par injectivité, l'antécédent trouvé est le seul.

Conclusion. f est bijective, et :

$$\begin{aligned} f^{-1} : [0,1[&\to [0,+\infty[\\ y &\mapsto \frac{y}{1-y}. \end{aligned}$$

4. 1,25 pts

Montrer que $f([0,1]) = \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

INDICE

Outil : la réciproque f^{-1} obtenue en 3. **Début :** pour $y \in [0,1[$, écris ce que signifie « y a un antécédent dans $[0,1]$ ». **Point délicat :** vérifie que les y trouvés sont bien dans $[0,1[$.

CORRIGÉ

Traduction. Soit $y \in [0,1[$. D'après la définition de la réciproque (F12), $y = f(x)$ équivaut à $x = f^{-1}(y)$. Donc y a un antécédent dans $[0,1]$ si et seulement si $f^{-1}(y) \in [0,1]$.

Résolution. D'après 3., $f^{-1}(y) = \dfrac{y}{1-y} \geq 0$. Et, comme $1-y>0$:

$$\begin{aligned} \frac{y}{1-y} \leq 1 &\Leftrightarrow y \leq 1-y \\ &\Leftrightarrow y \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion. Les éléments de $f([0,1])$ sont les $y \in [0,1[$ tels que $y \leq \dfrac{1}{2}$. Donc $f([0,1]) = \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

5. 0,75 pts

Soit $g : [0,1[\to]0,1]$, $y \mapsto 1-y$. Montrer que g est bien définie et bijective, puis calculer $(g \circ f)(x)$ pour $x \geq 0$.

INDICE

Outil : la caractérisation d'une bijection par une réciproque (F15). **Début :** résous $1-y=z$ pour $z \in]0,1]$, et propose l'application obtenue, de $]0,1]$ dans $[0,1[$. **Point délicat :** vérifie les deux composées, puis que l'arrivée de f est le départ de g.

CORRIGÉ

g est bien définie. Si $0 \leq y < 1$, alors $0 < 1-y \leq 1$.

g est bijective. Soit $k :]0,1] \to [0,1[$, $z \mapsto 1-z$. Elle est bien définie, car $0 < z \leq 1$ donne $0 \leq 1-z < 1$.

- Pour $y \in [0,1[$, $k\big(g(y)\big) = 1-(1-y) = y$.
- Pour $z \in]0,1]$, $g\big(k(z)\big) = z$.

D'après la caractérisation par une réciproque (F15), g est bijective et $g^{-1} = k$.

Composée. L'arrivée de f est le départ de g, donc $g \circ f : [0,+\infty[\to]0,1]$ existe. Pour $x \geq 0$:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= 1 - \frac{x}{x+1} \\ &= \frac{1}{x+1}.\end{aligned}$$

Conclusion. g est bien définie et bijective, et pour tout $x \geq 0$, $(g \circ f)(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

6. 0,75 pts

En déduire que $g \circ f$ est bijective et déterminer sa réciproque.

INDICE

Outil : la composée de deux bijections (F14), puis la réciproque d'une composée (F16). **Début :** rappelle pourquoi f et g sont bijectives. **Point délicat :** l'ordre des réciproques.

CORRIGÉ

Bijectivité. f et g sont bijectives (3. et 5.). La composée de deux bijections est bijective (F14) : $g \circ f$ est bijective.

Réciproque. D'après la réciproque d'une composée (F16), $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. Pour $z \in]0,1]$:

$$\begin{aligned}(g \circ f)^{-1}(z) &= f^{-1}(1-z) \\ &= \frac{1-z}{z}.\end{aligned}$$

Contrôle. Pour $x \geq 0$ et $z = \dfrac{1}{x+1}$, on a $\dfrac{1-z}{z} = \dfrac{x}{x+1} \times (x+1) = x$.

Conclusion. $g \circ f$ est bijective, et $(g \circ f)^{-1} :]0,1] \to [0,+\infty[$, $z \mapsto \dfrac{1-z}{z}$.

Exercice 4 5 pts

Les parties d'un ensemble découpées par une partie fixe

Soit E un ensemble et A une partie de E. Les complémentaires sont pris dans E. On définit l'application :

$$\begin{aligned}\varphi : \mathcal{P}(E) &\to \mathcal{P}(E)\\ X &\mapsto X \cap A.\end{aligned}$$

1. 0,75 pts

Dans cette question seulement, $E = \{2, 5, 7, 9\}$ et $A = \{2, 5\}$.

Calculer $\varphi(\{2, 7\})$, $\varphi(\{5, 7, 9\})$ et $\varphi(\{7, 9\})$, puis écrire $\varphi^{-1}(\{\{2\}\})$ en extension.

INDICE

Outil : la définition de l'image réciproque (F08) ; ici, les éléments de l'ensemble de départ sont des parties de E. **Début :** dans chaque partie, garde seulement les éléments qui sont dans A. **Point délicat :** $\varphi^{-1}(\{\{2\}\})$ est l'ensemble des parties X de E telles que $X \cap A = \{2\}$.

CORRIGÉ

Images. Dans chaque partie, on garde les éléments qui sont dans A : $\varphi(\{2, 7\}) = \{2\}$, $\varphi(\{5, 7, 9\}) = \{5\}$ et $\varphi(\{7, 9\}) = \varnothing$.

Image réciproque. Soit $X \in \mathcal{P}(E)$. D'après la définition de l'image réciproque (F08), $X \in \varphi^{-1}(\{\{2\}\})$ équivaut à $X \cap A = \{2\}$, c'est-à-dire :

- $2 \in X$ et $5 \notin X$;
- les éléments 7 et 9 pouvant appartenir ou non à X.

Conclusion.

$$\begin{aligned}&\varphi^{-1}(\{\{2\}\})\\ &= \{\{2\}, \{2, 7\},\\ &\quad \{2, 9\}, \{2, 7, 9\}\}.\end{aligned}$$

2. 1 pts

Revenons au cas général. Montrer que $\varphi(X) \subset A$ pour toute partie X de E, et que $\varphi(Y) = Y$ pour toute partie Y de A. En déduire, par double inclusion, que $\varphi\big(\mathcal{P}(E)\big) = \mathcal{P}(A)$.

INDICE

Outil : la définition de l'ensemble des parties (F05) : $Y \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow Y \subset A$. **Début :** tout élément de $X \cap A$ est dans A. **Point délicat :** pour la seconde inclusion, une partie Y de A est aussi une partie de E, et c'est sa propre image.

CORRIGÉ

Inclusion $\varphi(X) \subset A$. Soit $X \in \mathcal{P}(E)$. Tout élément de $X \cap A$ est dans A : $\varphi(X) \subset A$.

Égalité $\varphi(Y) = Y$. Soit Y une partie de A. Comme $A \subset E$, on a $Y \subset E$, donc $\varphi(Y)$ est défini. Tout élément de Y est dans A, donc $Y \cap A = Y$: $\varphi(Y) = Y$.

Première inclusion. Soit $Z \in \varphi\big(\mathcal{P}(E)\big)$: il existe $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $Z = \varphi(X)$. Alors $Z \subset A$, donc $Z \in \mathcal{P}(A)$ (F05).

Seconde inclusion. Soit $Y \in \mathcal{P}(A)$. Alors $Y \subset A$ et $A \subset E$, donc $Y \subset E$, soit $Y \in \mathcal{P}(E)$; et $\varphi(Y) = Y$. Donc $Y \in \varphi\big(\mathcal{P}(E)\big)$.

Conclusion. Par double inclusion, $\varphi\big(\mathcal{P}(E)\big) = \mathcal{P}(A)$.

3. 1,25 pts

En déduire que φ est surjective si et seulement si $A = E$.

Montrer ensuite que, si $A \neq E$, l'application φ n'est pas injective. Que dire de φ lorsque $A = E$?

INDICE

Outil : la définition de la surjectivité (F11) : φ est surjective si et seulement si $\varphi\big(\mathcal{P}(E)\big) = \mathcal{P}(E)$. **Début :** utilise 2. et le fait que $E \in \mathcal{P}(E)$. **Point délicat :** si $A \neq E$, choisis $x \in E$ tel que $x \notin A$, et compare les images de $\{x\}$ et de $\varnothing$.

CORRIGÉ

Surjectivité. D'après la définition de la surjectivité (F11) et 2., φ est surjective si et seulement si $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(E)$.

- Si $A = E$, alors $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(E)$: φ est surjective.
- Si φ est surjective, alors $E \in \mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(A)$, donc $E \subset A$. Comme $A \subset E$, on obtient $A = E$ par double inclusion.

Donc φ est surjective si et seulement si $A = E$.

Injectivité. Supposons $A \neq E$. Comme $A \subset E$, on a $E \not\subset A$: il existe $x \in E$ tel que $x \notin A$. Alors :

$$\varphi(\{x\}) = \{x\} \cap A = \varnothing,$$
$$\varphi(\varnothing) = \varnothing.$$

Les parties $\{x\}$ et $\varnothing$ sont distinctes et ont la même image : φ n'est pas injective.

Cas $A = E$. Pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$, $X \cap E = X$: $\varphi = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(E)}$, qui est bijective.

Conclusion. φ est surjective si et seulement si $A = E$; si $A \neq E$, elle n'est pas injective ; si $A = E$, c'est l'identité de $\mathcal{P}(E)$, donc une bijection.

4. 1 pts

On définit maintenant les applications :

$$\begin{aligned}\psi : \mathcal{P}(E) &\to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(\overline{A}) \\ X &\mapsto (X \cap A, X \cap \overline{A}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(\overline{A}) &\to \mathcal{P}(E) \\ (Y, Z) &\mapsto Y \cup Z.\end{aligned}$$

Justifier que ψ et θ sont bien définies, puis montrer que $\theta \circ \psi = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(E)}$.

INDICE

Outil : la distributivité (F03). **Début :** $X \cap A \subset A$ et $X \cap \overline{A} \subset \overline{A}$. **Point délicat :** $A \cup \overline{A} = E$, et $X \cap E = X$ lorsque $X \subset E$.

CORRIGÉ

ψ **est bien définie.** Soit $X \in \mathcal{P}(E)$. On a $X \cap A \subset A$ et $X \cap \overline{A} \subset \overline{A}$: le couple $\psi(X)$ appartient à $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(\overline{A})$.

θ **est bien définie.** Soit $(Y, Z) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(\overline{A})$. Alors $Y \subset E$ et $Z \subset E$, donc $Y \cup Z \subset E$.

Composée. L'arrivée de ψ est le départ de θ, donc $\theta \circ \psi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ existe. Tout élément de E est dans A ou dans $\overline{A}$, donc $A \cup \overline{A} = E$.

Soit $X \in \mathcal{P}(E)$. D'après la distributivité de l'intersection sur la réunion (F03) :

$$\begin{aligned}&(\theta \circ \psi)(X) \\ &= (X \cap A) \cup (X \cap \overline{A}) \\ &= X \cap (A \cup \overline{A}) \\ &= X \cap E = X.\end{aligned}$$

Conclusion. ψ et θ sont bien définies, et $\theta \circ \psi = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(E)}$.

5. 1 pts

Montrer que $\psi \circ \theta = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(\overline{A})}$. En déduire que ψ est bijective et donner ψ^{-1}.

Avec E et A de la question 1, calculer $\psi(\{2,9\})$ et $\psi^{-1}(\{5\},\{7,9\})$.

INDICE

Outil : la distributivité (F03), puis la caractérisation d'une bijection par une réciproque (F15). **Début :** calcule $(Y \cup Z) \cap A$ pour $Y \subset A$ et $Z \subset \overline{A}$. **Point délicat :** $Z \cap A = \varnothing$, car $Z \subset \overline{A}$; l'égalité de deux couples se vérifie composante par composante.

CORRIGÉ

Composée $\psi \circ \theta$. Soit $(Y,Z) \in \mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(\overline{A})$. On a $Y \cap A = Y$, car $Y \subset A$. On a $Z \cap A = \varnothing$, car tout élément de Z est dans $\overline{A}$, donc n'est pas dans A. D'après la distributivité (F03) :

$$\begin{aligned}(Y \cup Z) \cap A &= (Y \cap A) \cup (Z \cap A)\\ &= Y \cup \varnothing = Y.\end{aligned}$$

De même, $Y \cap \overline{A} = \varnothing$ et $Z \cap \overline{A} = Z$, donc :

$$\begin{aligned}(Y \cup Z) \cap \overline{A} &= \varnothing \cup Z\\ &= Z.\end{aligned}$$

Les deux composantes coïncident : $(\psi \circ \theta)(Y,Z) = (Y,Z)$. Donc $\psi \circ \theta = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(\overline{A})}$.

Bijectivité. D'après 4. et la caractérisation par une réciproque (F15), ψ est bijective et $\psi^{-1} = \theta$: pour tout $(Y,Z) \in \mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(\overline{A})$, $\psi^{-1}(Y,Z) = Y \cup Z$.

Exemple. Avec $E = \{2,5,7,9\}$ et $A = \{2,5\}$, on a $\overline{A} = \{7,9\}$. Alors $\psi(\{2,9\}) = (\{2\},\{9\})$, et :

$$\begin{aligned}&\psi^{-1}(\{5\},\{7,9\})\\ &= \{5\} \cup \{7,9\}\\ &= \{5,7,9\}.\end{aligned}$$

Exercice 5 5 pts

Images directes et réciproques par une composée

Soit E, F et G trois ensembles, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. 1 pts

Montrer que, pour toute partie A de E, $(g \circ f)(A) = g\big(f(A)\big)$.

INDICE

Outil : les définitions de l'image directe (F08) et de la composée (F13). **Début :** par double inclusion ; soit $z \in (g \circ f)(A)$, écris $z = g\big(f(x)\big)$ avec $x \in A$. **Point délicat :** pour la seconde inclusion, $z \in g\big(f(A)\big)$ s'écrit $z = g(y)$ avec $y \in f(A)$, puis $y = f(x)$ avec $x \in A$.

CORRIGÉ

Soit A une partie de E.

Première inclusion. Soit $z \in (g \circ f)(A)$. Il existe $x \in A$ tel que $z = (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$. Posons $y = f(x)$: $y \in f(A)$ et $z = g(y)$, donc $z \in g\big(f(A)\big)$.

Seconde inclusion. Soit $z \in g\big(f(A)\big)$. Il existe $y \in f(A)$ tel que $z = g(y)$, puis $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Alors $z = g\big(f(x)\big) = (g \circ f)(x)$ avec $x \in A$, donc $z \in (g \circ f)(A)$.

Conclusion. Par double inclusion, $(g \circ f)(A) = g\big(f(A)\big)$.

2. 0,5 pts

Montrer que, pour toute partie C de G, $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}\big(g^{-1}(C)\big)$.

INDICE

Outil : la définition de la composée (F13), puis celle de l'image réciproque (F08) : $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$. **Début :** soit $x \in E$; traduis $x \in (g \circ f)^{-1}(C)$. **Point délicat :** $(g \circ f)^{-1}(C)$ est une image réciproque ; f et g ne sont pas supposées bijectives.

CORRIGÉ

Soit C une partie de G et $x \in E$. On applique la définition de la composée (F13), puis trois fois celle de l'image réciproque (F08) :

$$\begin{aligned} & x \in (g \circ f)^{-1}(C) \\ \Leftrightarrow\ & g\big(f(x)\big) \in C \\ \Leftrightarrow\ & f(x) \in g^{-1}(C) \\ \Leftrightarrow\ & x \in f^{-1}\big(g^{-1}(C)\big). \end{aligned}$$

Conclusion. Les deux parties de E ont les mêmes éléments : $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}\big(g^{-1}(C)\big)$.

3. 1 pts

Dans la question 3. et dans la seconde partie de la question 5., $E = F = G = \mathbb{R}$, et :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 4 - 2x,$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto |y|.$$

En déduire, à l'aide de 1. et 2., $(g \circ f)([0,3])$ et $(g \circ f)^{-1}([0,1])$.

INDICE

Outil : 1. et 2. **Début :** calcule d'abord $f([0,3])$, en résolvant $4 - 2x = y$. **Point délicat :** pour $g([-2,4])$, un réel $t \in [0,4]$ est sa propre image, et $t \in [-2,4]$.

CORRIGÉ

Calcul de $f([0,3])$. Soit $y \in \mathbb{R}$. L'équation $4 - 2x = y$ a pour unique solution $x = \dfrac{4-y}{2}$, et :

$$\begin{aligned} & 0 \le \frac{4-y}{2} \le 3 \\ \Leftrightarrow\ & 0 \le 4 - y \le 6 \\ \Leftrightarrow\ & -2 \le y \le 4. \end{aligned}$$

Ainsi, y a un antécédent dans $[0,3]$ si et seulement si $-2 \le y \le 4$: $f([0,3]) = [-2,4]$.

Calcul de $g([-2,4])$. Soit $y \in [-2,4]$: $|y|$ vaut y ou $-y$, avec $y \le 4$ et $-y \le 2$, donc $0 \le |y| \le 4$. Ainsi $g([-2,4]) \subset [0,4]$.

Réciproquement, tout $t \in [0,4]$ appartient à $[-2,4]$ et $g(t) = t$: $[0,4] \subset g([-2,4])$.

Image directe par $g \circ f$. D'après 1. :

$$\begin{aligned} & (g \circ f)([0,3]) \\ & = g\big(f([0,3])\big) \\ & = g([-2,4]) = [0,4]. \end{aligned}$$

Image réciproque. Pour $y \in \mathbb{R}$, $|y| \ge 0$, et $|y| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le y \le 1$: $g^{-1}([0,1]) = [-1,1]$. Puis, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} & -1 \le 4 - 2x \le 1 \\ \Leftrightarrow\ & -5 \le -2x \le -3 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{3}{2} \le x \le \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

D'après 2. :

$$\begin{aligned} & (g \circ f)^{-1}([0,1]) \\ & = f^{-1}([-1,1]) \\ & = \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]. \end{aligned}$$

Conclusion. $(g \circ f)([0,3]) = [0,4]$ et $(g \circ f)^{-1}([0,1]) = \left[\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right]$.

4. 1 pts

On revient au cas général, et on suppose f injective. Montrer que, pour toutes parties A et A' de E, $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$.

INDICE

Outil : l'image d'une intersection (F09) donne déjà une inclusion. **Début :** soit $y \in f(A) \cap f(A')$; écris $y = f(x)$ avec $x \in A$, et $y = f(x')$ avec $x' \in A'$. **Point délicat :** l'injectivité de f donne $x = x'$.

CORRIGÉ

Soit A et A' deux parties de E.

Première inclusion. D'après l'image d'une intersection (F09), $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$.

Seconde inclusion. Soit $y \in f(A) \cap f(A')$. Il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$, et $x' \in A'$ tel que $y = f(x')$.

Alors $f(x) = f(x')$; comme f est injective, $x = x'$. Donc $x \in A \cap A'$, et $y = f(x) \in f(A \cap A')$.

Conclusion. Par double inclusion, $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$.

5. 1,5 pts

On suppose encore f injective. Soit A et A' deux parties de E. En déduire, à l'aide de 4. et de F09 (image d'une réunion, inclusion conservée), que $f(A \setminus A') = f(A) \setminus f(A')$.

On reprend ensuite f et g de la question 3, avec $A = [0, 3]$ et $A' = [0, 1]$.

- Calculer $(g \circ f)(A \setminus A')$ et $(g \circ f)(A) \setminus (g \circ f)(A')$.
- En déduire par contraposée que $g \circ f$ n'est pas injective, puis que g n'est pas injective, bien que f le soit.

INDICE

Outil : F09 (image d'une réunion, inclusion conservée), 4., puis la composée de deux injections (F14). **Début :** écris $A = (A \setminus A') \cup (A \cap A')$ et applique F09 ; utilise 4. avec les parties $A \setminus A'$ et A'. **Point délicat :** l'égalité démontrée vaut pour toute application injective, en particulier pour $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; dans l'exemple, $A \setminus A' =]1, 3]$, et $(g \circ f)(A)$ est connu par 3.

CORRIGÉ

Image d'une différence. Tout élément de A appartient ou non à A', donc $A = (A \setminus A') \cup (A \cap A')$. D'après l'image d'une réunion (F09) :

$$\begin{aligned} f(A) &= f(A \setminus A') \\ &\quad \cup f(A \cap A'). \end{aligned}$$

Première inclusion. Soit $y \in f(A \setminus A')$. Comme $A \setminus A' \subset A$, F09 (inclusion conservée) donne $y \in f(A)$. D'après 4., appliqué aux parties $A \setminus A'$ et A' :

$$\begin{aligned} &f(A \setminus A') \cap f(A') \\ &= f\big((A \setminus A') \cap A'\big) \\ &= f(\varnothing) = \varnothing. \end{aligned}$$

Donc $y \notin f(A')$. Ainsi $f(A \setminus A') \subset f(A) \setminus f(A')$.

Seconde inclusion. Soit $y \in f(A) \setminus f(A')$. Comme $A \cap A' \subset A'$, F09 donne $f(A \cap A') \subset f(A')$, donc $y \notin f(A \cap A')$. Comme $y \in f(A \setminus A') \cup f(A \cap A')$, on obtient $y \in f(A \setminus A')$.

Par double inclusion, $f(A \setminus A') = f(A) \setminus f(A')$.

Exemple : $(g \circ f)(A \setminus A')$. Ici $A \setminus A' =]1, 3]$. Comme en 3., pour $y \in \mathbb{R}$, l'unique solution de $4 - 2x = y$ est $\dfrac{4 - y}{2}$, et :

$$\begin{aligned} &1 < \frac{4 - y}{2} \leq 3 \\ &\Leftrightarrow 2 < 4 - y \leq 6 \\ &\Leftrightarrow -2 \leq y < 2. \end{aligned}$$

Donc $f(]1, 3]) = [-2, 2[$.

Pour $y \in [-2, 2[$, $|y|$ vaut y ou $-y$, avec $y < 2$ et $-y \leq 2$, donc $0 \leq |y| \leq 2$. Réciproquement, tout $t \in [0, 2[$ vérifie $t = g(t)$ avec $t \in [-2, 2[$, et $2 = g(-2)$ avec $-2 \in [-2, 2[$. D'après 1. :

$$\begin{aligned}&(g\circ f)(A\setminus A')\\&=g([-2,2[)\\&=[0,2].\end{aligned}$$

Exemple : $(g\circ f)(A)\setminus(g\circ f)(A')$**.** D'après 3., $(g\circ f)(A)=[0,4]$.

De même, $0\leq\dfrac{4-y}{2}\leq 1\Leftrightarrow 2\leq y\leq 4$, donc $f(A')=[2,4]$. Pour $y\in[2,4]$, $g(y)=y$, donc, d'après 1. :

$$\begin{aligned}(g\circ f)(A')&=g([2,4])\\&=[2,4].\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}&(g\circ f)(A)\setminus(g\circ f)(A')\\&=[0,4]\setminus[2,4]\\&=[0,2[\,.\end{aligned}$$

$g\circ f$ **n'est pas injective.** La première partie, appliquée à l'application $g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, s'énonce : si $g\circ f$ est injective, alors $(g\circ f)(A\setminus A')=(g\circ f)(A)\setminus(g\circ f)(A')$.

Par contraposée, si cette égalité est fausse, $g\circ f$ n'est pas injective. Or $2\in[0,2]$ et $2\notin[0,2[$: l'égalité est fausse. Donc $g\circ f$ n'est pas injective. **Contrôle :** $(g\circ f)(1)=(g\circ f)(3)=2$.

g **n'est pas injective.** L'application f est injective : si $4-2x=4-2x'$, alors $x=x'$. D'après la composée de deux injections (F14), si f et g sont injectives, alors $g\circ f$ est injective.

Par contraposée, comme $g\circ f$ n'est pas injective, f ou g ne l'est pas ; f étant injective, g n'est pas injective. **Contrôle :** $g(-2)=g(2)=2$.

Conclusion. Pour f injective, $f(A\setminus A')=f(A)\setminus f(A')$. Dans l'exemple, $(g\circ f)(A\setminus A')=[0,2]$ et $(g\circ f)(A)\setminus(g\circ f)(A')=[0,2[$; donc $g\circ f$ n'est pas injective, et g non plus, bien que f le soit.