BURHAN

Ensembles et applications : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/ensembles-et-applications/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Ensembles et applications	Entraînement	8

Exercice 1

Quand la réunion égale l'intersection

Soit E un ensemble, et A et B deux parties de E.

1.

Montrer que $A \cap B \subset A$ et que $A \subset A \cup B$.

INDICE

Outil : la méthode de l'inclusion et les définitions de l'intersection et de la réunion (F02). **Début :** « Soit $x \in A \cap B$ », puis traduis l'appartenance. **Point délicat :** pour la seconde inclusion, un « ou » est vrai dès que l'un de ses termes l'est.

2.

On suppose que $A \cup B = A \cap B$. Montrer que $A \subset B$, puis que $A = B$.

INDICE

Outil : la question 1 et l'hypothèse $A \cup B = A \cap B$. **Début :** soit $x \in A$; d'après 1., $x \in A \cup B$. **Point délicat :** l'hypothèse ne change pas si l'on échange A et B.

3.

Écrire la réciproque de l'implication démontrée en 2., puis la démontrer. Conclure par une équivalence.

INDICE

Outil : la réciproque échange l'hypothèse et la conclusion. **Début :** suppose $A = B$. **Point délicat :** remplace B par A dans la réunion et dans l'intersection.

Exercice 2

Retrancher une réunion, retrancher une intersection

Soit E un ensemble, et A, B et C trois parties de E. Les complémentaires sont pris dans E.

1.

Montrer, en utilisant la propriété F04 (complémentaire et lois de Morgan), que :

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

INDICE

Outil : l'écriture d'une différence à l'aide d'un complémentaire et une loi de Morgan (F04). **Début :** écris $A \setminus (B \cup C) = A \cap \overline{B \cup C}$. **Point délicat :** compare les deux membres par la condition d'appartenance d'un élément x de E.

2.

On considère l'égalité $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Montrer qu'elle est fausse lorsque $E = \{0, 1, 2, 3\}$, $A = E$, $B = \{0, 1\}$ et $C = \{1, 2\}$.

INDICE

Outil : un contre-exemple. **Début :** calcule chaque membre en extension. **Point délicat :** trouve un élément présent d'un seul côté.

3.

Montrer que, dans le cas général :

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Contrôler sur l'exemple de 2.

INDICE

Outil : les propriétés du complémentaire (F04), une loi de Morgan, puis la distributivité (F03). **Début :** même départ qu'en 1. **Point délicat :** cette fois, la loi de Morgan fait apparaître une réunion.

4.

Montrer que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

INDICE

Outil : la définition de l'ensemble des parties (F05) : $X \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow X \subset E$. **Début :** pars de $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$ et traduis. **Point délicat :** X inclus dans A et dans B donne $X \subset A \cap B$.

Exercice 3

Une partie de $\mathbb{R}^2$ qui n'est pas un produit

On considère la partie suivante de $\mathbb{R}^2$:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x + y \leq 2\}.$$

1.

Montrer que $[0, 1] \times [0, 1] \subset D$.

INDICE

Outil : la méthode de l'inclusion et la définition du produit cartésien (F05). **Début :** soit $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$: écris ce que cela signifie pour x et pour y. **Point délicat :** garde seulement les majorations utiles, puis additionne.

2.

Les couples $(-5, 7)$ et $(7, -4)$ appartiennent-ils à D ?

INDICE

Outil : la définition de D. **Début :** calcule la somme des composantes de chaque couple. **Point délicat :** compare-la à 2, l'inégalité étant large.

3.

Montrer par l'absurde qu'il n'existe pas de parties A et B de $\mathbb{R}$ telles que $D = A \times B$.

INDICE

Outil : raisonnement par l'absurde, sur $D = A \times B$. **Début :** choisis deux couples de D et lis leurs composantes. **Point délicat :** précise à quel ensemble (A ou B) appartient chaque composante avant de recombiner.

Exercice 4

Images réciproques par une application homographique

Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$.

1.

Déterminer $f^{-1}(\{3\})$ et $f^{-1}(\{1\})$.

INDICE

Outil : la définition de l'image réciproque (F08) : résous $f(x) = 3$, puis $f(x) = 1$, dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. **Début :** pour $x \neq 1$, multiplie les deux membres par $x - 1$, qui n'est pas nul. **Point délicat :** une équation peut n'avoir aucune solution ; si tu en trouves une, vérifie qu'elle est différente de 1.

2.

Déterminer $f^{-1}([0, +\infty[)$.

INDICE

Outil : le signe d'un quotient. **Début :** il s'agit de résoudre $\dfrac{x+1}{x-1} \geq 0$. **Point délicat :** raisonne selon la position de x par rapport à -1 et à 1, sans oublier le cas d'un quotient nul.

3.

Montrer que $f(\mathbb{R} \setminus \{1\}) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

INDICE

Outil : la double inclusion. **Début :** une inclusion découle de 1. **Point délicat :** pour l'autre, soit $y \neq 1$: résous $f(x) = y$, puis vérifie que la solution est différente de 1.

Exercice 5

Images, intersection et complémentaire

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x+1|$. On pose $A = [-3, -1]$ et $A' = [-1, 1]$. Les complémentaires sont pris dans $\mathbb{R}$.

1.

Déterminer $f(A)$ et $f(A')$.

INDICE

Outil : l'image directe par double inclusion. **Début :** sur A, puis sur A', le signe de $x+1$ est connu : la valeur absolue se simplifie. **Point délicat :** pour chaque seconde inclusion, vérifie que l'antécédent proposé est dans la bonne partie.

2.

Calculer $f(A \cap A')$, puis le comparer à $f(A) \cap f(A')$.

INDICE

Outil : l'image d'une intersection (F09) donne une inclusion. **Début :** détermine d'abord $A \cap A'$. **Point délicat :** cherche un élément de $f(A) \cap f(A')$ qui n'est pas dans $f(A \cap A')$.

3.

Quelle propriété de f explique l'écart constaté en 2. ?

INDICE

Outil : les antécédents de 2. **Début :** cherche un élément de A et un élément de A' qui ont pour image 2. **Point délicat :** ces deux éléments sont-ils égaux ? Quelle propriété de f cela contredit-il ?

4.

Déterminer $f^{-1}([0, 1])$ et $f^{-1}(]-\infty, 0[)$.

INDICE

Outil : la définition de l'image réciproque (F08) : $x \in f^{-1}(B)$ équivaut à $f(x) \in B$. **Début :** résous $|x+1| \leq 1$. **Point délicat :** pour $]-\infty, 0[$, pense au signe d'une valeur absolue.

5.

En déduire $f^{-1}(]1, +\infty[)$ à l'aide de F10 (image réciproque d'un complémentaire, d'une réunion), puis vérifier par un calcul direct.

INDICE

Outil : les propriétés de l'image réciproque (F10), pour le complémentaire puis pour la réunion. **Début :** écris le complémentaire de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ comme réunion de deux intervalles. **Point délicat :** l'une des deux images réciproques a été trouvée en 4.

Exercice 6

Restreindre pour obtenir une bijection

Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 6x + 10$.

1.

Montrer que, pour tout réel x, $u(x) = (x-3)^2 + 1$. En déduire que u n'est pas surjective.

INDICE

Outil : un développement, puis la définition de la surjectivité. **Début :** développe $(x-3)^2$. **Point délicat :** cherche un réel plus petit que toutes les valeurs de u.

2.

L'application u est-elle injective ?

INDICE

Outil : pour réfuter l'injectivité, deux réels distincts de même image. **Début :** utilise la forme obtenue en 1. **Point délicat :** cherche deux réels symétriques par rapport à 3.

3.

Soit $v :]-\infty, 3] \to [1, +\infty[$, $x \mapsto x^2 - 6x + 10$. Justifier que v est bien définie, puis montrer qu'elle est injective et surjective.

INDICE

Outil : les méthodes de l'injectivité et de la surjectivité. **Début :** pour l'injectivité, pars de deux carrés égaux et pense au signe de $x - 3$. **Point délicat :** pour la surjectivité, résous $(x-3)^2 = y - 1$ et garde la solution qui est dans $]-\infty, 3]$.

4.

En déduire que v est bijective et déterminer v^{-1}.

INDICE

Outil : la définition d'une bijection (F12). **Début :** pour v^{-1}, relis ce que tu as obtenu en résolvant $(x-3)^2 = y - 1$ à la question 3. **Point délicat :** justifie qu'aucun autre antécédent n'est possible.

Exercice 7

Une bijection homographique et sa réciproque

On considère l'application :

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} \setminus \{2\} &\to \mathbb{R} \setminus \{3\} \\ x &\mapsto \frac{3x-1}{x-2}. \end{aligned}$$

1.

Montrer que h est bien définie, c'est-à-dire que $h(x) \neq 3$ pour tout $x \neq 2$.

INDICE

Outil : le raisonnement par l'absurde. **Début :** suppose $h(x) = 3$ pour un réel $x \neq 2$. **Point délicat :** chasse le dénominateur, qui n'est pas nul, et cherche une contradiction.

2.

Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Résoudre l'équation $h(x) = y$, d'inconnue $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

INDICE

Outil : des équivalences, pour $x \neq 2$. **Début :** multiplie par $x-2$, puis regroupe les termes en x. **Point délicat :** divise par $y-3$, puis vérifie que la solution est différente de 2.

3.

En déduire que h est bijective et donner h^{-1}. Vérifier par le calcul que $h^{-1}\big(h(x)\big) = x$ pour tout $x \neq 2$.

INDICE

Outil : la question 2 : l'existence d'un antécédent donne la surjectivité, son unicité l'injectivité. **Début :** écris h^{-1} avec ses deux ensembles. **Point délicat :** pour la vérification, calcule séparément $2h(x) - 1$ et $h(x) - 3$.

Exercice 8

Réciproque d'une composée : l'ordre s'inverse

On considère les applications :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 4x - 1,$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 6 - x.$$

1.

Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$. Sont-elles égales ?

INDICE

Outil : $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$. **Début :** remplace la variable de g par $4x - 1$, puis celle de f par $6 - x$. **Point délicat :** pour comparer, une seule valeur bien choisie suffit.

2.

Montrer que f et g sont bijectives, et déterminer f^{-1} et g^{-1}.

INDICE

Outil : la caractérisation d'une bijection par une réciproque (F15). **Début :** propose une réciproque pour chacune. **Point délicat :** vérifie les deux composées, et pas une seule.

3.

En déduire que $g \circ f$ est bijective. Déterminer $(g \circ f)^{-1}$ avec F16, puis en résolvant $(g \circ f)(x) = y$.

INDICE

Outil : la réciproque d'une composée (F16). **Début :** écris $(g \circ f)^{-1}$ à l'aide de f^{-1} et de g^{-1}. **Point délicat :** respecte l'ordre, puis contrôle en résolvant $7 - 4x = y$.

4.

Calculer $g^{-1} \circ f^{-1}$. Est-ce la réciproque de $g \circ f$?

INDICE

Outil : le calcul d'une composée. **Début :** calcule $g^{-1}\big(f^{-1}(y)\big)$. **Point délicat :** compare avec 3. en une valeur bien choisie.