BURHAN

Ensembles et applications : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/ensembles-et-applications/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Ensembles et applications	Entraînement	8

Exercice 1

Quand la réunion égale l'intersection

Soit E un ensemble, et A et B deux parties de E.

1.

Montrer que $A \cap B \subset A$ et que $A \subset A \cup B$.

INDICE

Outil : la méthode de l'inclusion et les définitions de l'intersection et de la réunion (F02). **Début :** « Soit $x \in A \cap B$ », puis traduis l'appartenance. **Point délicat :** pour la seconde inclusion, un « ou » est vrai dès que l'un de ses termes l'est.

CORRIGÉ

Première inclusion. Soit $x \in A \cap B$. D'après la définition de l'intersection (F02), $x \in A$ et $x \in B$; en particulier, $x \in A$.

Seconde inclusion. Soit $x \in A$. Alors la proposition « $x \in A$ ou $x \in B$ » est vraie. D'après la définition de la réunion (F02), $x \in A \cup B$.

Conclusion. $A \cap B \subset A$ et $A \subset A \cup B$.

2.

On suppose que $A \cup B = A \cap B$. Montrer que $A \subset B$, puis que $A = B$.

INDICE

Outil : la question 1 et l'hypothèse $A \cup B = A \cap B$. **Début :** soit $x \in A$; d'après 1., $x \in A \cup B$. **Point délicat :** l'hypothèse ne change pas si l'on échange A et B.

CORRIGÉ

Inclusion $A \subset B$. Soit $x \in A$. D'après 1., $x \in A \cup B$. Par hypothèse, $A \cup B = A \cap B$, donc $x \in A \cap B$. En particulier, $x \in B$.

Inclusion $B \subset A$. L'hypothèse s'écrit aussi $B \cup A = B \cap A$: elle ne change pas quand on échange les rôles de A et B. Le même raisonnement donne donc $B \subset A$.

Conclusion. $A \subset B$ et, par double inclusion (égalité de deux ensembles, F01), $A = B$.

3.

Écrire la réciproque de l'implication démontrée en 2., puis la démontrer. Conclure par une équivalence.

INDICE

Outil : la réciproque échange l'hypothèse et la conclusion. **Début :** suppose $A = B$. **Point délicat :** remplace B par A dans la réunion et dans l'intersection.

CORRIGÉ

Énoncé de la réciproque. « Si $A = B$, alors $A \cup B = A \cap B$. »

Preuve. Supposons $A = B$. Alors :

$$A \cup B = A \cup A = A,$$
$$A \cap B = A \cap A = A.$$

Donc $A \cup B = A \cap B$.

Conclusion. Les deux implications sont démontrées :

$$A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B.$$

Exercice 2

Retrancher une réunion, retrancher une intersection

Soit E un ensemble, et A, B et C trois parties de E. Les complémentaires sont pris dans E.

1.

Montrer, en utilisant la propriété F04 (complémentaire et lois de Morgan), que :

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

INDICE

Outil : l'écriture d'une différence à l'aide d'un complémentaire et une loi de Morgan (F04). **Début :** écris $A \setminus (B \cup C) = A \cap \overline{B \cup C}$. **Point délicat :** compare les deux membres par la condition d'appartenance d'un élément x de E.

CORRIGÉ

Premier membre. D'après F04, une différence s'écrit à l'aide d'un complémentaire : $A \setminus (B \cup C) = A \cap \overline{B \cup C}$. Par une loi de Morgan (F04), $\overline{B \cup C} = \overline{B} \cap \overline{C}$. Donc :

$$A \setminus (B \cup C) = A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}).$$

Second membre. De même, $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = (A \cap \overline{B}) \cap (A \cap \overline{C})$.

Soit $x \in E$. Il appartient à cet ensemble si et seulement si $x \in A$, $x \notin B$ et $x \notin C$. C'est exactement la condition d'appartenance à $A \cap (\overline{B} \cap \overline{C})$.

Conclusion. Les deux ensembles ont les mêmes éléments, donc $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

2.

On considère l'égalité $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Montrer qu'elle est fausse lorsque $E = \{0, 1, 2, 3\}$, $A = E$, $B = \{0, 1\}$ et $C = \{1, 2\}$.

INDICE

Outil : un contre-exemple. **Début :** calcule chaque membre en extension. **Point délicat :** trouve un élément présent d'un seul côté.

CORRIGÉ

Premier membre. On a $B \cap C = \{1\}$, donc $A \setminus (B \cap C) = \{0, 2, 3\}$.

Second membre. On a $A \setminus B = \{2, 3\}$ et $A \setminus C = \{0, 3\}$, donc $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = \{3\}$.

Conclusion. L'élément 0 appartient au premier ensemble mais pas au second : pour ces parties, l'égalité est fausse.

3.

Montrer que, dans le cas général :

$$\begin{aligned} &A \setminus (B \cap C) \\ &= (A \setminus B) \cup (A \setminus C). \end{aligned}$$

Contrôler sur l'exemple de 2.

INDICE

Outil : les propriétés du complémentaire (F04), une loi de Morgan, puis la distributivité (F03). **Début :** même départ qu'en 1. **Point délicat :** cette fois, la loi de Morgan fait apparaître une réunion.

CORRIGÉ

On transforme le premier membre :

$$\begin{aligned} &A \setminus (B \cap C) \\ &= A \cap \overline{B \cap C} \\ &= A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) \\ &= (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}) \\ &= (A \setminus B) \cup (A \setminus C). \end{aligned}$$

Les justifications sont, dans l'ordre : la différence écrite avec un complémentaire (F04), une loi de Morgan (F04), la distributivité de l'intersection sur la réunion (F03), puis de nouveau F04.

Contrôle. Sur l'exemple de 2. :

$$\begin{aligned} &(A \setminus B) \cup (A \setminus C) \\ &= \{2, 3\} \cup \{0, 3\} \\ &= \{0, 2, 3\}. \end{aligned}$$

C'est bien $A \setminus (B \cap C)$.

Conclusion. Dans le cas général, $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

4.

Montrer que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

INDICE

Outil : la définition de l'ensemble des parties (F05) : $X \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow X \subset E$. **Début :** pars de $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$ et traduis. **Point délicat :** X inclus dans A et dans B donne $X \subset A \cap B$.

CORRIGÉ

On utilise la définition de l'ensemble des parties (F05) : $X \in \mathcal{P}(A)$ signifie $X \subset A$.

Première inclusion. Soit $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$, c'est-à-dire $X \subset A \cap B$. Soit $x \in X$. Alors $x \in A \cap B$, donc $x \in A$ et $x \in B$ (F02).

Ainsi $X \subset A$ et $X \subset B$, c'est-à-dire $X \in \mathcal{P}(A)$ et $X \in \mathcal{P}(B)$. Donc $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Seconde inclusion. Soit $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$, c'est-à-dire $X \subset A$ et $X \subset B$. Soit $x \in X$. Alors $x \in A$ et $x \in B$, donc $x \in A \cap B$.

Ainsi $X \subset A \cap B$, c'est-à-dire $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$.

Conclusion. Par double inclusion, $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Exercice 3

Une partie de $\mathbb{R}^2$ qui n'est pas un produit

On considère la partie suivante de $\mathbb{R}^2$:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x + y \leq 2\}.$$

1.

Montrer que $[0, 1] \times [0, 1] \subset D$.

INDICE

Outil : la méthode de l'inclusion et la définition du produit cartésien (F05). **Début :** soit $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$: écris ce que cela signifie pour x et pour y. **Point délicat :** garde seulement les majorations utiles, puis additionne.

CORRIGÉ

Soit $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$. Par définition du produit cartésien (F05), $x \in [0, 1]$ et $y \in [0, 1]$.

En particulier, $x \leq 1$ et $y \leq 1$. En additionnant, $x + y \leq 2$, donc $(x, y) \in D$.

Conclusion. $[0, 1] \times [0, 1] \subset D$.

2.

Les couples $(-5, 7)$ et $(7, -4)$ appartiennent-ils à D ?

INDICE

Outil : la définition de D. **Début :** calcule la somme des composantes de chaque couple. **Point délicat :** compare-la à 2, l'inégalité étant large.

CORRIGÉ

Couple $(-5, 7)$**.** $-5 + 7 = 2$ et $2 \leq 2$: $(-5, 7) \in D$.

Couple $(7, -4)$**.** $7 + (-4) = 3$ et $3 > 2$: $(7, -4) \notin D$.

3.

Montrer par l'absurde qu'il n'existe pas de parties A et B de $\mathbb{R}$ telles que $D = A \times B$.

INDICE

Outil : raisonnement par l'absurde, sur $D = A \times B$. **Début :** choisis deux couples de D et lis leurs composantes. **Point délicat :** précise à quel ensemble (A ou B) appartient chaque composante avant de recombiner.

CORRIGÉ

Supposons par l'absurde qu'il existe deux parties A et B de $\mathbb{R}$ telles que $D = A \times B$.

Deux couples de D. Comme $2 + 0 = 2$, le couple $(2, 0)$ appartient à $D = A \times B$; sa première composante donne $2 \in A$.

Comme $0 + 2 = 2$, le couple $(0, 2)$ appartient aussi à $A \times B$; sa seconde composante donne $2 \in B$.

Contradiction. Alors $(2, 2) \in A \times B = D$, donc $2 + 2 \leq 2$, c'est-à-dire $4 \leq 2$: c'est faux.

Conclusion. Il n'existe pas de parties A et B de $\mathbb{R}$ telles que $D = A \times B$.

Exercice 4

Images réciproques par une application homographique

Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$.

1.

Déterminer $f^{-1}(\{3\})$ et $f^{-1}(\{1\})$.

INDICE

Outil : la définition de l'image réciproque (F08) : résous $f(x) = 3$, puis $f(x) = 1$, dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. **Début :** pour $x \neq 1$, multiplie les deux membres par $x - 1$, qui n'est pas nul. **Point délicat :** une équation peut n'avoir aucune solution ; si tu en trouves une, vérifie qu'elle est différente de 1.

CORRIGÉ

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Comme $x - 1 \neq 0$, on peut multiplier par $x - 1$ en gardant l'équivalence.

Image réciproque de $\{3\}$.

$$\begin{aligned} f(x) = 3 &\Leftrightarrow x + 1 = 3x - 3 \\ &\Leftrightarrow x = 2. \end{aligned}$$

Et $2 \neq 1$: 2 est bien dans l'ensemble de départ. Donc $f^{-1}(\{3\}) = \{2\}$.

Image réciproque de $\{1\}$.

$$\begin{aligned} f(x) = 1 &\Leftrightarrow x + 1 = x - 1 \\ &\Leftrightarrow 1 = -1. \end{aligned}$$

C'est faux, donc aucun x ne convient : $f^{-1}(\{1\}) = \varnothing$.

2.

Déterminer $f^{-1}([0,+\infty[)$.

INDICE

Outil : le signe d'un quotient. **Début :** il s'agit de résoudre $\dfrac{x+1}{x-1} \geq 0$. **Point délicat :** raisonne selon la position de x par rapport à -1 et à 1, sans oublier le cas d'un quotient nul.

CORRIGÉ

Soit $x \neq 1$. Il s'agit de savoir quand $\dfrac{x+1}{x-1} \geq 0$.

Quotient nul. Le quotient est nul si et seulement si $x = -1$.

Quotient non nul. Il est strictement positif si et seulement si $x+1$ et $x-1$ ont le même signe. Trois cas couvrent $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$:

- si $x < -1$: $x+1 < 0$ et $x-1 < 0$, le quotient est strictement positif ;
- si $-1 < x < 1$: $x+1 > 0$ et $x-1 < 0$, le quotient est strictement négatif ;
- si $x > 1$: $x+1 > 0$ et $x-1 > 0$, le quotient est strictement positif.

Conclusion.

$$\begin{aligned} &f^{-1}([0,+\infty[) \\ &=]-\infty,-1] \cup]1,+\infty[\,. \end{aligned}$$

3.

Montrer que $f(\mathbb{R} \setminus \{1\}) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

INDICE

Outil : la double inclusion. **Début :** une inclusion découle de 1. **Point délicat :** pour l'autre, soit $y \neq 1$: résous $f(x) = y$, puis vérifie que la solution est différente de 1.

CORRIGÉ

Première inclusion. D'après 1., $f^{-1}(\{1\}) = \varnothing$: aucun élément n'a pour image 1. Donc toute image $f(x)$ appartient à $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Seconde inclusion. Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Posons $x = \dfrac{y+1}{y-1}$, défini car $y \neq 1$.

Si l'on avait $x = 1$, on aurait $y+1 = y-1$, ce qui est faux ; donc $x \neq 1$. On calcule :

$$x+1 = \frac{2y}{y-1},$$

$$x-1 = \frac{2}{y-1}.$$

Donc $f(x) = \dfrac{2y}{2} = y$, et $y \in f(\mathbb{R} \setminus \{1\})$.

Conclusion. Par double inclusion, $f(\mathbb{R} \setminus \{1\}) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Exercice 5

Images, intersection et complémentaire

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x+1|$. On pose $A = [-3, -1]$ et $A' = [-1, 1]$. Les complémentaires sont pris dans $\mathbb{R}$.

1.

Déterminer $f(A)$ et $f(A')$.

INDICE

Outil : l'image directe par double inclusion. **Début :** sur A, puis sur A', le signe de $x+1$ est connu : la valeur absolue se simplifie. **Point délicat :** pour chaque seconde inclusion, vérifie que l'antécédent proposé est dans la bonne partie.

CORRIGÉ

Image de A. Soit $x \in A$: $-2 \leq x+1 \leq 0$, donc $f(x) = -(x+1)$ et $0 \leq f(x) \leq 2$. Ainsi $f(A) \subset [0, 2]$.

Réciproquement, soit $y \in [0, 2]$. Le réel $x = -1 - y$ vérifie $-3 \leq x \leq -1$ et $f(x) = |-y| = y$. Ainsi $[0, 2] \subset f(A)$.

Image de A'. Soit $x \in A'$: $0 \leq x+1 \leq 2$, donc $f(x) = x+1 \in [0, 2]$.

Réciproquement, soit $y \in [0, 2]$. Le réel $x = y - 1$ vérifie $-1 \leq x \leq 1$ et $f(x) = y$.

Conclusion. Par double inclusion, $f(A) = [0, 2]$ et $f(A') = [0, 2]$.



Sur A, la courbe de f descend de 2 à 0 ; sur A', elle remonte de 0 à 2 : les deux morceaux couvrent les mêmes ordonnées, de 0 à 2.

2.

Calculer $f(A \cap A')$, puis le comparer à $f(A) \cap f(A')$.

INDICE

Outil : l'image d'une intersection (F09) donne une inclusion. **Début :** détermine d'abord $A \cap A'$. **Point délicat :** cherche un élément de $f(A) \cap f(A')$ qui n'est pas dans $f(A \cap A')$.

CORRIGÉ

Calcul. $A \cap A' = \{-1\}$ et $f(-1) = 0$, donc $f(A \cap A') = \{0\}$.

Comparaison. D'après 1., $f(A) \cap f(A') = [0, 2]$. On a bien $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$, comme le prévoit l'image d'une intersection (F09).

Conclusion. L'inclusion est stricte : 2 appartient à $f(A) \cap f(A')$ mais pas à $f(A \cap A')$.

3.

Quelle propriété de f explique l'écart constaté en 2. ?

INDICE

Outil : les antécédents de 2. **Début :** cherche un élément de A et un élément de A' qui ont pour image 2. **Point délicat :** ces deux éléments sont-ils égaux ? Quelle propriété de f cela contredit-il ?

CORRIGÉ

Les réels $-3 \in A$ et $1 \in A'$ sont distincts, et $f(-3) = f(1) = 2$.

Ainsi 2 appartient à $f(A)$ et à $f(A')$, sans être l'image de l'unique élément -1 de $A \cap A'$.

Conclusion. L'écart vient de ce que f n'est pas injective : l'image d'une intersection n'est pas toujours l'intersection des images (W03).

4.

Déterminer $f^{-1}([0, 1])$ et $f^{-1}(]-\infty, 0[)$.

INDICE

Outil : la définition de l'image réciproque (F08) : $x \in f^{-1}(B)$ équivaut à $f(x) \in B$. **Début :** résous $|x + 1| \leq 1$. **Point délicat :** pour $]-\infty, 0[$, pense au signe d'une valeur absolue.

CORRIGÉ

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Image réciproque de $[0, 1]$. Une valeur absolue est toujours positive, donc $f(x) \in [0, 1]$ équivaut à $|x + 1| \leq 1$:

$$\begin{aligned} & |x + 1| \leq 1 \\ \Leftrightarrow\ & -1 \leq x + 1 \leq 1 \\ \Leftrightarrow\ & -2 \leq x \leq 0. \end{aligned}$$

Donc $f^{-1}([0, 1]) = [-2, 0]$.

Image réciproque de $]-\infty, 0[$. Une valeur absolue n'est jamais strictement négative : $f^{-1}(]-\infty, 0[) = \varnothing$.

5.

En déduire $f^{-1}(]1,+\infty[)$ à l'aide de F10 (image réciproque d'un complémentaire, d'une réunion), puis vérifier par un calcul direct.

INDICE

Outil : les propriétés de l'image réciproque (F10), pour le complémentaire puis pour la réunion. **Début :** écris le complémentaire de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ comme réunion de deux intervalles. **Point délicat :** l'une des deux images réciproques a été trouvée en 4.

CORRIGÉ

Complémentaire de $[0,1]$. Dans $\mathbb{R}$, $\overline{[0,1]} =]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$.

Images réciproques. L'image réciproque d'une réunion est la réunion des images réciproques, et celle d'un complémentaire est le complémentaire (F10). Avec 4. :

$$\begin{aligned} & f^{-1}(]-\infty,0[) \\ & \quad \cup f^{-1}(]1,+\infty[) \\ & = \overline{f^{-1}([0,1])} \\ & =]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[. \end{aligned}$$

Comme $f^{-1}(]-\infty,0[) = \varnothing$, on obtient :

$$\begin{aligned} & f^{-1}(]1,+\infty[) \\ & =]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[. \end{aligned}$$

Vérification. Soit $x \in \mathbb{R}$. $|x+1| > 1$ équivaut à $x+1 > 1$ ou $x+1 < -1$, c'est-à-dire à $x > 0$ ou $x < -2$.

Conclusion. $f^{-1}(]1,+\infty[) =]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$.

Exercice 6

Restreindre pour obtenir une bijection

Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 6x + 10$.

1.

Montrer que, pour tout réel x, $u(x) = (x-3)^2 + 1$. En déduire que u n'est pas surjective.

INDICE

Outil : un développement, puis la définition de la surjectivité. **Début :** développe $(x-3)^2$. **Point délicat :** cherche un réel plus petit que toutes les valeurs de u.

CORRIGÉ

Forme de $u(x)$. Soit x un réel :

$$\begin{aligned}&(x-3)^2 + 1\\ &= x^2 - 6x + 9 + 1\\ &= x^2 - 6x + 10\\ &= u(x).\end{aligned}$$

Surjectivité. Un carré est positif, donc $u(x) \geq 1$ pour tout réel x. Le réel 0 n'a donc pas d'antécédent.

Conclusion. Pour tout réel x, $u(x) = (x-3)^2 + 1$, et u n'est pas surjective.

2.

L'application u est-elle injective ?

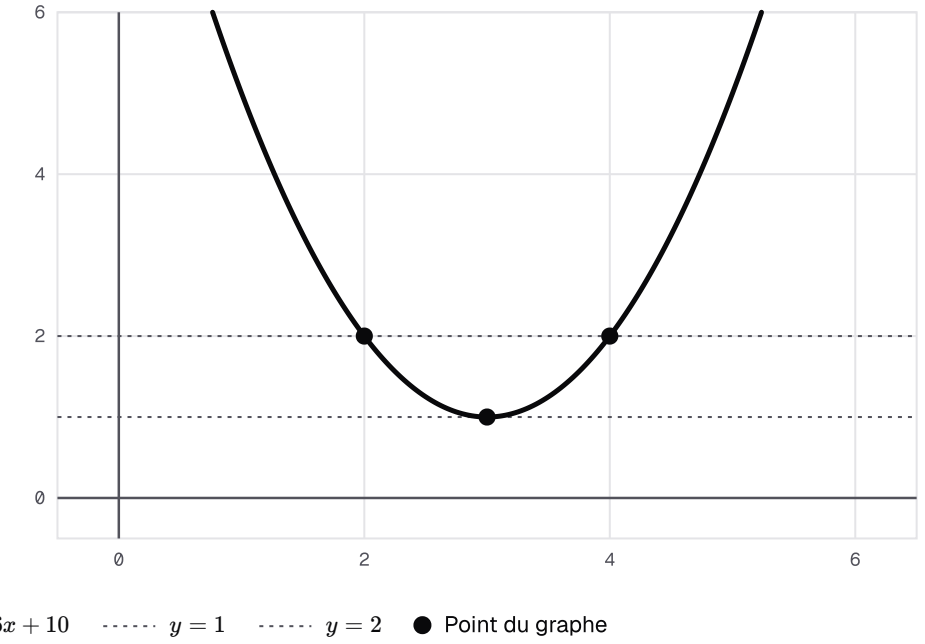
INDICE

Outil : pour réfuter l'injectivité, deux réels distincts de même image. **Début :** utilise la forme obtenue en 1. **Point délicat :** cherche deux réels symétriques par rapport à 3.

CORRIGÉ

D'après 1., $u(2) = 1 + 1 = 2$ et $u(4) = 1 + 1 = 2$, avec $2 \neq 4$.

Conclusion. Deux réels distincts ont la même image : u n'est pas injective.



La parabole de u reste au-dessus de la droite y = 1, et la droite y = 2 la coupe en deux points, d'abscisses 2 et 4.

3.

Soit $v :]-\infty, 3] \to [1, +\infty[$, $x \mapsto x^2 - 6x + 10$. Justifier que v est bien définie, puis montrer qu'elle est injective et surjective.

INDICE

Outil : les méthodes de l'injectivité et de la surjectivité. **Début :** pour l'injectivité, pars de deux carrés égaux et pense au signe de $x - 3$. **Point délicat :** pour la surjectivité, résous $(x-3)^2 = y - 1$ et garde la solution qui est dans $]-\infty, 3]$.

CORRIGÉ

Bien définie. D'après 1., pour tout $x \leq 3$, $v(x) = (x-3)^2 + 1 \geq 1$.

Injective. Soit x et x' dans $]-\infty, 3]$ tels que $v(x) = v(x')$. Alors $(x-3)^2 = (x'-3)^2$, donc $|x-3| = |x'-3|$.

Or $x - 3 \leq 0$ et $x' - 3 \leq 0$, donc $3 - x = 3 - x'$, puis $x = x'$.

Surjective. Soit $y \in [1, +\infty[$. Posons $x = 3 - \sqrt{y-1}$, défini car $y - 1 \geq 0$. Alors $x \leq 3$, et :

$$\begin{aligned} v(x) &= (-\sqrt{y-1})^2 + 1 \\ &= (y-1) + 1 = y. \end{aligned}$$

Conclusion. v est bien définie, injective et surjective.

4.

En déduire que v est bijective et déterminer v^{-1}.

INDICE

Outil : la définition d'une bijection (F12). **Début :** pour v^{-1}, relis ce que tu as obtenu en résolvant $(x-3)^2 = y - 1$ à la question 3. **Point délicat :** justifie qu'aucun autre antécédent n'est possible.

CORRIGÉ

Bijectivité. D'après 3., v est injective et surjective : elle est bijective (application bijective, F12).

Réciproque. Pour $y \geq 1$, le réel $3 - \sqrt{y-1}$ est un antécédent de y d'après 3. ; par injectivité, c'est le seul.

Conclusion. v est bijective, et :

$$\begin{aligned} v^{-1} : [1, +\infty[&\to]-\infty, 3] \\ y &\mapsto 3 - \sqrt{y-1}. \end{aligned}$$

Par exemple, $v^{-1}(5) = 3 - 2 = 1$, et en effet $v(1) = 1 - 6 + 10 = 5$.

Exercice 7

Une bijection homographique et sa réciproque

On considère l'application :

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} \setminus \{2\} &\to \mathbb{R} \setminus \{3\} \\ x &\mapsto \frac{3x-1}{x-2}. \end{aligned}$$

1.

Montrer que h est bien définie, c'est-à-dire que $h(x) \neq 3$ pour tout $x \neq 2$.

INDICE

Outil : le raisonnement par l'absurde. **Début :** suppose $h(x) = 3$ pour un réel $x \neq 2$. **Point délicat :** chasse le dénominateur, qui n'est pas nul, et cherche une contradiction.

CORRIGÉ

Soit $x \neq 2$. Le quotient existe, car $x - 2 \neq 0$.

Supposons par l'absurde $h(x) = 3$. En multipliant par $x - 2$:

$$\begin{aligned} 3x - 1 &= 3(x-2) \\ &= 3x - 6, \end{aligned}$$

donc $-1 = -6$: c'est faux.

Conclusion. Pour tout $x \neq 2$, $h(x) \neq 3$: h est bien à valeurs dans $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

2.

Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Résoudre l'équation $h(x) = y$, d'inconnue $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

INDICE

Outil : des équivalences, pour $x \neq 2$. **Début :** multiplie par $x - 2$, puis regroupe les termes en x. **Point délicat :** divise par $y - 3$, puis vérifie que la solution est différente de 2.

CORRIGÉ

Résolution. Soit $x \neq 2$. Comme $x - 2 \neq 0$, puis $y - 3 \neq 0$:

$$\begin{aligned} & h(x) = y \\ \Leftrightarrow\ & 3x - 1 = y(x-2) \\ \Leftrightarrow\ & x(y-3) = 2y - 1 \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{2y-1}{y-3}. \end{aligned}$$

La solution est dans l'ensemble de départ. Si $\dfrac{2y-1}{y-3}$ valait 2, on aurait $2y - 1 = 2y - 6$, ce qui est faux.

Conclusion. L'équation a une unique solution dans $\mathbb{R} \setminus \{2\}$: $x = \dfrac{2y-1}{y-3}$.

3.

En déduire que h est bijective et donner h^{-1}. Vérifier par le calcul que $h^{-1}\big(h(x)\big) = x$ pour tout $x \neq 2$.

INDICE

Outil : la question 2 : l'existence d'un antécédent donne la surjectivité, son unicité l'injectivité. **Début :** écris h^{-1} avec ses deux ensembles. **Point délicat :** pour la vérification, calcule séparément $2h(x) - 1$ et $h(x) - 3$.

CORRIGÉ

Bijectivité. D'après 2., tout élément de $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ a un antécédent, donc h est surjective ; il n'en a qu'un, donc h est injective. Ainsi h est bijective (application bijective, F12), et :

$$\begin{aligned} h^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{3\} &\to \mathbb{R} \setminus \{2\} \\ y &\mapsto \frac{2y-1}{y-3}. \end{aligned}$$

Vérification. Soit $x \neq 2$. On calcule séparément :

$$\begin{aligned} 2h(x) - 1 &= \frac{6x - 2 - (x-2)}{x-2} \\ &= \frac{5x}{x-2}, \\ h(x) - 3 &= \frac{3x - 1 - 3x + 6}{x-2} \\ &= \frac{5}{x-2}. \end{aligned}$$

Donc $h^{-1}\big(h(x)\big) = \dfrac{5x}{5} = x$.

Conclusion. h est bijective, h^{-1} est l'application ci-dessus, et pour tout $x \neq 2$, $h^{-1}\big(h(x)\big) = x$.

Exercice 8

Réciproque d'une composée : l'ordre s'inverse

On considère les applications :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 4x - 1,$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 6 - x.$$

1.

Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$. Sont-elles égales ?

INDICE

Outil : $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$. **Début :** remplace la variable de g par $4x - 1$, puis celle de f par $6 - x$. **Point délicat :** pour comparer, une seule valeur bien choisie suffit.

CORRIGÉ

Calculs. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= 6 - (4x - 1)\\ &= 7 - 4x,\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= 4(6 - x) - 1\\ &= 23 - 4x.\end{aligned}$$

Comparaison. En $x = 0$, on obtient 7 et 23.

Conclusion. $g \circ f : x \mapsto 7 - 4x$ et $f \circ g : x \mapsto 23 - 4x$ ne sont pas égales : $g \circ f \neq f \circ g$.

2.

Montrer que f et g sont bijectives, et déterminer f^{-1} et g^{-1}.

INDICE

Outil : la caractérisation d'une bijection par une réciproque (F15). **Début :** propose une réciproque pour chacune. **Point délicat :** vérifie les deux composées, et pas une seule.

CORRIGÉ

On utilise la caractérisation d'une bijection par une réciproque (F15).

Pour f. Soit $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto \dfrac{y + 1}{4}$.

Pour tout réel x, $p\big(f(x)\big) = \dfrac{4x}{4} = x$. Pour tout réel y, $f\big(p(y)\big) = (y + 1) - 1 = y$.

Donc f est bijective et $f^{-1} = p$.

Pour g. Pour tout réel x, $g\big(g(x)\big) = 6 - (6 - x) = x$. Donc $g \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, et cette seule égalité donne les deux composées.

Donc g est bijective et $g^{-1} = g$.

Conclusion. f et g sont bijectives, $f^{-1} : y \mapsto \dfrac{y + 1}{4}$ et $g^{-1} = g$.

3.

En déduire que $g \circ f$ est bijective. Déterminer $(g \circ f)^{-1}$ avec F16, puis en résolvant $(g \circ f)(x) = y$.

INDICE

Outil : la réciproque d'une composée (F16). **Début :** écris $(g \circ f)^{-1}$ à l'aide de f^{-1} et de g^{-1}. **Point délicat :** respecte l'ordre, puis contrôle en résolvant $7 - 4x = y$.

CORRIGÉ

Avec F16. D'après la réciproque d'une composée (F16), $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
Pour tout réel y :

$$\begin{aligned}(g \circ f)^{-1}(y) &= f^{-1}(6 - y) \\ &= \frac{7 - y}{4}.\end{aligned}$$

Calcul direct. Soit y un réel :

$$\begin{aligned}7 - 4x = y &\Leftrightarrow 4x = 7 - y \\ &\Leftrightarrow x = \frac{7 - y}{4}.\end{aligned}$$

Conclusion. $g \circ f$ est bijective, et les deux méthodes donnent $(g \circ f)^{-1} : y \mapsto \dfrac{7 - y}{4}$.

4.

Calculer $g^{-1} \circ f^{-1}$. Est-ce la réciproque de $g \circ f$?

INDICE

Outil : le calcul d'une composée. **Début :** calcule $g^{-1}\big(f^{-1}(y)\big)$. **Point délicat :** compare avec 3. en une valeur bien choisie.

CORRIGÉ

Calcul. Pour tout réel y :

$$\begin{aligned}g^{-1}\big(f^{-1}(y)\big) &= 6 - \frac{y + 1}{4} \\ &= \frac{23 - y}{4}.\end{aligned}$$

Comparaison. En $y = 7$, cette application donne 4, alors que $(g \circ f)^{-1}(7) = 0$.

Conclusion. $g^{-1} \circ f^{-1}$ n'est pas la réciproque de $g \circ f$: la composée dépend de l'ordre (W06). C'est en fait la réciproque de $f \circ g$, d'après la réciproque d'une composée (F16).