BURHAN

Ensembles et applications : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/ensembles-et-applications/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Ensembles et applications	Application	10

Exercice 1

Écrire en extension, choisir entre appartenance et inclusion

On considère les ensembles :

$$A = \{n \in \mathbb{Z} \,/\, n^2 < 10\},$$

$$B = \{n \in \mathbb{N} \,/\, n \text{ divise } 12\}.$$

1.

Écrire A et B en extension.

INDICE

Outil : pour A, cherche à partir de quelle valeur absolue le carré dépasse 10, et justifie que les entiers au-delà ne conviennent pas. Pour B, teste les entiers naturels de 0 à 12.

2.

Compléter chaque pointillé par l'un des symboles $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$:

$-3 \ \ldots \ A$; $\{0, 4\} \ \ldots \ A$; $\{1, 2, 3\} \ \ldots \ B$; $12 \ \ldots \ A$.

INDICE

Outil : la nature de l'objet de gauche. Un nombre appelle $\in$ ou $\notin$; un ensemble appelle $\subset$ ou $\not\subset$.

3.

A-t-on $A \subset B$? A-t-on $\{n \in A \,/\, n > 0\} \subset B$? Justifier.

INDICE

Outil : pour réfuter une inclusion, un seul élément bien choisi suffit.

Exercice 2

Opérations dans un ensemble fini

On pose :

$$E = \{n \in \mathbb{N} \,/\, n \leq 11\},$$
$$A = \{n \in E \,/\, 4 \text{ divise } n\},$$
$$B = \{n \in E \,/\, n \geq 7\}.$$

Les complémentaires sont pris dans E.

1.

Écrire A et B en extension.

INDICE

Outil : teste chaque entier de 0 à 11 ; 0 est un multiple de 4.

2.

Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ et $B \setminus A$.

INDICE

Outil : les définitions de l'intersection, de la réunion et de la différence (F02) : « et » pour l'intersection, « ou » pour la réunion, « et non » pour la différence.

3.

Déterminer $\overline{A \cup B}$. Calculer ensuite $\overline{A}$, $\overline{B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$, puis comparer.

INDICE

Outil : le complémentaire dans E, puis les lois de Morgan (F04).

Exercice 3

Opérations sur des intervalles

Dans $\mathbb{R}$, on pose $I = [-2, 5[$, $J =]1, 8]$ et $K =]5, 9]$. Les complémentaires sont pris dans $\mathbb{R}$.

1.

Déterminer $I \cap J$, $I \cup J$, $I \setminus J$ et $J \setminus I$.

INDICE

Outil : traduis chaque appartenance par des inégalités, puis examine chaque borne.

2.

Déterminer $\overline{I}$. Les intervalles I et K sont-ils disjoints ?

INDICE

Outil : un réel n'est pas dans I s'il est trop petit ou trop grand. Pour $I \cap K$, examine la borne commune 5.

3.

Montrer que $I \cap J = \{x \in \mathbb{R} \,/\, |x - 3| < 2\}$.

INDICE

Rappel : pour $r > 0$, $|x - c| < r$ équivaut à $c - r < x < c + r$. **Outil :** des équivalences successives, pour un réel x quelconque, puis la question 1.

Exercice 4

L'ensemble des parties d'un ensemble à trois éléments

On pose $E = \{0, 1, 2\}$.

1.

Écrire l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ en extension.

INDICE

Outil : range les parties selon leur nombre d'éléments, sans oublier $\varnothing$ ni E.

2.

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse, en justifiant.

- (a) $1 \in \mathcal{P}(E)$.
- (b) $\{1\} \in \mathcal{P}(E)$.
- (c) $\{1\} \subset \mathcal{P}(E)$.
- (d) $\{\varnothing\} \subset \mathcal{P}(E)$.
- (e) $\varnothing \in \mathcal{P}(E)$.

INDICE

Outil : la définition de l'ensemble des parties (F05) : les éléments de $\mathcal{P}(E)$ sont les parties de E. Pour une inclusion dans $\mathcal{P}(E)$, chaque élément de l'ensemble de gauche doit être une partie de E.

3.

Écrire en extension l'ensemble $\{X \in \mathcal{P}(E) \,/\, 0 \in X\}$.

INDICE

Outil : la liste de 1., dont tu gardes les parties qui contiennent le nombre 0.

Exercice 5

Produits cartésiens et couples

On pose $A = \{-1, 2\}$ et $B = \{0, 1, 3\}$.

1.

Écrire $A \times B$ en extension.

INDICE

Outil : la définition du produit : première composante dans A, seconde composante dans B.

2.

Le couple $(1, -1)$ appartient-il à $A \times B$? à $B \times A$? A-t-on $A \times B = B \times A$?

INDICE

Outil : un couple se teste composante par composante, chacune dans son ensemble.

3.

Dans $\mathbb{R}^2$, on pose $P = [0, 2] \times [1, 3]$ et $Q = [1, 4] \times [0, 2]$.

Écrire $P \cap Q$ comme un produit de deux intervalles. Le couple $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ appartient-il à $P \cap Q$?

INDICE

Outil : l'intersection de deux produits cartésiens (F06) se calcule composante par composante.

Exercice 6

Images et images réciproques par un tableau

On pose $E = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ et $F = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. On considère :

$$f : E \to F, \quad x \mapsto |x - 1|.$$

1.

Dresser le tableau des images des éléments de E. Justifier que f est bien une application de E dans F.

INDICE

Outil : calcule les six valeurs, puis vérifie que chacune appartient à F.

2.

Déterminer $f(\{-1, 0, 3\})$, $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(\{2, 3\})$ et $f^{-1}(\{4, 5\})$.

INDICE

Outil : les définitions de l'image directe et de l'image réciproque (F08), lues dans le tableau.

3.

L'application f est-elle injective ? surjective ? Justifier à l'aide du tableau.

INDICE

Outil : les définitions de l'injectivité et de la surjectivité (F11), lues dans le tableau.

Exercice 7

Image d'un intervalle par une application affine

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 3 - 2x$.

1.

Déterminer $g^{-1}(\{7\})$ et $g^{-1}([0, +\infty[)$.

INDICE

Outil : la définition de l'image réciproque (F08) : $x \in g^{-1}(B)$ équivaut à $g(x) \in B$. Attention au signe du coefficient de x.

2.

Montrer que $g([-1, 2]) \subset [-1, 5]$, puis que $[-1, 5] \subset g([-1, 2])$.

INDICE

Outil : pour la première inclusion, un encadrement de $3 - 2x$; pour la seconde, un antécédent explicite, à vérifier dans $[-1, 2]$.

3.

On note $r = g_{|[0,+\infty[}$ la restriction de g à $[0, +\infty[$. Déterminer $r^{-1}(\{7\})$ et $r([0, +\infty[)$.

INDICE

Outil : un antécédent par r doit appartenir à l'ensemble de départ de r.

Exercice 8

Une même formule sur les entiers et sur les rationnels

Soit $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \mapsto 5n - 2$.

1.

Montrer que h est injective.

INDICE

Outil : la méthode de l'injectivité, à partir de « Soit n et m deux entiers tels que $h(n) = h(m)$ ».

2.

Montrer que h n'est pas surjective.

INDICE

Outil : un entier y pour lequel la solution de $5n - 2 = y$ n'est pas entière.

3.

On considère $k : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, x \mapsto 5x - 2$. Montrer que k est surjective.

INDICE

Outil : la méthode de la surjectivité : la solution de $5x - 2 = y$ doit être un rationnel.

Exercice 9

La somme des composantes d'un couple

Soit $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$.

1.

Calculer $s(2, -2)$ et $s(-1, 1)$. L'application s est-elle injective ?

INDICE

Outil : une application sur $\mathbb{R}^2$ reçoit un couple (x, y) : calcule $s(2, -2)$ en remplaçant x par 2 et y par -2. Deux couples sont égaux s'ils ont les mêmes composantes, dans le même ordre (F05).

2.

Montrer que s est surjective.

INDICE

Outil : soit $t \in \mathbb{R}$. Il suffit d'exhiber un couple (x, y) tel que $x + y = t$: choisis-en un qui s'écrit à l'aide de t.

3.

Déterminer $s^{-1}(\{0\})$ et $s^{-1}(\{1\})$.

INDICE

Outil : la définition de l'image réciproque (F08) : $(x, y) \in s^{-1}(\{1\})$ équivaut à $x + y = 1$.

Exercice 10

Composer dans les deux sens

On considère les applications :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to [1, +\infty[\\ x &\mapsto 1 + |x|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : [1, +\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x - 1}. \end{aligned}$$

1.

Justifier que f et g sont bien définies, puis que les composées $g \circ f$ et $f \circ g$ existent.

INDICE

Outil : la définition de la composée (F13) : l'ensemble d'arrivée de la première application doit être l'ensemble de départ de la seconde.

2.

Calculer $(g \circ f)(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$, puis $(f \circ g)(x)$ pour $x \in [1, +\infty[$.

INDICE

Outil : $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$; une racine carrée est positive.

3.

Calculer $(g \circ f)(5)$ et $(f \circ g)(5)$. Les applications $g \circ f$ et $f \circ g$ sont-elles égales ?

INDICE

Outil : la question 2, et les conditions d'égalité de deux applications (F07).