BURHAN

Ensembles et applications : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/ensembles-et-applications/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Ensembles et applications	Application	10

Exercice 1

Écrire en extension, choisir entre appartenance et inclusion

On considère les ensembles :

$$A = \{n \in \mathbb{Z} \,/\, n^2 < 10\},$$
$$B = \{n \in \mathbb{N} \,/\, n \text{ divise } 12\}.$$

1.

Écrire A et B en extension.

INDICE

Outil : pour A, cherche à partir de quelle valeur absolue le carré dépasse 10, et justifie que les entiers au-delà ne conviennent pas. Pour B, teste les entiers naturels de 0 à 12.

CORRIGÉ

Ensemble A. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Si $|n| \geq 4$, alors $n^2 \geq 16$, donc $n \notin A$.

Il reste les entiers n tels que $-3 \leq n \leq 3$. Leurs carrés valent 0, 1, 4 ou 9, tous strictement inférieurs à 10 : ces sept entiers appartiennent à A.

Ensemble B. L'entier 0 ne divise pas 12, car $0 \times k = 0$ pour tout entier k.

Un diviseur naturel non nul de 12 est au plus égal à 12. On a $12 = 1 \times 12 = 2 \times 6 = 3 \times 4$, et aucun des entiers 5, 7, 8, 9, 10, 11 ne divise 12.

Conclusion. En extension, $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ et $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

2.

Compléter chaque pointillé par l'un des symboles $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$:

$-3 \ \ldots \ A$; $\{0, 4\} \ \ldots \ A$; $\{1, 2, 3\} \ \ldots \ B$; $12 \ \ldots \ A$.

INDICE

Outil : la nature de l'objet de gauche. Un nombre appelle $\in$ ou $\notin$; un ensemble appelle $\subset$ ou $\not\subset$.

CORRIGÉ

Le nombre -3. On a $(-3)^2 = 9 < 10$, donc $-3 \in A$.

L'ensemble $\{0, 4\}$. Son élément 4 n'appartient pas à A, car $4^2 = 16 \geq 10$. Donc $\{0, 4\} \not\subset A$.

L'ensemble $\{1, 2, 3\}$. Ses trois éléments divisent 12, donc $\{1, 2, 3\} \subset B$.

Le nombre 12. On a $12^2 = 144 \geq 10$, donc $12 \notin A$.

3.

A-t-on $A \subset B$? A-t-on $\{n \in A \,/\, n > 0\} \subset B$? Justifier.

INDICE

Outil : pour réfuter une inclusion, un seul élément bien choisi suffit.

CORRIGÉ

Première inclusion. On a $-1 \in A$, mais $-1 \notin \mathbb{N}$, donc $-1 \notin B$. Ainsi $A \not\subset B$.

Seconde inclusion. D'après 1., les éléments strictement positifs de A sont 1, 2 et 3 :

$$\begin{aligned}&\{n \in A \,/\, n > 0\}\\&= \{1, 2, 3\}.\end{aligned}$$

Chacun de ces trois entiers divise 12, donc appartient à B.

Conclusion. $A \not\subset B$, mais $\{n \in A \,/\, n > 0\} \subset B$.

Exercice 2

Opérations dans un ensemble fini

On pose :

$$E = \{n \in \mathbb{N} \,/\, n \leq 11\},$$
$$A = \{n \in E \,/\, 4 \text{ divise } n\},$$
$$B = \{n \in E \,/\, n \geq 7\}.$$

Les complémentaires sont pris dans E.

1.

Écrire A et B en extension.

INDICE

Outil : teste chaque entier de 0 à 11 ; 0 est un multiple de 4.

CORRIGÉ

Ensemble A. Les multiples de 4 compris entre 0 et 11 sont $0 = 4 \times 0$, 4 et 8 ; le suivant, 12, dépasse 11.

Ensemble B. Les éléments de E supérieurs ou égaux à 7 sont 7, 8, 9, 10 et 11.

Conclusion. $A = \{0, 4, 8\}$ et $B = \{7, 8, 9, 10, 11\}$.

2.

Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ et $B \setminus A$.

INDICE

Outil : les définitions de l'intersection, de la réunion et de la différence (F02) : « et » pour l'intersection, « ou » pour la réunion, « et non » pour la différence.

CORRIGÉ

Intersection. Seul 8 appartient à la fois à A et à B : $A \cap B = \{8\}$.

Réunion. On réunit les éléments des deux ensembles : $A \cup B = \{0, 4, 7, 8, 9, 10, 11\}$.

Différences. Les éléments de A qui ne sont pas dans B sont 0 et 4 : $A \setminus B = \{0, 4\}$.

Les éléments de B qui ne sont pas dans A sont 7, 9, 10 et 11 : $B \setminus A = \{7, 9, 10, 11\}$.

3.

Déterminer $\overline{A \cup B}$. Calculer ensuite $\overline{A}$, $\overline{B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$, puis comparer.

INDICE

Outil : le complémentaire dans E, puis les lois de Morgan (F04).

CORRIGÉ

Complémentaire de la réunion. E contient les douze entiers de 0 à 11. Ceux qui manquent à $A \cup B$ sont 1, 2, 3, 5 et 6 : $\overline{A \cup B} = \{1, 2, 3, 5, 6\}$.

Complémentaires de A et de B. On retire de E les éléments de A, puis ceux de B :

$\overline{A} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11\}$ et $\overline{B} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Leurs éléments communs sont 1, 2, 3, 5 et 6 : $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1, 2, 3, 5, 6\}$.

Conclusion. Les deux ensembles sont égaux, comme l'annonce la loi de Morgan (F04) :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Exercice 3

Opérations sur des intervalles

Dans $\mathbb{R}$, on pose $I = [-2, 5[$, $J =]1, 8]$ et $K =]5, 9]$. Les complémentaires sont pris dans $\mathbb{R}$.

1.

Déterminer $I \cap J$, $I \cup J$, $I \setminus J$ et $J \setminus I$.

INDICE

Outil : traduis chaque appartenance par des inégalités, puis examine chaque borne.

CORRIGÉ

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Intersection. $x \in I \cap J$ équivaut à : $-2 \leq x < 5$ et $1 < x \leq 8$, soit à $1 < x < 5$. Donc $I \cap J =]1, 5[$.

Réunion. I et J sont inclus dans $[-2, 8]$. Réciproquement, soit $x \in [-2, 8]$:

- si $x < 5$, alors $x \in I$;
- si $x \geq 5$, alors $1 < x \leq 8$, donc $x \in J$.

Par double inclusion, $I \cup J = [-2, 8]$.

Différence $I \setminus J$. $x \in I \setminus J$ équivaut à : $-2 \leq x < 5$ et ($x \leq 1$ ou $x > 8$). Cela équivaut à $-2 \leq x \leq 1$: $I \setminus J = [-2, 1]$.

Différence $J \setminus I$. $x \in J \setminus I$ équivaut à : $1 < x \leq 8$ et ($x < -2$ ou $x \geq 5$). Cela équivaut à $5 \leq x \leq 8$: $J \setminus I = [5, 8]$.

2.

Déterminer $\overline{I}$. Les intervalles I et K sont-ils disjoints ?

INDICE

Outil : un réel n'est pas dans I s'il est trop petit ou trop grand. Pour $I \cap K$, examine la borne commune 5.

CORRIGÉ

Complémentaire. Un réel x n'appartient pas à I si et seulement si $x < -2$ ou $x \geq 5$. Donc :

$\overline{I} =]-\infty, -2[\cup [5, +\infty[$.

Intersection avec K. Un réel de $I \cap K$ vérifierait $x < 5$ et $x > 5$: c'est impossible. Donc $I \cap K = \varnothing$. Le réel 5, borne commune, n'appartient à aucun des deux.

Conclusion. I et K sont disjoints.

3.

Montrer que $I \cap J = \{x \in \mathbb{R} \,/\, |x-3| < 2\}$.

INDICE

Rappel : pour $r > 0$, $|x-c| < r$ équivaut à $c - r < x < c + r$. **Outil :** des équivalences successives, pour un réel x quelconque, puis la question 1.

CORRIGÉ

Soit x un réel. Comme $2 > 0$:

$$\begin{aligned} & |x-3| < 2 \\ \Leftrightarrow\ & -2 < x-3 < 2 \\ \Leftrightarrow\ & 1 < x < 5. \end{aligned}$$

Le second pas ajoute 3 aux trois membres, ce qui est réversible. D'après 1., $1 < x < 5$ équivaut à $x \in I \cap J$.

Conclusion. Les deux ensembles ont les mêmes éléments, donc $I \cap J = \{x \in \mathbb{R} \,/\, |x-3| < 2\}$.

Exercice 4

L'ensemble des parties d'un ensemble à trois éléments

On pose $E = \{0, 1, 2\}$.

1.

Écrire l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ en extension.

INDICE

Outil : range les parties selon leur nombre d'éléments, sans oublier $\varnothing$ ni E.

CORRIGÉ

On range les parties de E selon leur nombre d'éléments :

- la partie vide $\varnothing$;
- les parties à un élément : $\{0\}, \{1\}, \{2\}$;
- les parties à deux éléments : $\{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}$;
- enfin E lui-même.

Conclusion. L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ a huit éléments :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(E) = \{&\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\},\\ &\{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\},\\ &\{0, 1, 2\}\}.\end{aligned}$$

2.

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse, en justifiant.

- (a) $1 \in \mathcal{P}(E)$.
- (b) $\{1\} \in \mathcal{P}(E)$.
- (c) $\{1\} \subset \mathcal{P}(E)$.
- (d) $\{\varnothing\} \subset \mathcal{P}(E)$.
- (e) $\varnothing \in \mathcal{P}(E)$.

INDICE

Outil : la définition de l'ensemble des parties (F05) : les éléments de $\mathcal{P}(E)$ sont les parties de E. Pour une inclusion dans $\mathcal{P}(E)$, chaque élément de l'ensemble de gauche doit être une partie de E.

CORRIGÉ

D'après la définition de l'ensemble des parties (F05), $X \in \mathcal{P}(E)$ signifie $X \subset E$.

(a) Faux : 1 est un nombre, pas une partie de E.

(b) Vrai : $\{1\} \subset E$, donc $\{1\} \in \mathcal{P}(E)$.

(c) Faux : l'unique élément de $\{1\}$ est le nombre 1, et $1 \notin \mathcal{P}(E)$ d'après (a).

(d) Vrai : l'unique élément de $\{\varnothing\}$ est $\varnothing$, et $\varnothing \in \mathcal{P}(E)$ d'après (e).

(e) Vrai : $\varnothing \subset E$, donc $\varnothing \in \mathcal{P}(E)$.

3.

Écrire en extension l'ensemble $\{X \in \mathcal{P}(E) \,/\, 0 \in X\}$.

INDICE

Outil : la liste de 1., dont tu gardes les parties qui contiennent le nombre 0.

CORRIGÉ

Parmi les huit parties de E listées en 1., celles qui contiennent 0 sont $\{0\}$, $\{0,1\}$, $\{0,2\}$ et $\{0,1,2\}$.

Conclusion.

$$\begin{aligned}&\{X \in \mathcal{P}(E) \,/\, 0 \in X\}\\ &= \{\{0\}, \{0,1\},\\ &\qquad \{0,2\}, \{0,1,2\}\}.\end{aligned}$$

Exercice 5

Produits cartésiens et couples

On pose $A = \{-1, 2\}$ et $B = \{0, 1, 3\}$.

1.

Écrire $A \times B$ en extension.

INDICE

Outil : la définition du produit : première composante dans A, seconde composante dans B.

CORRIGÉ

Un élément de $A \times B$ est un couple dont la première composante est dans A et la seconde dans B. On associe -1, puis 2, à chacun des trois éléments de B.

Conclusion.

$$A \times B = \{(-1, 0), (-1, 1), (-1, 3), (2, 0), (2, 1), (2, 3)\}.$$

2.

Le couple $(1, -1)$ appartient-il à $A \times B$? à $B \times A$? A-t-on $A \times B = B \times A$?

INDICE

Outil : un couple se teste composante par composante, chacune dans son ensemble.

CORRIGÉ

Dans $A \times B$. La première composante 1 n'appartient pas à A : $(1, -1) \notin A \times B$.

Dans $B \times A$. La première composante doit être dans B et la seconde dans A. Or $1 \in B$ et $-1 \in A$: $(1, -1) \in B \times A$.

Conclusion. Ce couple appartient à $B \times A$ mais pas à $A \times B$. Donc $A \times B \neq B \times A$.

3.

Dans $\mathbb{R}^2$, on pose $P = [0,2] \times [1,3]$ et $Q = [1,4] \times [0,2]$.

Écrire $P \cap Q$ comme un produit de deux intervalles. Le couple $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ appartient-il à $P \cap Q$?

INDICE

Outil : l'intersection de deux produits cartésiens (F06) se calcule composante par composante.

CORRIGÉ

Calcul de $P \cap Q$. D'après l'intersection de deux produits cartésiens (F06) :

$$\begin{aligned} &P \cap Q \\ &= ([0,2] \cap [1,4]) \\ &\quad \times ([1,3] \cap [0,2]). \end{aligned}$$

Or $[0,2] \cap [1,4] = [1,2]$ et $[1,3] \cap [0,2] = [1,2]$. Donc $P \cap Q = [1,2] \times [1,2]$.

Le couple. Sa seconde composante $\frac{5}{2}$ est strictement supérieure à 2, donc n'appartient pas à $[1,2]$.

Conclusion. $P \cap Q = [1,2] \times [1,2]$, et $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) \notin P \cap Q$.

Exercice 6

Images et images réciproques par un tableau

On pose $E = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ et $F = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. On considère :

$$f : E \to F, \quad x \mapsto |x - 1|.$$

1.

Dresser le tableau des images des éléments de E. Justifier que f est bien une application de E dans F.

INDICE

Outil : calcule les six valeurs, puis vérifie que chacune appartient à F.

CORRIGÉ

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	3	2	1	0	1	2

Chaque élément de E a une seule image, et chacune de ces images appartient à F.

Conclusion. f est bien une application de E dans F.

2.

Déterminer $f(\{-1, 0, 3\})$, $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(\{2, 3\})$ et $f^{-1}(\{4, 5\})$.

INDICE

Outil : les définitions de l'image directe et de l'image réciproque (F08), lues dans le tableau.

CORRIGÉ

Image directe. $f(-1) = 2$, $f(0) = 1$ et $f(3) = 2$, donc $f(\{-1, 0, 3\}) = \{1, 2\}$.

Images réciproques. On lit dans le tableau les éléments de E dont l'image est dans la partie donnée (F08).

- Les éléments d'image 1 sont 0 et 2 : $f^{-1}(\{1\}) = \{0, 2\}$.
- Les éléments d'image 2 ou 3 sont -2, -1 et 3 : $f^{-1}(\{2, 3\}) = \{-2, -1, 3\}$.
- Aucune image ne vaut 4 ou 5 : $f^{-1}(\{4, 5\}) = \varnothing$.

3.

L'application f est-elle injective ? surjective ? Justifier à l'aide du tableau.

INDICE

Outil : les définitions de l'injectivité et de la surjectivité (F11), lues dans le tableau.

CORRIGÉ

Injectivité. On a $0 \neq 2$ et $f(0) = f(2) = 1$: deux éléments distincts ont la même image.

Surjectivité. L'élément 4 de F n'apparaît pas dans la ligne des images : il n'a pas d'antécédent. On le savait déjà, car $f^{-1}(\{4, 5\}) = \varnothing$.

Conclusion. f n'est ni injective, ni surjective.

Exercice 7

Image d'un intervalle par une application affine

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 3 - 2x$.

1.

Déterminer $g^{-1}(\{7\})$ et $g^{-1}([0, +\infty[)$.

INDICE

Outil : la définition de l'image réciproque (F08) : $x \in g^{-1}(B)$ équivaut à $g(x) \in B$. Attention au signe du coefficient de x.

CORRIGÉ

Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la définition de l'image réciproque (F08), pour toute partie B de $\mathbb{R}$, $x \in g^{-1}(B)$ équivaut à $g(x) \in B$.

Image réciproque de $\{7\}$.

$$\begin{aligned} 3 - 2x = 7 &\Leftrightarrow -2x = 4 \\ &\Leftrightarrow x = -2. \end{aligned}$$

Donc $g^{-1}(\{7\}) = \{-2\}$.

Image réciproque de $[0, +\infty[$. Diviser par $2 > 0$ conserve l'ordre :

$$\begin{aligned} 3 - 2x \geq 0 &\Leftrightarrow 2x \leq 3 \\ &\Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Donc $g^{-1}([0, +\infty[) = \left]-\infty, \frac{3}{2}\right]$.

2.

Montrer que $g([-1, 2]) \subset [-1, 5]$, puis que $[-1, 5] \subset g([-1, 2])$.

INDICE

Outil : pour la première inclusion, un encadrement de $3 - 2x$; pour la seconde, un antécédent explicite, à vérifier dans $[-1, 2]$.

CORRIGÉ

Première inclusion. Soit $x \in [-1, 2]$. On multiplie l'encadrement $-1 \leq x \leq 2$ par $-2 < 0$, ce qui inverse l'ordre :

$$-4 \leq -2x \leq 2.$$

En ajoutant 3, on obtient $-1 \leq 3 - 2x \leq 5$. Donc $g(x) \in [-1, 5]$.

Seconde inclusion. Soit $y \in [-1, 5]$. Posons $x = \dfrac{3 - y}{2}$.

Comme $-2 \leq 3 - y \leq 4$, on a $-1 \leq x \leq 2$. De plus, $g(x) = 3 - (3 - y) = y$. Donc y a un antécédent dans $[-1, 2]$: $y \in g([-1, 2])$.

Conclusion. $g([-1, 2]) \subset [-1, 5]$ et $[-1, 5] \subset g([-1, 2])$. Par double inclusion, $g([-1, 2]) = [-1, 5]$.

3.

On note $r = g_{|[0,+\infty[}$ la restriction de g à $[0,+\infty[$. Déterminer $r^{-1}(\{7\})$ et $r([0,+\infty[)$.

INDICE

Outil : un antécédent par r doit appartenir à l'ensemble de départ de r.

CORRIGÉ

Image réciproque. Pour $x \in [0,+\infty[$, $r(x) = g(x)$, donc $r(x) = 7$ équivaut à $x = -2$ d'après 1. Or $-2 \notin [0,+\infty[$.

Donc $r^{-1}(\{7\}) = \varnothing$, alors que $g^{-1}(\{7\}) = \{-2\}$.

Image directe : première inclusion. Soit $x \geq 0$. Alors $-2x \leq 0$, donc $r(x) = 3 - 2x \leq 3$.

Image directe : seconde inclusion. Soit $y \leq 3$. Le réel $x = \dfrac{3-y}{2}$ vérifie $x \geq 0$ et $r(x) = y$.

Conclusion. $r^{-1}(\{7\}) = \varnothing$ et, par double inclusion, $r([0,+\infty[) =]-\infty, 3]$.

Exercice 8

Une même formule sur les entiers et sur les rationnels

Soit $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \mapsto 5n - 2$.

1.

Montrer que h est injective.

INDICE

Outil : la méthode de l'injectivité, à partir de « Soit n et m deux entiers tels que $h(n) = h(m)$ ».

CORRIGÉ

Soit n et m deux entiers tels que $h(n) = h(m)$, c'est-à-dire $5n - 2 = 5m - 2$.

Alors $5n = 5m$, puis $n = m$, car $5 \neq 0$.

Conclusion. D'après la définition de l'injectivité (F11), h est injective.

2.

Montrer que h n'est pas surjective.

INDICE

Outil : un entier y pour lequel la solution de $5n - 2 = y$ n'est pas entière.

CORRIGÉ

Prenons $y_0 = 0 \in \mathbb{Z}$. Pour un réel n, $5n - 2 = 0$ équivaut à $n = \dfrac{2}{5}$.

Or $0 < \dfrac{2}{5} < 1$: ce n'est pas un entier. Aucun $n \in \mathbb{Z}$ ne vérifie $h(n) = 0$.

Conclusion. L'entier 0 n'a pas d'antécédent par h : h n'est pas surjective.

3.

On considère $k : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, x \mapsto 5x - 2$. Montrer que k est surjective.

INDICE

Outil : la méthode de la surjectivité : la solution de $5x - 2 = y$ doit être un rationnel.

CORRIGÉ

Soit $y \in \mathbb{Q}$. Posons $x = \dfrac{y + 2}{5}$.

C'est un rationnel, comme quotient d'un rationnel par un entier non nul. De plus, $k(x) = (y + 2) - 2 = y$.

Conclusion. Tout rationnel a un antécédent dans $\mathbb{Q}$: k est surjective.

Remarque. La formule est la même qu'en 2. ; seuls les ensembles ont changé. L'antécédent $\dfrac{y + 2}{5}$ n'est pas toujours entier, mais il est toujours rationnel : il appartient à l'ensemble de départ $\mathbb{Q}$. La surjectivité dépend des ensembles (W05).

Exercice 9

La somme des composantes d'un couple

Soit $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$.

1.

Calculer $s(2, -2)$ et $s(-1, 1)$. L'application s est-elle injective ?

INDICE

Outil : une application sur $\mathbb{R}^2$ reçoit un couple (x, y) : calcule $s(2, -2)$ en remplaçant x par 2 et y par -2. Deux couples sont égaux s'ils ont les mêmes composantes, dans le même ordre (F05).

CORRIGÉ

Calculs. $s(2, -2) = 2 + (-2) = 0$ et $s(-1, 1) = -1 + 1 = 0$.

Injectivité. Les couples $(2, -2)$ et $(-1, 1)$ sont distincts, car leurs premières composantes 2 et -1 diffèrent. Ils ont pourtant la même image.

Conclusion. s n'est pas injective.

2.

Montrer que s est surjective.

INDICE

Outil : soit $t \in \mathbb{R}$. Il suffit d'exhiber un couple (x, y) tel que $x + y = t$: choisis-en un qui s'écrit à l'aide de t.

CORRIGÉ

Soit $t \in \mathbb{R}$. Le couple $(t, 0)$ appartient à $\mathbb{R}^2$, et $s(t, 0) = t + 0 = t$.

Conclusion. Tout réel a un antécédent par s : s est surjective.

3.

Déterminer $s^{-1}(\{0\})$ et $s^{-1}(\{1\})$.

INDICE

Outil : la définition de l'image réciproque (F08) : $(x, y) \in s^{-1}(\{1\})$ équivaut à $x + y = 1$.

CORRIGÉ

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Image réciproque de $\{0\}$. $s(x, y) = 0$ équivaut à $y = -x$. Donc :

$$\begin{aligned} &s^{-1}(\{0\}) \\ &= \{(x, -x) \,/\, x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Image réciproque de $\{1\}$. $s(x, y) = 1$ équivaut à $y = 1 - x$. Donc :

$$\begin{aligned} &s^{-1}(\{1\}) \\ &= \{(x, 1 - x) \,/\, x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Par exemple, $(3, -2)$ en fait partie.

Exercice 10

Composer dans les deux sens

On considère les applications :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to [1, +\infty[\\ x &\mapsto 1 + |x|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : [1, +\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x - 1}. \end{aligned}$$

1.

Justifier que f et g sont bien définies, puis que les composées $g \circ f$ et $f \circ g$ existent.

INDICE

Outil : la définition de la composée (F13) : l'ensemble d'arrivée de la première application doit être l'ensemble de départ de la seconde.

CORRIGÉ

Application f. Pour tout réel x, $|x| \geq 0$, donc $1 + |x| \geq 1$: f est bien à valeurs dans $[1, +\infty[$.

Application g. Pour $x \geq 1$, $x - 1 \geq 0$, donc $\sqrt{x - 1}$ existe : g est bien définie.

Composée $g \circ f$. L'ensemble d'arrivée de f, $[1, +\infty[$, est l'ensemble de départ de g. D'après la définition de la composée (F13), $g \circ f$ existe, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Composée $f \circ g$. L'ensemble d'arrivée de g, $\mathbb{R}$, est l'ensemble de départ de f : $f \circ g$ existe, de $[1, +\infty[$ dans $[1, +\infty[$.

2.

Calculer $(g \circ f)(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$, puis $(f \circ g)(x)$ pour $x \in [1, +\infty[$.

INDICE

Outil : $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$; une racine carrée est positive.

CORRIGÉ

Calcul de $(g \circ f)(x)$. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(1 + |x|) \\ &= \sqrt{(1 + |x|) - 1} \\ &= \sqrt{|x|}. \end{aligned}$$

Calcul de $(f \circ g)(x)$. Soit $x \geq 1$. Une racine carrée est positive, donc $|\sqrt{x - 1}| = \sqrt{x - 1}$:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= 1 + |\sqrt{x - 1}| \\ &= 1 + \sqrt{x - 1}. \end{aligned}$$

3.

Calculer $(g \circ f)(5)$ et $(f \circ g)(5)$. Les applications $g \circ f$ et $f \circ g$ sont-elles égales ?

INDICE

Outil : la question 2, et les conditions d'égalité de deux applications (F07).

CORRIGÉ

Valeurs en 5. D'après 2., $(g \circ f)(5) = \sqrt{5}$ et $(f \circ g)(5) = 1 + \sqrt{4} = 3$.

Comme $(\sqrt{5})^2 = 5$ et $3^2 = 9$, ces deux nombres positifs sont différents.

Conclusion. $g \circ f$ et $f \circ g$ ne sont pas égales : elles n'ont pas la même valeur en 5. Elles n'ont d'ailleurs pas le même ensemble de départ, $\mathbb{R}$ pour $g \circ f$ et $[1, +\infty[$ pour $f \circ g$, alors que l'égalité de deux applications (F07) exige les mêmes ensembles de départ et d'arrivée.