BURHAN

Ensembles et applications

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/ensembles-et-applications/cours

Chapitre	Semestre
Ensembles et applications	Semestre 1

Pourquoi parler d'ensembles et d'applications

Prends la règle « à un nombre, associer son carré ». Avec 3, elle donne 9. Avec -3, elle donne aussi 9.

Mais si l'on ne travaille qu'avec des nombres positifs, -3 n'est plus permis au départ. Une question se pose : combien de nombres de départ donnent 9 ?

Devine : Une prédiction

Combien de nombres de départ ont pour carré 9 ?

A. Il y en a toujours deux : 3 et -3.

Faux.

C'est vrai si tous les réels sont permis au départ, pas si l'on n'accepte que les positifs.

B. Un seul : le nombre 81.

Faux.

81 est le carré de 9 : c'est l'image de 9, pas un nombre dont le carré vaut 9.

C. Cela dépend des nombres de départ permis.

Juste.

Juste : avec tous les réels, 3 et -3 conviennent ; avec les seuls positifs, 3 seulement.

D. Il n'y en a toujours qu'un : 3.

Faux.

$(-3)^2 = 9$ aussi : si -3 est permis au départ, il convient.

Correction

Si tous les réels sont permis au départ, 3 et -3 conviennent, car $3^2 = (-3)^2 = 9$. Avec les seuls réels positifs, seul 3 convient.

La formule ne suffit donc pas : il faut dire d'où partent les nombres, et où ils arrivent. C'est l'idée d'**application**.

Dans ce chapitre, tu apprends la langue des ensembles : appartenir, être inclus, réunir, croiser, prendre le complémentaire.

Puis tu étudies les applications : images, antécédents, injections, surjections, bijections, composées.

Surtout, tu rédiges tes premières vraies preuves sur ces objets. Tu y emploies les raisonnements du chapitre « Notions de logique ».

Ensembles, appartenance, inclusion

Une liste ou une propriété

En clair. Les nombres 2, 4 et 6 forment un groupe : on l'écrit $\{2, 4, 6\}$. On peut aussi le décrire par une propriété : « les entiers pairs entre 1 et 6 ».

Dans les deux cas, on sait dire si un objet en fait partie. C'est tout ce qu'on demande à un **ensemble**.

On note $x \in E$ quand x est un élément de E, et $A \subset E$ quand tous les éléments de A sont dans E. L'activité suivante te le fait tester.

Devine : Élément ou partie ?

Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Laquelle de ces écritures est juste ?

A. $2 \subset E$

Faux.
2 est un nombre, pas un ensemble : on écrit $2 \in E$.

B. $7 \in E$

Faux.
7 ne figure pas dans la liste : $7 \notin E$.

C. $\{2, 4\} \subset E$

Juste.
Juste : 2 et 4 sont deux éléments de E.

D. $\{2\} \in E$

Faux.
Les éléments de E sont des nombres ; $\{2\}$ est un ensemble. On écrit $\{2\} \subset E$.

Correction
On écrit $x \in E$ pour un élément, et $A \subset E$ pour un ensemble dont tous les éléments sont dans E.
Ici, $2 \in E$, $7 \notin E$, $\{2\} \subset E$ et $\{2, 4\} \subset E$.

Petit rappel. Un intervalle est un ensemble de réels. Par exemple, $[1, 3]$ contient les réels x tels que $1 \leq x \leq 3$.

Un crochet tourné vers l'extérieur exclut la borne : $]1, 3]$ ne contient pas 1. Du côté de l'infini, le crochet est toujours ouvert : $[2, +\infty[$.

Petit rappel. La valeur absolue $|x|$ est la distance de x à 0. Pour $a \geq 0$: $|x| \leq a$ équivaut à $-a \leq x \leq a$.

Plus généralement, pour $r \geq 0$, $|x - c| \leq r$ équivaut à $c - r \leq x \leq c + r$; de même avec des inégalités strictes. Par exemple, $|x - 3| \leq 1$ équivaut à $2 \leq x \leq 4$.

Appartenance, inclusion, égalité

Définition : Ensemble, appartenance, inclusion, égalité

Un **ensemble** est une collection d'objets, appelés ses **éléments**. On écrit $x \in E$ lorsque x est un élément de l'ensemble E, et $x \notin E$ sinon. L'**ensemble vide**, noté $\varnothing$, n'a aucun élément.

Soit A et B deux ensembles.

- A est **inclus** dans B, noté $A \subset B$, si tout élément de A est un élément de B : $\forall x,\ (x \in A \Rightarrow x \in B)$. On dit aussi que A est une **partie** de B.
- A et B sont **égaux**, noté $A = B$, s'ils ont les mêmes éléments, c'est-à-dire si $(A \subset B \text{ et } B \subset A)$.

Exemple : en extension, en compréhension

- En **extension**, on liste les éléments : $A = \{2, 4, 6\}$.
- En **compréhension**, on donne une propriété : $A = \{n \in E \,/\, n \text{ est pair}\}$, avec $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- De même, $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 = 1\} = \{-1, 1\}$ et $\{x \in \mathbb{R} \,/\, 1 \leq x \leq 3\} = [1, 3]$.
- $\{1, 2, 3\} \subset [1, 3]$, mais ces ensembles ne sont pas égaux : $2{,}5 \in [1, 3]$ et $2{,}5 \notin \{1, 2, 3\}$.

Vérifie : L'ensemble vide

Soit A un ensemble. Pourquoi a-t-on $\varnothing \subset A$?

A. Parce que $\varnothing$ est un élément de A.
Faux.
Être inclus n'est pas appartenir : $\varnothing \subset A$ ne dit pas $\varnothing \in A$.

B. Par convention, sans raison mathématique.
Faux.
Il y a une raison : la définition de l'inclusion, lue avec la règle de l'implication.

C. Ce n'est vrai que si A n'est pas vide.
Faux.
C'est vrai aussi pour $A = \varnothing$: tout ensemble est inclus dans lui-même.

D. Pour tout x, « $x \in \varnothing$ » est fausse : l'implication est vraie.
Juste.
Juste : une implication dont l'hypothèse est fausse est vraie.

Correction
Par définition, $\varnothing \subset A$ signifie :

$$\forall x,\ (x \in \varnothing \Rightarrow x \in A).$$

Pour tout x, l'hypothèse $x \in \varnothing$ est fausse, car $\varnothing$ n'a aucun élément. Or une implication dont l'hypothèse est fausse est vraie.

Donc $\varnothing \subset A$, pour tout ensemble A.

Démontrer une inclusion

Méthode : démontrer une inclusion

1. **Introduire** un élément quelconque : « Soit $x \in A$. » Ce x est fixé, mais rien d'autre n'est supposé sur lui.
2. **Traduire** $x \in A$ par la propriété qui définit A.
3. **Déduire**, pas à pas, que x vérifie la propriété qui définit B.
4. **Conclure** : « Donc $x \in B$. Ainsi, $A \subset B$. »

Pour **réfuter** $A \subset B$, il suffit d'un élément de A qui n'est pas dans B. On écrit alors $A \not\subset B$.

Exemple : Exemple guidé : une inclusion

Énoncé. Soit $A = [2, +\infty[$ et $B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 \geq 4\}$. Montrons que $A \subset B$.

Rédaction (raisonnement direct : on part de $x \in A$ et on arrive à $x \in B$). Soit $x \in A$: $x \geq 2$, donc $x > 0$.

On multiplie les deux membres de $x \geq 2$ par le réel $x > 0$, puis on utilise $2x \geq 4$:

$$\begin{aligned} x^2 &\geq 2x \\ &\geq 4. \end{aligned}$$

Donc $x \in B$. Ainsi, $A \subset B$.

Et l'autre sens ? $-3 \in B$, car $(-3)^2 = 9$ et $9 \geq 4$. Mais $-3 \notin A$. Donc $B \not\subset A$: les ensembles ne sont pas égaux.

Attention : appartenir n'est pas être inclus

✗ « $\{2\} \in \{1, 2\}$ » ou « $2 \subset \{1, 2\}$ ».

✓ $2 \in \{1, 2\}$: le nombre 2 est un **élément**. $\{2\} \subset \{1, 2\}$: l'ensemble $\{2\}$ est une **partie**. Avant d'écrire, demande-toi : à gauche, un élément ou un ensemble ?

À toi

Vérifie : Une inclusion d'intervalles

Laquelle de ces inclusions est vraie ?

A. $[0,2] \subset]0,3]$

Faux.

$0 \in [0,2]$, mais $0 \notin]0,3]$.

B. $]1,2[\subset [1,2]$

Juste.

Juste : si $1 < x < 2$, alors $1 \leq x \leq 2$.

C. $[1,2] \subset \{1,2\}$

Faux.

$1{,}5 \in [1,2]$, mais $1{,}5 \notin \{1,2\}$.

D. $[2,+\infty[\subset]-\infty,5]$

Faux.

$6 \in [2,+\infty[$, mais $6 \notin]-\infty,5]$.

Correction

Soit $x \in]1,2[$: $1 < x < 2$, donc $1 \leq x \leq 2$, et $x \in [1,2]$. Ainsi, $]1,2[\subset [1,2]$.

Pour les trois autres, un seul élément suffit à réfuter l'inclusion : 0, $1{,}5$, puis 6.

À toi : Inclusion et égalité

Soit $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 \leq 1\}$ et $B = [-1,2]$. Montre que $A \subset B$, puis que $A \neq B$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Commence par « Soit $x \in A$ », et écris ce que cela signifie.

Indice 2

De $x^2 \leq 1$, déduis $|x| \leq 1$: deux réels positifs sont rangés comme leurs carrés.

Indice 3

Point délicat : pour $A \neq B$, un seul élément de B qui n'est pas dans A suffit.

Réponse

Inclusion. Soit $x \in A$: $x^2 \leq 1$, c'est-à-dire $|x|^2 \leq 1^2$. Deux réels positifs sont rangés comme leurs carrés : donc $|x| \leq 1$, puis $-1 \leq x \leq 1$.

Comme $1 \leq 2$, on a $-1 \leq x \leq 2$: $x \in B$. Donc $A \subset B$.

Les ensembles diffèrent. $2 \in B$ et $2^2 = 4 > 1$, donc $2 \notin A$. Ainsi $B \not\subset A$, et $A \neq B$.

Conclusion. $A \subset B$ et $A \neq B$. En fait, $A = [-1,1]$.

Intersection, réunion, différence, complémentaire

« Et », « ou », « sauf »

Dans un ensemble E, deux parties A et B en fabriquent d'autres.

- Les éléments communs : « dans A **et** dans B ».
- Les éléments de l'une ou de l'autre : « dans A **ou** dans B », avec un « ou » inclusif.
- Les éléments de A, **sauf** ceux de B.

Chaque opération traduit un connecteur du chapitre « Notions de logique ».

Devine : Pair ou multiple de 3

Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Quels éléments de E sont pairs **ou** multiples de 3 ?

A. $\{6\}$

Faux.
Ce sont les éléments pairs **et** multiples de 3 : le « ou » en accepte davantage.

B. $\{2, 3, 4\}$

Faux.
6 est pair et multiple de 3 : le « ou » mathématique l'accepte.

C. $\{1, 5\}$

Faux.
Ce sont les éléments qui ne sont ni pairs, ni multiples de 3.

D. $\{2, 3, 4, 6\}$

Juste.
Juste : chacun est pair, ou multiple de 3, ou les deux.

Correction
Les éléments pairs de E forment $\{2, 4, 6\}$; les multiples de 3 forment $\{3, 6\}$.

Un élément convient s'il est dans l'un **ou** dans l'autre : $\{2, 3, 4, 6\}$. Le nombre 6, qui est dans les deux, est compris.

Quatre opérations

Définition : Intersection, réunion, différence, complémentaire

Soit E un ensemble, et A et B deux parties de E.

- L'**intersection** de A et B est $A \cap B = \{x \in E \,/\, x \in A \text{ et } x \in B\}$.
- La **réunion** de A et B est $A \cup B = \{x \in E \,/\, x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
- La **différence** de A et B est $A \setminus B = \{x \in E \,/\, x \in A \text{ et } x \notin B\}$.

- Le **complémentaire** de A dans E est $\overline{A} = E \setminus A$.

On dit que A et B sont **disjointes** lorsque $A \cap B = \varnothing$.

Exemple : dans un ensemble fini

Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{2, 4, 6\}$.

- $A \cap B = \{2, 4\}$ et $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.
- $A \setminus B = \{1, 3\}$, mais $B \setminus A = \{6\}$: l'ordre compte.
- Dans E : $\overline{A} = \{5, 6\}$ et $\overline{B} = \{1, 3, 5\}$.

Vérifie : Le complémentaire dépend de l'ensemble

Soit $A = \{1, 2, 3, 4\}$, vu comme partie de $E' = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Quel est son complémentaire dans E' ?

A. $\{5, 6\}$
Faux.
6 n'est pas un élément de E' : il ne peut pas être dans un complémentaire pris dans E'.

B. $\{5\}$
Juste.
Juste : 5 est le seul élément de E' hors de A.

C. $\varnothing$
Faux.
5 est un élément de E' qui n'est pas dans A.

D. $\{1, 2, 3, 4\}$
Faux.
C'est A lui-même : le complémentaire contient ce qui n'est **pas** dans A.

Correction
Le complémentaire de A dans E' est $E' \setminus A = \{5\}$. Dans $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, il valait $\{5, 6\}$.

Un complémentaire se prend toujours **dans** un ensemble précis : on le nomme.

Sur des intervalles

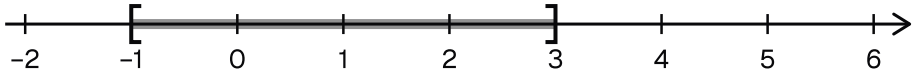
Exemple : avec des intervalles

Dans $\mathbb{R}$, soit $A = [-1, 3]$ et $B =]1, 5]$.

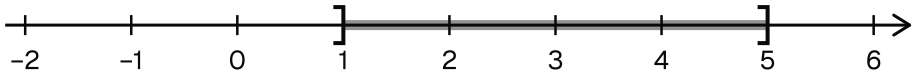
- $A \cap B =]1, 3]$: il faut $-1 \leq x \leq 3$ **et** $1 < x \leq 5$.

- $A \cup B = [-1, 5]$ et $A \setminus B = [-1, 1]$.
- Dans $\mathbb{R}$: $\overline{A} =]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[$.

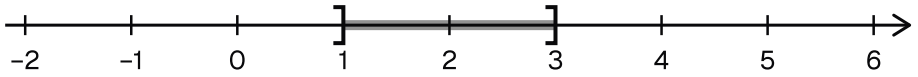
Sur une droite graduée, tu peux colorier chaque partie pour contrôler.



Première ligne : la partie A, de moins 1 à 3, bornes comprises.



Deuxième ligne : la partie B, qui part juste après 1 et s'arrête à 5, inclus.



Troisième ligne : ce que les deux traits précédents ont en commun, de 1 exclu à 3 inclus.

Deux parties sans élément commun sont dites **disjointes**. Par exemple, $\{1, 3, 5\}$ et $\{2, 4, 6\}$ sont disjointes : leur intersection est $\varnothing$. Une partie et son complémentaire sont toujours disjointes.

Vérifie : Disjointes ou non ?

Lesquelles de ces deux parties de $\mathbb{R}$ sont disjointes ?

A. $[0, 2]$ et $[2, 5]$

Faux.

2 appartient aux deux : leur intersection est $\{2\}$.

B. $[-1, 1]$ et $]0, 3]$

Faux.

$\frac{1}{2}$ appartient aux deux : leur intersection est $]0, 1]$.

C. $]0, 2[$ et $[2, 5]$

Juste.

Juste : un élément de $]0, 2[$ est < 2, un élément de $[2, 5]$ est ≥ 2.

D. $[1, 3]$ et $\{2\}$

Faux.

$2 \in [1, 3]$: l'intersection est $\{2\}$.

Correction

Si $x \in]0, 2[$, alors $x < 2$, donc $x \notin [2, 5]$. Ainsi $]0, 2[\cap [2, 5] = \varnothing$.

Dans les autres cas, on trouve un élément commun : 2, puis $\frac{1}{2}$, puis 2.

À toi : Opérations sur des intervalles

Dans $\mathbb{R}$, soit $A =]-2, 4]$ et $B = [0, 6[$. Détermine $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ et $B \setminus A$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Écris chaque appartenance avec des inégalités : $-2 < x \leq 4$, puis $0 \leq x < 6$.

Indice 2

Pour l'intersection, garde les deux conditions ; pour la réunion, l'une au moins.

Indice 3

Point délicat : regarde chaque borne. Est-elle atteinte ? Dans quel ensemble ?

Réponse

- $A \cap B = [0, 4]$: il faut $0 \leq x$ et $x \leq 4$.
- $A \cup B =]-2, 6[$.
- $A \setminus B =]-2, 0[$: dans A, avec $x < 0$.
- $B \setminus A =]4, 6[$: dans B, avec $x > 4$.

Distributivité et lois de Morgan

Deux calculs, un résultat

Devine : Deux chemins de calcul

Soit $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ et $C = \{3, 4\}$. Compare $A \cap (B \cup C)$ et $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.

A. Ils sont égaux : tous deux valent $\{2\}$.

Juste.

Juste : les deux calculs donnent $\{2\}$.

B. Le premier vaut $\{2, 3, 4\}$, le second $\{2\}$.

Faux.

$\{2, 3, 4\}$ est $B \cup C$: il reste à prendre l'intersection avec A.

C. Le second est vide, car $A \cap C = \varnothing$.

Faux.

$A \cap C$ est vide, mais $A \cap B = \{2\}$: la réunion vaut $\{2\}$.

D. Ils sont égaux ici, mais par hasard.

Faux.

L'égalité vaut pour toutes les parties : la preuve qui vient le montre.

Correction

$B \cup C = \{2, 3, 4\}$, donc $A \cap (B \cup C) = \{2\}$.

Et $A \cap B = \{2\}$, $A \cap C = \varnothing$, donc $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{2\}$.

Les deux calculs donnent le même ensemble. Ce n'est pas un hasard : c'est la **distributivité**.

L'intersection se distribue sur la réunion, comme la multiplication sur l'addition.

Pourquoi est-ce vrai ? On ne peut pas essayer toutes les parties. La preuve fixe donc un élément x de E, et sépare deux cas : $x \in A$ ou $x \notin A$. Dans chaque cas, x est dans les deux membres, ou dans aucun.

La distributivité

Propriété : Distributivité de l'intersection et de la réunion

Soit E un ensemble, et A, B et C trois parties de E. Alors :

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Démonstration

Étape 1. Soit $x \in E$. Raisonnons par disjonction des cas (chapitre « Notions de logique ») : $x \in A$ ou $x \notin A$.

Étape 2. Si $x \in A$: d'après F02, $x \in A \cap (B \cup C)$ équivaut à $(x \in B \text{ ou } x \in C)$, c'est-à-dire à $(x \in A \cap B \text{ ou } x \in A \cap C)$, donc à $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Si $x \notin A$: x n'appartient ni à $A \cap (B \cup C)$, ni à $A \cap B$, ni à $A \cap C$, donc ni à l'un ni à l'autre membre.

Étape 3. Si $x \in A$: x appartient à $A \cup (B \cap C)$, à $A \cup B$ et à $A \cup C$, donc aux deux membres. Si $x \notin A$: $x \in A \cup (B \cap C)$ équivaut à $(x \in B \text{ et } x \in C)$, c'est-à-dire à $(x \in A \cup B \text{ et } x \in A \cup C)$, donc à $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (F02).

Étape 4. Dans tous les cas, x appartient au premier membre si et seulement s'il appartient au second : les ensembles sont égaux (F01).

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour une égalité d'ensembles, on suit **un élément quelconque** x de E. On montre qu'il appartient au premier membre si et seulement s'il appartient au second. Ici, une disjonction des cas sur « $x \in A$ » rend chaque cas immédiat.

Vérifie : Quel raisonnement ?

Dans la preuve de la distributivité, quel raisonnement organise les étapes 2 et 3 ?

A. Un raisonnement par l'absurde.

Faux.
La preuve ne suppose jamais le contraire de ce qu'elle veut montrer.

B. Une disjonction des cas : $x \in A$ ou $x \notin A$.

Juste.
Juste : chaque étape traite les deux cas, qui couvrent tous les éléments de E.

C. Une vérification sur un exemple.

Faux.
Un exemple ne démontre pas une égalité vraie pour toutes les parties.

D. Un raisonnement par récurrence.

Faux.
Aucun entier ne sert d'indice dans cette preuve.

Correction
Les étapes 2 et 3 séparent deux cas : $x \in A$, puis $x \notin A$. Ces cas sont exhaustifs : tout élément de E est dans l'un d'eux. C'est une disjonction des cas, vue au chapitre « Notions de logique ».

Exemple : les deux égalités sur des parties

Soit $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4\}$ et $C = \{3, 5\}$.

Premier point. D'un côté :

$$\begin{aligned} & A \cap (B \cup C) \\ & = \{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4, 5\} \\ & = \{2, 3\}. \end{aligned}$$

De l'autre, $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{2\} \cup \{3\} = \{2, 3\}$.

Second point. D'un côté, $A \cup (B \cap C) = A \cup \varnothing = \{1, 2, 3\}$. De l'autre :

$$\begin{aligned} & (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ & = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{1, 2, 3, 5\} \\ & = \{1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

Complémentaire et lois de Morgan

Être dans $\overline{A}$, c'est ne pas être dans A : le complémentaire traduit la négation.

Pourquoi est-ce vrai ? Chaque égalité qui suit se ramène à une loi logique sur l'élément x : double négation, lois de Morgan, contraposée.

Propriété : Complémentaire et lois de Morgan

Soit E un ensemble, et A et B deux parties de E. Les complémentaires sont pris dans E. Alors :

- $\overline{\overline{A}} = A$ et $A \setminus B = A \cap \overline{B}$;
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (**lois de Morgan**) ;
- $A \subset B$ si et seulement si $\overline{B} \subset \overline{A}$.

Démonstration

Étape 1. Soit $x \in E$. D'après F02, $x \in \overline{A}$ équivaut à $x \notin A$. Donc $x \in \overline{\overline{A}}$ équivaut à la négation de $x \notin A$, c'est-à-dire à $x \in A$ (double négation, chapitre « Notions de logique »). De même, $x \in A \setminus B$ équivaut à $(x \in A \text{ et } x \in \overline{B})$, donc à $x \in A \cap \overline{B}$.

Étape 2. $x \in \overline{A \cap B}$ équivaut à la négation de $(x \in A \text{ et } x \in B)$, donc à $(x \notin A \text{ ou } x \notin B)$ par les lois de Morgan logiques, c'est-à-dire à $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. De même, $x \in \overline{A \cup B}$ équivaut à $(x \notin A \text{ et } x \notin B)$, c'est-à-dire à $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Chaque égalité vient de F01.

Étape 3. $A \subset B$ s'écrit $\forall x \in E,\ (x \in A \Rightarrow x \in B)$. Par contraposée, chaque implication équivaut à $(x \notin B \Rightarrow x \notin A)$: c'est $\overline{B} \subset \overline{A}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Traduis chaque opération en connecteur : $\overline{A}$ devient « non », $\cap$ devient « et », $\cup$ devient « ou ». Les lois de Morgan sur les ensembles viennent alors des lois de Morgan logiques. Et l'inclusion retournée par les complémentaires, c'est la contraposée.

Vérifie : Quelle loi logique ?

Quel résultat du chapitre « Notions de logique » justifie l'équivalence entre $A \subset B$ et $\overline{B} \subset \overline{A}$?

A. Les lois de Morgan.
Faux.
Elles transforment « et » en « ou » : elles servent pour l'intersection et la réunion.

B. La double négation.
Faux.
Elle donne $\overline{\overline{A}} = A$, pas l'inclusion des complémentaires.

C. La contraposée d'une implication.

Juste.
Juste : « $x \in A \Rightarrow x \in B$ » équivaut à « $x \notin B \Rightarrow x \notin A$ ».

D. La disjonction des cas.

Faux.
Aucun cas n'est séparé ici : l'équivalence vient d'une seule loi logique.

Correction
$A \subset B$ s'écrit : pour tout $x \in E$,

$$x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Sa contraposée est $x \notin B \Rightarrow x \notin A$, c'est-à-dire $x \in \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A}$. C'est exactement $\overline{B} \subset \overline{A}$.

Exemple : les lois de Morgan sur des parties

Dans $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, soit $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{2, 4, 6\}$. Alors $\overline{A} = \{5, 6\}$ et $\overline{B} = \{1, 3, 5\}$.

- $A \cap B = \{2, 4\}$, donc $\overline{A \cap B} = \{1, 3, 5, 6\} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, donc $\overline{A \cup B} = \{5\} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Démontrer une égalité d'ensembles

Méthode : démontrer une égalité d'ensembles

1. **Par double inclusion** : montre $A \subset B$, puis $B \subset A$, chacune avec « Soit $x \in \ldots$ ».
2. **Ou par équivalences** : pour $x \in E$ quelconque, écris $x \in A \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x \in B$. Justifie que chaque pas vaut dans les **deux** sens.
3. **Pour réfuter** une égalité, donne un élément de l'un des ensembles qui n'est pas dans l'autre.

Rédaction attendue. « Montrons que $A = B$ par double inclusion. Soit $x \in A$ … donc $x \in B$. Soit $x \in B$ … donc $x \in A$. »

Exemple : Exemple guidé : une égalité par double inclusion

Énoncé. Soit A et B deux parties de E. Montrons que $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$, par double inclusion.

Première inclusion. Soit $x \in A \setminus B$: $x \in A$ et $x \notin B$. Comme $x \notin B$, $x \notin A \cap B$. Donc $x \in A \setminus (A \cap B)$.

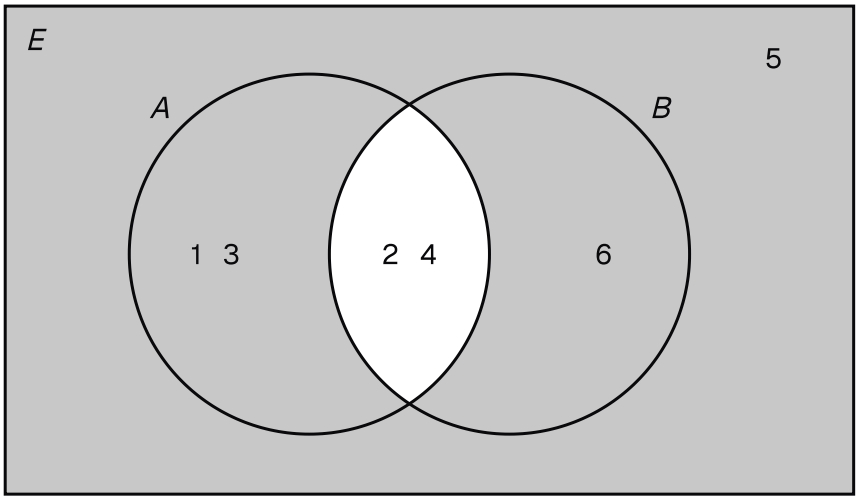
Seconde inclusion. Soit $x \in A \setminus (A \cap B)$: $x \in A$ et $x \notin A \cap B$. Supposons par l'absurde que $x \in B$. Alors $x \in A \cap B$: contradiction. Donc $x \notin B$, et $x \in A \setminus B$.

Attention : le complémentaire d'une intersection

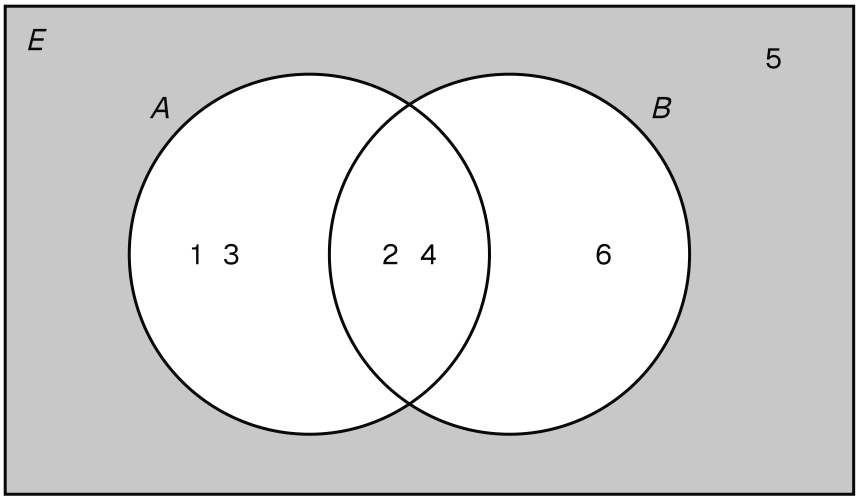
✗ « $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. »

✓ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Avec $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{2, 4, 6\}$ dans $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$: $\overline{A \cap B} = \{1, 3, 5, 6\}$, mais $\overline{A} \cap \overline{B} = \{5\}$.

De même, $A \setminus B = \{1, 3\}$ et $B \setminus A = \{6\}$: la différence n'est pas symétrique.



La partie teintée est le complémentaire de A ∩ B dans E : on y lit 1, 3, 5 et 6, tout ce qui manque à A ou à B.



Avec les mêmes parties, seule la zone extérieure aux deux cercles est teintée : l'intersection des complémentaires se réduit à 5.

À toi : Rédige une double inclusion

Soit A et B deux parties d'un ensemble E. Montre, par double inclusion, que $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Pour la première inclusion, prends x dans la réunion : il est dans l'une des deux parties.
Indice 2
Pour la seconde, prends $x \in A$, et sépare deux cas : $x \in B$ ou $x \notin B$.
Indice 3
Point délicat : annonce la disjonction des cas, et vérifie que tes cas couvrent tout.

Réponse
Première inclusion. Soit $x \in (A \setminus B) \cup (A \cap B)$. Si $x \in A \setminus B$, alors $x \in A$. Si $x \in A \cap B$, alors $x \in A$. Dans les deux cas, $x \in A$.

Seconde inclusion. Soit $x \in A$. Raisonnons par disjonction des cas. Si $x \in B$, alors $x \in A \cap B$. Si $x \notin B$, alors $x \in A \setminus B$. Dans les deux cas, x appartient à la réunion.

Conclusion. Par double inclusion, $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$.

Ensemble des parties ; produit cartésien

Toutes les parties

Avec les éléments de $\{1, 2\}$, on peut former des parties. Ces parties sont elles-mêmes des ensembles. On peut donc les ranger, à leur tour, dans un nouvel ensemble : l'ensemble des parties.

Devine : Combien de parties ?

Combien de parties l'ensemble $\{1, 2\}$ a-t-il ?

A. 2 : $\{1\}$ et $\{2\}$.
Faux.
Il manque $\varnothing$, partie de tout ensemble, et $\{1, 2\}$ lui-même.

B. 3 : $\{1\}$, $\{2\}$ et $\{1, 2\}$.
Faux.
Il manque $\varnothing$: il est inclus dans tout ensemble.

C. 4 : $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$ et $\{1, 2\}$.
Juste.
Juste : sans oublier $\varnothing$, ni l'ensemble lui-même.

D. 1 : $\{1, 2\}$ lui-même.
Faux.
$\{1\} \subset \{1, 2\}$: c'est aussi une partie.

Correction

> Les parties de $\{1, 2\}$ sont $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$ et $\{1, 2\}$: il y en a 4. N'oublie ni $\varnothing$, ni l'ensemble lui-même : ce sont des parties.

Ensemble des parties, produit cartésien

Définition : Ensemble des parties ; produit cartésien

Soit E un ensemble. L'**ensemble des parties** de E, noté $\mathcal{P}(E)$, est l'ensemble dont les éléments sont les parties de E : $X \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow X \subset E$. En particulier, $\varnothing \in \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$.

Soit E et F deux ensembles. Le **produit cartésien** $E \times F$ est l'ensemble des **couples** (x, y) tels que $x \in E$ et $y \in F$. Deux couples sont égaux lorsqu'ils ont les mêmes composantes, dans le même ordre : $(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow (x = x' \text{ et } y = y')$. On note $E^2 = E \times E$.

Exemple : l'ensemble des parties

Soit $E = \{a, b, c\}$. Ses parties sont : $\varnothing$; $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$; $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$; et E. Donc :

$$\mathcal{P}(E) = \big\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \\ \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, E\big\}.$$

Vérifie : Un élément de l'ensemble des parties

Soit $E = \{1, 2, 3\}$. Laquelle de ces écritures est juste ?

A. $1 \in \mathcal{P}(E)$

Faux.
1 est un élément de E ; les éléments de $\mathcal{P}(E)$ sont des parties. On écrit $\{1\} \in \mathcal{P}(E)$.

B. $\varnothing \notin \mathcal{P}(E)$

Faux.
$\varnothing \subset E$, donc $\varnothing \in \mathcal{P}(E)$.

C. $\{1, 3\} \in \mathcal{P}(E)$

Juste.
Juste : $\{1, 3\} \subset E$.

D. $\{1, 4\} \in \mathcal{P}(E)$

Faux.
$4 \notin E$, donc $\{1, 4\} \not\subset E$.

Correction
$X \in \mathcal{P}(E)$ équivaut à $X \subset E$. Or $\{1, 3\} \subset E$: donc $\{1, 3\} \in \mathcal{P}(E)$.

En revanche, 1 n'est pas une partie, $\varnothing$ est une partie de E, et $\{1, 4\}$ contient 4, qui n'appartient pas à E.

> De même, $\{1,3\} \subset \mathcal{P}(E)$ serait faux : il faudrait que 1 et 3 soient des **parties** de E, alors que ce sont des nombres. Et $\{\varnothing\} \subset \mathcal{P}(E)$ est vrai, car $\varnothing \in \mathcal{P}(E)$.

Couples et produit

Un couple (x, y) est une paire **ordonnée** : le premier objet vient d'un ensemble, le second d'un ensemble, éventuellement le même. Le produit range tous les couples possibles dans un tableau.

Exemple : un produit cartésien

Soit $E = \{1, 2\}$ et $F = \{a, b, c\}$. Le tableau range les couples (x, y) de $E \times F$: x en ligne, y en colonne.

x / y	a	b	c
1	$(1, a)$	$(1, b)$	$(1, c)$
2	$(2, a)$	$(2, b)$	$(2, c)$

L'ordre compte : $(1, a) \in E \times F$, mais $(a, 1) \notin E \times F$. Et $(1, 2) \neq (2, 1)$, alors que $\{1, 2\} = \{2, 1\}$.

Un produit cartésien a une forme rigide : tous les couples possibles, ligne par ligne. Que devient l'intersection de deux produits ? Et quand un produit est-il vide ?

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve raisonne sur les composantes d'un couple, l'une après l'autre.

Intersection de produits

Propriété : Produit cartésien, intersection et ensemble vide

Soit E et F deux ensembles, A et C deux parties de E, B et D deux parties de F. Alors :

- $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$;
- $A \times B = \varnothing$ si et seulement si $(A = \varnothing \text{ ou } B = \varnothing)$.

Démonstration

Étape 1. Soit $(x, y) \in E \times F$. D'après F05 et F02, $(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D)$ équivaut à $\big((x \in A \text{ et } y \in B) \text{ et } (x \in C \text{ et } y \in D)\big)$. Une conjonction de quatre conditions est vraie si et seulement si chacune l'est : elle équivaut donc à $\big((x \in A \text{ et } x \in C) \text{ et } (y \in B \text{ et } y \in D)\big)$, donc à $(x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$. Les deux ensembles sont égaux (F01).

Étape 2. Si $A = \varnothing$, aucun couple n'a sa première composante dans A, donc $A \times B = \varnothing$. De même si $B = \varnothing$.

Étape 3. Réciproquement, raisonnons par contraposée. La négation de $(A = \varnothing \text{ ou } B = \varnothing)$ est $(A \neq \varnothing \text{ et } B \neq \varnothing)$ (lois de Morgan logiques). Supposons donc $A \neq \varnothing$ et $B \neq \varnothing$. Soit $a \in A$ et $b \in B$. Alors $(a, b) \in A \times B$ (F05), donc $A \times B \neq \varnothing$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Un couple (x, y) est dans $A \times B$ quand **chaque** composante est dans son ensemble. On raisonne donc composante par composante. Pour l'ensemble vide, la preuve passe par la contraposée : si A et B ont chacun un élément, on **construit** un couple de $A \times B$.

Vérifie : Construire un couple

Dans la preuve, on suppose $A \neq \varnothing$ et $B \neq \varnothing$. Comment montre-t-on que $A \times B \neq \varnothing$?

A. On prend $a \in A$ et $b \in B$: $(a, b) \in A \times B$.
Juste.
Juste : un seul couple suffit pour qu'un ensemble ne soit pas vide.

B. On applique la distributivité.
Faux.
La distributivité porte sur trois parties d'un même ensemble : elle ne fournit aucun couple.

C. On applique les lois de Morgan.
Faux.
Aucun complémentaire n'intervient ici.

D. On montre que $A = B$.
Faux.
A et B peuvent être des parties d'ensembles différents : la preuve ne les compare pas.

Correction
Puisque $A \neq \varnothing$, il existe $a \in A$; puisque $B \neq \varnothing$, il existe $b \in B$. Alors $(a, b) \in A \times B$, donc $A \times B \neq \varnothing$.

C'est la contraposée de : « si $A \times B = \varnothing$, alors $A = \varnothing$ ou $B = \varnothing$ ».

Exemple : Contre-exemple : une réunion de produits

L'intersection de deux produits est un produit. Pour la réunion, c'est faux en général. Prenons, dans $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

$$\begin{aligned}&(\{1\} \times \{1\}) \cup (\{2\} \times \{2\}) \\ &= \{(1, 1), (2, 2)\}.\end{aligned}$$

Supposons par l'absurde que cet ensemble soit un produit $A \times B$. Comme $(1,1)$ en est un élément, $1 \in A$. Comme $(2,2)$ en est un élément, $2 \in B$.

Donc $(1,2) \in A \times B$. Or $(1,2)$ n'est pas dans la réunion : contradiction.

À toi : Intersection de deux produits

Soit $A = \{1,2\}$ et $C = \{2,3\}$, parties de $\{1,2,3,4,5,6\}$, et $B = \{a,b\}$ et $D = \{b,c\}$, parties de $\{a,b,c\}$. Écris $A \times B$ et $C \times D$ en extension, puis leur intersection. Compare avec $(A \cap C) \times (B \cap D)$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Liste les couples ligne par ligne : première composante, puis seconde.
Indice 2
Un couple est dans l'intersection s'il figure dans les deux listes.
Indice 3
Point délicat : $(2,b)$ et $(b,2)$ ne sont pas le même objet ; garde l'ordre.

Réponse
$A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b)\}$ et $C \times D = \{(2,b),(2,c),(3,b),(3,c)\}$.

Le seul couple commun est $(2,b)$: l'intersection est $\{(2,b)\}$.

Or $A \cap C = \{2\}$ et $B \cap D = \{b\}$, donc $(A \cap C) \times (B \cap D) = \{(2,b)\}$.

Conclusion. Les deux ensembles sont égaux.

Applications

Une machine à images

Imagine une machine : tu y entres un objet, elle rend un résultat.

Pour parler d'**application**, on exige deux choses. **Chaque** objet permis à l'entrée doit donner un résultat. Et ce résultat doit être **unique**. On précise aussi où vivent les entrées et les sorties.

Devine : Est-ce une application ?

Laquelle de ces règles définit une application de l'ensemble de départ dans l'ensemble d'arrivée indiqués ?

A. De $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: à x, associer les réels y tels que $y^2 = x$.
Faux.
-1 n'a aucun résultat, et 4 en a deux : 2 et -2.

B. De $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: à x, associer $\dfrac{1}{x}$.
Faux.

0 n'a pas de résultat : $\frac{1}{0}$ n'existe pas.

C. De $\{a, b, c\}$ dans $\{1, 2\}$: a donne 1 et 2, b donne 2.

Faux.

a a deux résultats, et c n'en a aucun.

D. De $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$: à n, associer $n + 1$.

Juste.

Juste : chaque entier naturel n donne un seul résultat, $n + 1$, qui est un entier naturel.

Correction

La règle $n \mapsto n + 1$ convient : chaque $n \in \mathbb{N}$ a un résultat, unique, dans $\mathbb{N}$.

Les trois autres échouent. Un objet de départ y est sans résultat (-1, 0, c), ou avec deux résultats (4, a).

Application, image, antécédent

Définition : Application ; égalité ; identité ; restriction et prolongement

Soit E et F deux ensembles. Une **application** f de E dans F, notée $f : E \to F$, associe à **chaque** élément x de E **un unique** élément de F, noté $f(x)$ et appelé l'**image** de x par f. Si $y = f(x)$, on dit que x est **un antécédent** de y par f. E est l'ensemble de départ, F l'ensemble d'arrivée.

Deux applications $f : E \to F$ et $g : E' \to F'$ sont **égales** si $E = E'$, $F = F'$ et $\forall x \in E,\ f(x) = g(x)$.

L'**application identique** de E est $\mathrm{Id}_E : E \to E$, $x \mapsto x$.

Soit A une partie de E. La **restriction** de f à A est l'application $f_{|A} : A \to F$, $x \mapsto f(x)$. Une application $h : E \to F$ telle que $h_{|A} = g$, où $g : A \to F$, est un **prolongement** de g à E.

Exemple : images et antécédents

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. L'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée sont $\mathbb{R}$.

- L'image de -3 est $f(-3) = 9$. Elle est **unique**.
- Les antécédents de 9 sont 3 et -3 : un élément d'arrivée peut en avoir plusieurs.
- -1 n'a aucun antécédent, car un carré n'est jamais strictement négatif.

Vérifie : Un antécédent

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x + 1$. Quel est l'antécédent de 7 par f ?

A. 15

Faux.

$15 = f(7)$: c'est l'image de 7, pas son antécédent.

B. 3

Juste.

Juste : $f(3) = 2 \times 3 + 1 = 7$.

C. 4

Faux.

$f(4) = 9$. Tu as peut-être ajouté 1 au lieu de le retrancher.

D. Il n'en a pas.

Faux.

7 en a un : résous $2x + 1 = 7$.

Correction

On cherche les réels x tels que $f(x) = 7$:

$$\begin{aligned} 2x + 1 = 7 &\Leftrightarrow 2x = 6 \\ &\Leftrightarrow x = 3. \end{aligned}$$

L'unique antécédent de 7 est 3. Vérification : $f(3) = 7$.

Égalité, identité

Exemple : même formule, applications différentes

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, et $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. Les formules sont les mêmes, mais les ensembles de départ diffèrent : $f \neq g$.

Et leurs propriétés diffèrent : par f, 9 a deux antécédents ; par g, il n'en a qu'un, 3.

L'**application identique** de E, notée Id_E, rend chaque élément inchangé : $\mathrm{Id}_E(x) = x$. Elle ne transforme rien. Tu la retrouveras avec les applications réciproques.

Vérifie : Deux applications égales ?

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto 2n$, et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n + n$. Les applications f et g sont-elles égales ?

A. Oui : mêmes ensembles, et $f(n) = g(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Juste.

Juste : $n + n = 2n$ pour tout entier naturel n.

B. Non, car leurs formules sont différentes.

Faux.

Deux formules différentes peuvent donner les mêmes valeurs : ce sont les valeurs qui comptent.

C. On ne peut pas le savoir sans tout calculer.

Faux.
Un calcul littéral suffit : $n + n = 2n$, pour tout n.

D. Oui, mais seulement pour $n \neq 0$.
Faux.
Pour $n = 0$ aussi : $f(0) = g(0) = 0$.

Correction
f et g ont le même ensemble de départ, $\mathbb{N}$, et le même ensemble d'arrivée, $\mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(n) = n + n = 2n = f(n)$. Donc $f = g$: seules comptent les valeurs, pas l'écriture de la formule.

Restreindre, prolonger

Exemple : restriction et prolongement

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. Sa restriction à $[0, +\infty[$ est $f_{|[0,+\infty[} : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$.

Dans l'autre sens, f est **un** prolongement de cette restriction à $\mathbb{R}$. Ce n'est pas le seul. L'application $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

en est un autre, car $h(-1) = 0$ et $f(-1) = 1$.

À toi : Images, antécédents, restriction

Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$. (a) Calcule $f(2)$ et $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$. (b) Cherche les antécédents de 4, puis de 0. (c) Écris la restriction de f à $]0, +\infty[$; est-elle égale à f ? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Pour (a), remplace x par la valeur ; pour (b), résous $f(x) = 4$ dans $\mathbb{R}^*$.
Indice 2
Pour 0, suppose qu'un antécédent existe et regarde ce que donne $\dfrac{1}{x} = 0$.
Indice 3
Point délicat : relis la définition de l'égalité de deux applications ; elle compte trois conditions.

Réponse
(a) $f(2) = \dfrac{1}{2}$ et $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -2$.

(b) Pour $x \in \mathbb{R}^*$: $\dfrac{1}{x} = 4 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4}$. L'unique antécédent de 4 est $\dfrac{1}{4}$.

Supposons qu'un réel $x \in \mathbb{R}^*$ vérifie $\dfrac{1}{x} = 0$. Alors $1 = 0 \times x = 0$: c'est impossible. Donc 0 n'a pas d'antécédent.

(c) $f_{|]0,+\infty[} :]0,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Elle n'est pas égale à f : les ensembles de départ diffèrent.

Image directe, image réciproque

Où arrivent les points ? D'où viennent-ils ?

Une application transporte des éléments, un par un. On peut aussi transporter une partie entière : où arrivent tous les points de A ? Dans l'autre sens, on se demande d'où viennent les points d'une partie B de l'arrivée.

Devine : Transporter une partie

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, et $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Quel est l'ensemble des images des éléments de A ?

A. $\{-4, -1, 0, 1, 4\}$
Faux.
Un carré n'est jamais négatif : $(-2)^2 = 4$, et non -4.

B. $\{0, 1, 4\}$
Juste.
Juste : $0^2 = 0$, $(\pm 1)^2 = 1$ et $(\pm 2)^2 = 4$.

C. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$
Faux.
C'est A lui-même : il faut prendre les images.

D. $[0, 4]$
Faux.
$2 \in [0, 4]$, mais 2 n'est le carré d'aucun élément de A.

Correction
$f(-2) = f(2) = 4$, $f(-1) = f(1) = 1$ et $f(0) = 0$.

L'ensemble des images est $\{0, 1, 4\}$: chaque image n'y figure qu'une fois. On le note $f(A)$.

Image directe, image réciproque

Définition : Image directe, image réciproque d'une partie

Soit $f : E \to F$ une application, A une partie de E et B une partie de F.

- L'**image directe** de A par f est la partie de F : $f(A) = \{f(x) \,/\, x \in A\}$. Ainsi, $y \in f(A) \Leftrightarrow (\exists x \in A,\ y = f(x))$.
- L'**image réciproque** de B par f est la partie de E : $f^{-1}(B) = \{x \in E \,/\, f(x) \in B\}$. Ainsi, pour tout $x \in E$, $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$.

La notation $f^{-1}(B)$ a un sens pour **toute** application f, bijective ou non.

Exemple : sur des ensembles finis

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.

- $f(\{-3, 3\}) = \{9\}$: deux éléments, une seule image.
- $f^{-1}(\{0, 9\}) = \{-3, 0, 3\}$: on résout $x^2 = 0$ ou $x^2 = 9$.
- $f^{-1}(\{-1\}) = \varnothing$: aucun réel n'a pour carré -1.

Vérifie : Une image réciproque

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto 2n$. Que vaut $f^{-1}(\{1, 2, 3, 4\})$?

A. $\{2, 4, 6, 8\}$

Faux.

C'est $f(\{1, 2, 3, 4\})$, l'image directe : on a pris les images au lieu des antécédents.

B. $\left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$

Faux.

$\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$ ne sont pas des entiers naturels : ils ne sont pas dans l'ensemble de départ.

C. $\varnothing$, car f n'est pas bijective.

Faux.

Une image réciproque existe pour toute application, bijective ou non.

D. $\{1, 2\}$

Juste.

Juste : $f(1) = 2$ et $f(2) = 4$, et aucun entier naturel n'a pour double 1 ou 3.

Correction

On cherche les $n \in \mathbb{N}$ tels que $2n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

- $2n = 2$ donne $n = 1$, et $2n = 4$ donne $n = 2$.
- $2n = 1$ et $2n = 3$ n'ont pas de solution dans $\mathbb{N}$.

Donc $f^{-1}(\{1, 2, 3, 4\}) = \{1, 2\}$.

Déterminer une image

Rappel. Pour $a \geq 0$, $|x| \geq a$ équivaut à $x \leq -a$ ou $x \geq a$.

Méthode : déterminer une image directe ou réciproque

1. **Image réciproque** $f^{-1}(B)$: résous, dans l'ensemble de départ, la condition $f(x) \in B$. C'est une équation ou une inéquation.
2. **Image directe** $f(A)$: cherche les y pour lesquels $f(x) = y$ a une solution x **dans** A. Puis vérifie les deux inclusions.
3. **Contrôle** sur quelques valeurs. Ce contrôle ne remplace pas la preuve.

Exemple : Exemple guidé : l'image d'un intervalle

Énoncé. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. Montrons, **par double inclusion**, que $f([1,3]) = [1,9]$.

Première inclusion. Soit $x \in [1,3]$: $1 \leq x \leq 3$. Ces nombres sont positifs : on multiplie membre à membre l'encadrement par lui-même. Donc $1 \leq x^2 \leq 9$, et $f(x) \in [1,9]$.

Ainsi $f([1,3]) \subset [1,9]$.

Seconde inclusion. Soit $y \in [1,9]$ et $x = \sqrt{y}$. Deux réels positifs sont rangés comme leurs racines carrées : $1 \leq \sqrt{y} \leq 3$. Donc $x \in [1,3]$ et $f(x) = y$: $y \in f([1,3])$.

Ainsi $[1,9] \subset f([1,3])$.

Conclusion. Par double inclusion, $f([1,3]) = [1,9]$.

Exemple : Exemple guidé : une image réciproque

Énoncé. Même application f. Déterminons $f^{-1}([1,4])$.

Résolution, par équivalences. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $x^2 = |x|^2$, et deux réels positifs sont rangés comme leurs carrés. Donc :

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}([1,4]) &\Leftrightarrow 1 \leq x^2 \leq 4 \\ &\Leftrightarrow 1 \leq |x| \leq 2. \end{aligned}$$

Or $|x| \leq 2$ équivaut à $-2 \leq x \leq 2$, et $|x| \geq 1$ équivaut à $x \leq -1$ ou $x \geq 1$ (rappel). Chaque pas est une équivalence : rien ne se perd.

Conclusion. $f^{-1}([1,4]) = [-2,-1] \cup [1,2]$. Les deux morceaux viennent du signe de x.

Une notation à double sens

Attention : l'image réciproque existe toujours

✗ « $x \mapsto x^2$ n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc l'image réciproque de $[1,4]$ n'existe pas. »

✓ L'image réciproque d'une partie est définie pour **toute** application : ici, elle vaut $[-2,-1] \cup [1,2]$.

Elle peut être vide : par $x \mapsto x^2$, celle de $[-5, -1]$ est $\varnothing$. Seule l'application réciproque, notée f^{-1} tout court, exige une bijection.

À toi : Image et image réciproque

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x - 2$. Détermine $f([0, 2])$, puis $f^{-1}(]1, 4])$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Pour l'image directe, encadre $3x - 2$ quand $0 \leq x \leq 2$, puis résous $3x - 2 = y$.
Indice 2
Pour l'image réciproque, résous l'inéquation $1 < 3x - 2 \leq 4$.
Indice 3
Point délicat : vérifie que la solution x de $3x - 2 = y$ est bien dans $[0, 2]$.

Réponse
Image directe. Soit $x \in [0, 2]$. Alors $0 \leq 3x \leq 6$, donc $-2 \leq 3x - 2 \leq 4$. Ainsi $f([0, 2]) \subset [-2, 4]$.

Réciproquement, soit $y \in [-2, 4]$ et $x = \dfrac{y + 2}{3}$. Alors $0 \leq y + 2 \leq 6$, donc $x \in [0, 2]$, et $f(x) = y$. Ainsi $[-2, 4] \subset f([0, 2])$.

Par double inclusion, $f([0, 2]) = [-2, 4]$.

Image réciproque. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & 1 < 3x - 2 \leq 4 \\ \Leftrightarrow\ & 3 < 3x \leq 6 \\ \Leftrightarrow\ & 1 < x \leq 2. \end{aligned}$$

Conclusion. $f([0, 2]) = [-2, 4]$ et $f^{-1}(]1, 4]) =]1, 2]$.

Images et opérations

Image d'une intersection

Devine : Image d'une intersection

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, $A = \{-1\}$ et $A' = \{1\}$. Compare $f(A \cap A')$ et $f(A) \cap f(A')$.

A. Ils sont égaux : tous deux valent $\{1\}$.
Faux.
$A \cap A' = \varnothing$: son image est vide.

B. $f(A \cap A') = \varnothing$, alors que $f(A) \cap f(A') = \{1\}$.
Juste.
Juste : A et A' sont disjointes, mais leurs images se rencontrent.

C. Ils sont tous deux vides.

Faux.
$f(A) = f(A') = \{1\}$: leur intersection est $\{1\}$.

D. $f(A \cap A')$ n'existe pas, car $A \cap A'$ est vide.
Faux.
L'image de $\varnothing$ existe : c'est $\varnothing$.

Correction
$A \cap A' = \varnothing$, donc $f(A \cap A') = \varnothing$. Mais $f(A) = \{1\}$ et $f(A') = \{1\}$, donc $f(A) \cap f(A') = \{1\}$.

Les deux ensembles diffèrent : deux éléments distincts, -1 et 1, ont la même image.

L'image directe se comporte bien avec l'inclusion et la réunion, moins bien avec l'intersection.

Pourquoi est-ce vrai ? Un élément de $f(A)$ s'écrit $f(x)$ avec $x \in A$: un « il existe » se cache dans la définition. La preuve suit ce x. Pour l'intersection, elle n'obtient qu'une inclusion.

L'image directe et les opérations

Propriété : Image directe : inclusion, réunion, intersection

Soit $f : E \to F$ une application, et A et A' deux parties de E. Alors :

- si $A \subset A'$, alors $f(A) \subset f(A')$;
- $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$;
- $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$, et cette inclusion peut être stricte.

Démonstration
Étape 1. Supposons $A \subset A'$. Soit $y \in f(A)$: il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$ (F08). Comme $A \subset A'$, $x \in A'$, donc $y \in f(A')$. Ainsi $f(A) \subset f(A')$.

Étape 2. Comme $A \subset A \cup A'$ et $A' \subset A \cup A'$ (F02), l'étape 1 donne $f(A) \subset f(A \cup A')$ et $f(A') \subset f(A \cup A')$, donc $f(A) \cup f(A') \subset f(A \cup A')$. Réciproquement, soit $y \in f(A \cup A')$: il existe $x \in A \cup A'$ tel que $y = f(x)$. Si $x \in A$, alors $y \in f(A)$; sinon $x \in A'$ et $y \in f(A')$. Donc $y \in f(A) \cup f(A')$. L'égalité vient de la double inclusion (F01).

Étape 3. Comme $A \cap A' \subset A$ et $A \cap A' \subset A'$, l'étape 1 donne $f(A \cap A') \subset f(A)$ et $f(A \cap A') \subset f(A')$, donc $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$ (F02).

Étape 4. L'inclusion peut être stricte. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, $A = \{-1\}$ et $A' = \{1\}$. Alors $A \cap A' = \varnothing$, donc $f(A \cap A') = \varnothing$, alors que $f(A) \cap f(A') = \{1\}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour une inclusion d'images directes, on part de $y \in f(A)$, et on **nomme** un antécédent : « il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$ ». Puis on suit x. Le premier point, l'inclusion conservée, sert ensuite deux fois : pour la réunion et pour l'intersection.

Vérifie : Quel argument ?

Dans la preuve, comment obtient-on $f(A) \subset f(A \cup A')$?

A. On utilise une hypothèse sur f : deux éléments distincts ont des images distinctes.
Faux.
Rien de tel n'est supposé : le résultat vaut pour toute application.

B. On utilise la distributivité.
Faux.
La distributivité ne fait pas intervenir d'application.

C. On passe aux complémentaires.
Faux.
Aucun complémentaire n'intervient dans cette preuve.

D. $A \subset A \cup A'$, puis l'inclusion est conservée par f.
Juste.
Juste : c'est le premier point, appliqué à A et $A \cup A'$.

Correction
Toute partie est incluse dans sa réunion avec une autre : $A \subset A \cup A'$. D'après le premier point, une inclusion est conservée par l'image directe. Donc $f(A) \subset f(A \cup A')$.

Exemple : Contre-exemple : une inclusion stricte

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, $A = [-2, 0]$ et $A' = [0, 2]$.

- $A \cap A' = \{0\}$, donc $f(A \cap A') = \{0\}$.
- $f(A) = [0, 4]$ et $f(A') = [0, 4]$, donc $f(A) \cap f(A') = [0, 4]$.

L'inclusion est stricte : 4 est dans le second ensemble, pas dans le premier.

En cause : $f(-2) = f(2)$, alors que $-2 \neq 2$. Deux éléments distincts ont la même image.

Un piège, puis l'image réciproque

Attention : l'image d'une intersection

X « $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$ pour toute application f. »

✓ Seule l'inclusion $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$ est vraie en général. Un élément de $f(A) \cap f(A')$ peut venir d'un point de A et d'un **autre** point de A', de même image. Pour l'égalité, il faut une raison propre à f.

L'image réciproque, elle, respecte toutes les opérations.

Pourquoi est-ce vrai ? La condition $x \in f^{-1}(B)$ se traduit par $f(x) \in B$, sans « il existe ». Chaque opération sur B devient alors le même connecteur sur cette condition.

L'image réciproque et les opérations

Propriété : Image réciproque : inclusion, réunion, intersection, complémentaire

Soit $f : E \to F$ une application, et B et B' deux parties de F. Alors :

- si $B \subset B'$, alors $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$;
- $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$ et $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$;
- $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$, le premier complémentaire étant pris dans F, le second dans E.

Démonstration

Étape 1. Soit $x \in E$. D'après F08, $x \in f^{-1}(B)$ équivaut à $f(x) \in B$. Si $B \subset B'$ et $x \in f^{-1}(B)$, alors $f(x) \in B$, donc $f(x) \in B'$, c'est-à-dire $x \in f^{-1}(B')$. Ainsi $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$.

Étape 2. $x \in f^{-1}(B \cup B')$ équivaut à $f(x) \in B \cup B'$, donc à $(f(x) \in B \text{ ou } f(x) \in B')$ (F02), c'est-à-dire à $(x \in f^{-1}(B) \text{ ou } x \in f^{-1}(B'))$, donc à $x \in f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$. De même, $x \in f^{-1}(B \cap B')$ équivaut à $(f(x) \in B \text{ et } f(x) \in B')$ (F02), donc à $x \in f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$.

Étape 3. $x \in f^{-1}(\overline{B})$ équivaut à $f(x) \notin B$ (F02), donc à $x \notin f^{-1}(B)$, c'est-à-dire à $x \in \overline{f^{-1}(B)}$.

Étape 4. Chaque équivalence vaut pour tout $x \in E$: les ensembles sont égaux (F01).

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour l'image réciproque, on raisonne par **équivalences** sur un x quelconque de E : $x \in f^{-1}(B)$ équivaut à $f(x) \in B$. Réunion, intersection et complémentaire passent alors sans perte : « ou », « et », « non ». Attention aux deux complémentaires : l'un dans F, l'autre dans E.

Vérifie : Pourquoi sans perte ?

L'image réciproque respecte l'intersection pour toute application. Qu'est-ce qui le permet, dans la preuve ?

A. L'hypothèse « f est bijective ».

Faux.

Aucune hypothèse de ce genre : le résultat vaut pour toute application.

B. $x \in f^{-1}(B)$ se traduit par une seule condition sur $f(x)$.

Juste.

Juste : pas de « il existe », donc une équivalence à chaque pas.

C. Le fait que B et B' sont disjointes.

Faux.

B et B' sont des parties quelconques de F.

D. Une vérification sur des intervalles.

Faux.

Un exemple ne démontre pas un résultat général.

Correction

Soit $x \in E$. Par définition de l'image réciproque, puis de l'intersection :

$$\begin{aligned} & x \in f^{-1}(B \cap B') \\ \Leftrightarrow\ & f(x) \in B \cap B' \\ \Leftrightarrow\ & f(x) \in B \text{ et } f(x) \in B' \\ \Leftrightarrow\ & x \in f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B'). \end{aligned}$$

Chaque pas est une équivalence : rien ne se perd, quelle que soit l'application f.

Exemple : image réciproque et complémentaire

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, et $B = [0, 4]$. Alors $f^{-1}(B) = [-2, 2]$.

- Dans $F = \mathbb{R}$: $\overline{B} =]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$.
- $f^{-1}(\overline{B}) =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$: on résout $x^2 < 0$ ou $x^2 > 4$.
- C'est bien le complémentaire de $[-2, 2]$ dans $E = \mathbb{R}$.

À toi : Image d'une intersection

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, $A = [-3, -1]$ et $A' = [1, 2]$. Détermine $f(A)$, $f(A')$ et $f(A) \cap f(A')$, puis $f(A \cap A')$. Que conclus-tu ? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Pour $f(A)$, pars de $-3 \leq x \leq -1$ et encadre $-x$ avant d'élever au carré.

Indice 2

Pour la seconde inclusion, cherche un antécédent de y qui soit dans $[-3, -1]$: attention au signe.

Indice 3

Point délicat : $A \cap A'$ est vide ; quelle est l'image de $\varnothing$?

Réponse

Calcul des images. Si $-3 \leq x \leq -1$, alors $1 \leq -x \leq 3$, donc, ces nombres étant positifs, $1 \leq x^2 \leq 9$. Réciproquement, pour $y \in [1, 9]$, $x = -\sqrt{y}$ est dans $[-3, -1]$ et $f(x) = y$.

Donc $f(A) = [1, 9]$. De même, $f(A') = [1, 4]$, et $f(A) \cap f(A') = [1, 4]$.

Image de l'intersection. Or $A \cap A' = \varnothing$, donc $f(A \cap A') = \varnothing$.

Conclusion. L'inclusion $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$ est stricte : -1 et 1 ont la même image.

Injections, surjections

Au plus un, au moins un

Par une application, chaque élément de départ a une seule image. Mais un élément d'arrivée peut avoir zéro, un ou plusieurs antécédents.

Deux questions comptent. Chaque élément d'arrivée a-t-il **au plus** un antécédent ? En a-t-il **au moins** un ?

Devine : Un seul antécédent

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. Lequel de ces réels a exactement un antécédent par f ?

A. 4

Faux.
4 en a deux : 2 et -2.

B. -4

Faux.
-4 n'en a aucun : un carré n'est jamais strictement négatif.

C. 1

Faux.
1 en a deux : 1 et -1.

D. 0

Juste.
Juste : $x^2 = 0$ équivaut à $x = 0$.

Correction
Pour $y > 0$, l'équation $x^2 = y$ a deux solutions, $\sqrt{y}$ et $-\sqrt{y}$. Pour $y < 0$, elle n'en a aucune. Pour $y = 0$, elle en a une seule, 0. Seul 0 a exactement un antécédent.

Injection, surjection

Définition : Application injective, application surjective

Soit $f : E \to F$ une application.

- f est **injective** si : $\forall (x, x') \in E^2,\ \big(f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'\big)$. Par contraposée, deux éléments distincts de E ont des images distinctes : tout élément de F a **au plus un** antécédent.
- f est **surjective** si : $\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)$. Tout élément de F a **au moins un** antécédent : $f(E) = F$.

Exemple : sur un ensemble fini

Soit $g : \{a, b, c\} \to \{1, 2\}$ définie par $g(a) = 1$, $g(b) = 2$ et $g(c) = 1$.

- g n'est pas injective : $a \neq c$, mais $g(a) = g(c)$.
- g est surjective : $1 = g(a)$ et $2 = g(b)$. Chaque élément d'arrivée a un antécédent.

Vérifie : Injective ? Surjective ?

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. Laquelle de ces affirmations est juste ?

A. f est injective, car $x^2 = x'^2$ entraîne $x = x'$.

Faux.
$(-1)^2 = 1^2$, et pourtant $-1 \neq 1$.

B. f n'est pas surjective : -1 n'a pas d'antécédent.

Juste.
Juste : aucun réel n'a pour carré -1.

C. f est surjective, car tout réel a un carré.

Faux.
Tout réel a une image : c'est vrai pour toute application. La surjectivité demande un antécédent à chaque élément d'arrivée.

D. f est injective et surjective.

Faux.
Elle n'est ni l'une ni l'autre : $f(-1) = f(1)$, et -1 n'a pas d'antécédent.

Correction

f n'est pas injective : $-1 \neq 1$ et $f(-1) = f(1) = 1$.

Elle n'est pas surjective : $-1 \in \mathbb{R}$ n'a pas d'antécédent, car $x^2 \geq 0$ pour tout réel x.

« Avoir une image » est vrai de tout élément de départ ; « avoir un antécédent », c'est autre chose.

Étudier l'injectivité

Méthode : étudier l'injectivité

1. **Pour démontrer** : « Soit $(x, x') \in E^2$ tel que $f(x) = f(x')$. » Puis déduis $x = x'$ par des calculs justifiés.
2. **Pour réfuter** : donne deux éléments **distincts** x et x' de E tels que $f(x) = f(x')$. Vérifie l'égalité par le calcul.

Rédaction attendue. « Soit $(x, x') \in E^2$ tel que $f(x) = f(x')$. Alors … donc $x = x'$. Ainsi, f est injective. »

Exemple **: Exemple guidé : injectivité démontrée, puis réfutée**

Démontrée (raisonnement direct). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 3x - 2$. Soit $(x, x') \in \mathbb{R}^2$ tel que $3x - 2 = 3x' - 2$.

Alors $3x = 3x'$, donc $x = x'$, en divisant par $3 \neq 0$. Ainsi, f est injective.

Réfutée. $x \mapsto x^2$ n'est pas injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $-2 \neq 2$, et $(-2)^2 = 2^2 = 4$.

Le départ compte. L'application $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, est injective. Soit x et x' deux éléments de $[0, +\infty[$ tels que $x^2 = x'^2$: alors $(x - x')(x + x') = 0$.

Par disjonction des cas. Si $x + x' = 0$, ces deux réels positifs sont nuls, donc égaux. Sinon, le produit nul impose $x - x' = 0$. Dans les deux cas, $x = x'$. Ainsi, g est injective.

Étudier la surjectivité

Méthode **: étudier la surjectivité**

1. **Pour démontrer** : « Soit $y \in F$. » Résous $f(x) = y$, puis **vérifie** que la solution trouvée appartient à E. Conclus : « y a un antécédent ».
2. **Pour réfuter** : donne un élément $y_0 \in F$ sans antécédent. Justifie qu'**aucun** $x \in E$ ne vérifie $f(x) = y_0$.

Exemple **: Exemple guidé : la surjectivité dépend de l'arrivée**

Démontrée. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 3x - 2$, et soit $y \in \mathbb{R}$. Posons $x = \dfrac{y + 2}{3}$: c'est un réel, et $f(x) = y + 2 - 2 = y$. Donc f est surjective.

Réfutée. Soit $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto 2n$. L'entier 1 n'a pas d'antécédent : $2n = 1$ donne $n = \dfrac{1}{2}$, qui n'est pas dans $\mathbb{N}$.

L'arrivée compte. $x \mapsto x^2$ n'est pas surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Mais de $\mathbb{R}$ dans $[0, +\infty[$, elle l'est : pour $y \geq 0$, le réel $\sqrt{y}$ a pour carré y.

Attention : les ensembles font partie de la question

✗ « Soit $y \in \mathbb{N}$. Posons $n = \frac{y}{2}$: alors $2n = y$. Donc $n \mapsto 2n$ est surjective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. »

✓ Pour $y = 1$, $\frac{y}{2} = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$: ce n'est pas un antécédent. Un antécédent doit appartenir à l'**ensemble de départ**. Injectivité et surjectivité dépendent toujours des ensembles de départ et d'arrivée.

À toi

Trouve l'erreur : Une preuve à vérifier

Un élève écrit : « Soit $y \in \mathbb{R}$. Posons $x = \sqrt{y}$. Alors $x \geq 0$ et $x^2 = y$. Donc $x \mapsto x^2$ est surjective de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. » Où est l'erreur ?

A. $\sqrt{y}$ n'existe que si $y \geq 0$.

Juste.

Juste : pour $y = -1$, il n'y a pas d'antécédent, et la conclusion est fausse.

B. Il fallait commencer par « Soit $x \in [0, +\infty[$ ».

Faux.

Pour la surjectivité, on part bien d'un élément d'arrivée : « Soit y » est le bon début.

C. L'égalité $x^2 = y$ est fausse.

Faux.

Quand $\sqrt{y}$ existe, son carré vaut bien y.

D. Il n'y a pas d'erreur.

Faux.

La conclusion est fausse : -1 n'est le carré d'aucun réel.

Correction

La racine carrée $\sqrt{y}$ n'est définie que pour $y \geq 0$. Pour $y = -1$, aucun réel x ne vérifie $x^2 = -1$: -1 n'a pas d'antécédent.

L'application n'est donc pas surjective de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Elle l'est de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$.

À toi : Injective, pas surjective

Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$. Montre que f est injective, et qu'elle n'est pas surjective. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Pour l'injectivité, pars de « Soit $(x, x') \in (\mathbb{R}^*)^2$ tel que $f(x) = f(x')$ ».

Indice 2

Multiplie l'égalité $\frac{1}{x} = \frac{1}{x'}$ par xx', qui n'est pas nul.

Indice 3

Point délicat : pour réfuter la surjectivité, cherche un réel qui n'est l'inverse d'aucun réel non nul.

Réponse

Injective. Soit $(x, x') \in (\mathbb{R}^*)^2$ tel que $\frac{1}{x} = \frac{1}{x'}$. En multipliant par $xx' \neq 0$, on obtient $x' = x$. Donc f est injective.

Pas surjective. Supposons par l'absurde que 0 ait un antécédent $x \in \mathbb{R}^*$: $\frac{1}{x} = 0$. En multipliant par x, on obtient $1 = 0$: contradiction. Donc 0 n'a pas d'antécédent.

Conclusion. f est injective, et elle n'est pas surjective.

Bijections, application réciproque

Exactement un antécédent

Une application à la fois injective et surjective donne à chaque élément d'arrivée **exactement un** antécédent.

On peut alors « revenir » : à chaque y, associer l'unique x qui lui correspond. Cette machine du retour s'appelle l'application réciproque.

Devine : Laquelle est bijective ?

Laquelle de ces applications est bijective ?

A. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$

Faux.

4 a deux antécédents, et -1 n'en a aucun.

B. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 1$

Juste.

Juste : chaque réel y a un seul antécédent, $\frac{y-1}{2}$.

C. $\mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n + 1$

Faux.

Elle est injective, mais 0 n'a pas d'antécédent dans $\mathbb{N}$.

D. $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$

Faux.

Elle est injective, mais 0 n'a pas d'antécédent.

Correction

Pour $x \mapsto 2x + 1$: soit $y \in \mathbb{R}$. Pour tout réel x :

$$2x + 1 = y \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{2}.$$

Chaque réel y a donc exactement un antécédent (existence : surjectivité ; unicité : injectivité) : l'application est bijective.

Les trois autres ont un élément d'arrivée sans antécédent.

Bijection et réciproque

Définition : Application bijective ; application réciproque

Une application $f : E \to F$ est **bijective** si elle est injective et surjective, c'est-à-dire si tout élément de F a **exactement un** antécédent : $\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ y = f(x)$.

Dans ce cas, l'**application réciproque** de f est l'application $f^{-1} : F \to E$ qui associe à chaque $y \in F$ son unique antécédent par f. Pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$: $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

Exemple : une bijection et sa réciproque

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 3x - 2$. Pour $y \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$y = 3x - 2 \Leftrightarrow x = \frac{y+2}{3}.$$

Chaque réel y a donc exactement un antécédent (existence : surjectivité ; unicité : injectivité) : f est bijective.

Son application réciproque est $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto \dfrac{y+2}{3}$. Par exemple, $f(2) = 4$ et $f^{-1}(4) = 2$.

Vérifie : Lire la réciproque

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 1$, qui est bijective. Que vaut $f^{-1}(5)$?

A. 11

Faux.
$11 = f(5)$: c'est l'image de 5, pas son antécédent.

B. $\dfrac{1}{11}$

Faux.
$f^{-1}(5)$ n'est pas $\dfrac{1}{f(5)}$: on cherche l'antécédent de 5.

C. 3

Faux.
$f(3) = 7$, et non 5. Tu as peut-être ajouté 1 au lieu de le retrancher.

D. 2

Juste.
Juste : $f(2) = 5$, donc $f^{-1}(5) = 2$.

Correction

D'après la définition, $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$. On cherche donc le réel x tel que $2x + 1 = 5$: c'est $x = 2$. Ainsi, $f^{-1}(5) = 2$.

Attention : $f^{-1}(5)$ n'est pas $\dfrac{1}{f(5)}$.

Démontrer une bijection

Méthode : démontrer qu'une application est bijective

1. **Résoudre** $f(x) = y$, pour $y \in F$ quelconque. L'existence d'une solution $x \in E$ donne la surjectivité ; son unicité dans E donne l'injectivité. Donc f est bijective et $f^{-1}(y) = x$.
2. **Ou proposer** une application de F dans E qui défait f, et le vérifier dans les deux sens. Tu verras ce critère avec la composée.
3. **Ou démontrer** l'injectivité, puis la surjectivité, chacune par sa méthode.

Dans tous les cas, vérifie d'abord que f va bien de E dans F : chaque image doit être dans F.

Exemple : Exemple guidé : une bijection entre intervalles

Énoncé. Soit $f : [1, 3] \to [3, 7], x \mapsto 2x + 1$. Montrons que f est bijective.

L'application est bien définie. Si $1 \leq x \leq 3$, alors $2 \leq 2x \leq 6$, donc $3 \leq 2x + 1 \leq 7$.

Résolution, par équivalences. Soit $y \in [3, 7]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$2x + 1 = y \Leftrightarrow x = \frac{y - 1}{2}.$$

Or $2 \leq y - 1 \leq 6$, donc $1 \leq \dfrac{y - 1}{2} \leq 3$: cette solution est dans $[1, 3]$.

Conclusion. Chaque $y \in [3, 7]$ a un antécédent dans $[1, 3]$ (surjectivité), et un seul (injectivité) : f est bijective, et $f^{-1} : [3, 7] \to [1, 3], y \mapsto \dfrac{y - 1}{2}$.

Exemple : restreindre pour rendre bijective

$x \mapsto x^2$ n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Restreignons les deux ensembles : soit $g : [0, +\infty[\to [0, +\infty[, x \mapsto x^2$.

Soit $y \geq 0$. Pour $x \geq 0$, on a $x^2 = y \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$, car $\sqrt{y}$ est le seul réel positif de carré y. Et $\sqrt{y} \geq 0$.

Ainsi y a un antécédent dans $[0, +\infty[$, et un seul (existence : surjectivité ; unicité : injectivité). Donc g est bijective, et $g^{-1} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[, y \mapsto \sqrt{y}$.

À toi

Vérifie : Une autre restriction

Soit $h :]-\infty, 0] \to [0, +\infty[, x \mapsto x^2$. Laquelle de ces affirmations est juste ?

A. h est bijective, et $h^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

Faux.

Pour $y > 0$, $\sqrt{y} > 0$: ce n'est pas un élément de $]-\infty, 0]$.

B. h n'est pas bijective, car $x^2 = 4$ a deux solutions.

Faux.

$2 \notin]-\infty, 0]$: dans l'ensemble de départ, seul -2 convient.

C. h est bijective, et $h^{-1}(y) = -\sqrt{y}$.

Juste.

Juste : $-\sqrt{y}$ est le seul réel négatif ou nul de carré y.

D. h est bijective, et $h^{-1}(y) = y^2$.

Faux.

Avec $y = 4$, on trouverait 16 ; or $16 \notin]-\infty, 0]$.

Correction

Soit $y \geq 0$. Pour $x \leq 0$, on a $x^2 = y \Leftrightarrow x = -\sqrt{y}$: $-\sqrt{y}$ est le seul réel négatif ou nul de carré y.

Chaque $y \geq 0$ a donc exactement un antécédent dans $]-\infty, 0]$ (existence : surjectivité ; unicité : injectivité).

Donc h est bijective, et $h^{-1} : [0, +\infty[\to]-\infty, 0], y \mapsto -\sqrt{y}$.

À toi : Une bijection et sa réciproque

Soit $f : [1, +\infty[\to [1, +\infty[, x \mapsto x^2$. Vérifie que f est bien définie, puis montre qu'elle est bijective et détermine f^{-1}. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Pour « bien définie », montre que $x \geq 1$ entraîne $x^2 \geq 1$.

Indice 2

Soit $y \geq 1$: résous $x^2 = y$ avec $x \geq 1$.

Indice 3

Point délicat : vérifie que la solution trouvée est bien dans $[1, +\infty[$.

Réponse

Bien définie. Si $x \geq 1$, alors $x > 0$ et $x^2 \geq x \geq 1$, en multipliant $x \geq 1$ par $x > 0$.

Bijective. Soit $y \geq 1$. Pour $x \geq 1$, on a $x \geq 0$, donc $x^2 = y \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$. Et $\sqrt{y} \geq \sqrt{1} = 1$, car deux réels positifs sont rangés comme leurs racines carrées.

Donc $\sqrt{y}$ est l'unique antécédent de y dans $[1, +\infty[$ (existence : surjectivité ; unicité : injectivité).

Conclusion. f est bijective, et $f^{-1} : [1, +\infty[\to [1, +\infty[, y \mapsto \sqrt{y}$.

Remarque : Coin devoir : rédiger une bijection

En devoir, une bijection se justifie toujours. Écris : « Soit $y \in F$. Pour $x \in E$, $f(x) = y \Leftrightarrow x = \dots$ Cette solution appartient à E car … Ainsi y a un antécédent, donc f est surjective ; cet antécédent est unique, donc f est injective. Donc f est bijective, et $f^{-1}(y) = \dots$ » Vérifie d'abord que chaque image est dans F. Et nomme toujours l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée.

Composée de deux applications

Enchaîner deux machines

Deux machines peuvent s'enchaîner : la sortie de la première devient l'entrée de la seconde. Encore faut-il que cette sortie soit une entrée permise. Et l'ordre des machines compte-t-il ?

Devine : Dans quel ordre ?

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 1$, et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. Pars de 1 : applique f puis g. Puis, à nouveau depuis 1, applique g puis f. Qu'obtiens-tu ?

A. 9, puis 3.

Juste.
Juste : $g(f(1)) = g(3) = 9$ et $f(g(1)) = f(1) = 3$.

B. 3, puis 9.

Faux.
$f(1) = 3$, puis $g(3) = 9$: le premier calcul donne 9.

C. 9 dans les deux cas.

Faux.
$g(1) = 1$, puis $f(1) = 3$: le second calcul donne 3.

D. 3 dans les deux cas.

Faux.
$f(1) = 3$, puis $g(3) = 9$: le premier calcul donne 9.

Correction
f puis g : $f(1) = 3$, puis $g(3) = 9$. g puis f : $g(1) = 1$, puis $f(1) = 3$. Les deux résultats diffèrent : l'ordre compte.

La composée

Définition : Composée de deux applications

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. La **composée** de f suivie de g est l'application notée $g \circ f$ (lue « g rond f ») :

$$g \circ f : E \to G, \quad x \mapsto g\big(f(x)\big).$$

On applique d'abord f, puis g.

Méthode : calculer une composée

1. **Vérifier** que l'ensemble d'arrivée de f est l'ensemble de départ de g. Sinon, $g \circ f$ n'est pas définie.
2. **Écrire** $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$: dans la formule de g, on remplace la variable par $f(x)$.
3. **Donner** les ensembles : $g \circ f$ va de l'ensemble de départ de f dans l'ensemble d'arrivée de g.

Exemple : deux composées différentes

Avec $f : x \mapsto 2x + 1$ et $g : x \mapsto x^2$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, pour tout réel x :

$$(g \circ f)(x) = (2x + 1)^2,$$

$$(f \circ g)(x) = 2x^2 + 1.$$

Ces applications ne sont pas égales : en $x = -1$, la première vaut 1, la seconde 3.

L'ordre compte

Attention : dans g rond f, on applique d'abord f

✗ « $(g \circ f)(x) = f\big(g(x)\big)$. »

✓ Dans $g \circ f$, on applique d'abord f, puis g : $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$.

L'une des composées peut même exister sans l'autre. Prenons $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x - 2$. La composée $g \circ f$ existe. Mais $f \circ g$ n'est pas définie : $g\left(\dfrac{2}{3}\right) = 0$, et $0 \notin \mathbb{R}^*$.

Vérifie : Calculer une composée

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x - 2$, et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. Que vaut $(g \circ f)(x)$?

A. $3x^2 - 2$
Faux.

C'est $(f \circ g)(x)$: on a appliqué g en premier.

B. $9x^2 - 2$

Faux.

Le carré porte sur tout $3x - 2$, pas seulement sur $3x$.

C. $(3x - 2)^2$

Juste.

Juste : $g\big(f(x)\big) = \big(f(x)\big)^2$.

D. $(3x - 2) \times x^2$

Faux.

Composer n'est pas multiplier : on remplace la variable de g par $f(x)$.

Correction

On applique d'abord f, puis g. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g\big(f(x)\big) \\ &= g(3x - 2) \\ &= (3x - 2)^2.\end{aligned}$$

Cette composée va de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Composer deux injections donne-t-il une injection ? Et pour deux surjections ?

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve remonte les machines : elle part de g, la dernière appliquée, puis revient à f. C'est vrai pour l'injectivité comme pour la surjectivité.

Associativité, injections, surjections

Propriété : Composée : associativité ; injections, surjections, bijections

Soit $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ des applications. Alors :

- $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$, et $f \circ \mathrm{Id}_E = f, \mathrm{Id}_F \circ f = f$;
- si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective ;
- si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective ;
- si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.

Démonstration

Étape 1. Les deux applications $(h \circ g) \circ f$ et $h \circ (g \circ f)$ vont de E dans H, et, pour tout $x \in E$, elles valent $h\big(g(f(x))\big)$ (F13) : elles sont égales (F07). De même, $f \circ \mathrm{Id}_E$ et $\mathrm{Id}_F \circ f$ vont de E dans F et valent $f(x)$ en tout $x \in E$.

Étape 2. Supposons f et g injectives. Soit $(x, x') \in E^2$ tel que $g(f(x)) = g(f(x'))$. Comme g est injective, $f(x) = f(x')$; comme f est injective, $x = x'$ (F11).

Étape 3. Supposons f et g surjectives. Soit $z \in G$. Comme g est surjective, il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$; comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Donc $z = (g \circ f)(x)$ (F11).

Étape 4. Une bijection est injective et surjective (F12) : les étapes 2 et 3 donnent le dernier point.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Deux applications sont égales quand elles ont les mêmes ensembles et les mêmes valeurs : c'est ainsi qu'on prouve l'associativité. Pour l'injectivité et la surjectivité de $g \circ f$, on utilise les hypothèses **dans l'ordre inverse** de l'application : d'abord g, puis f.

Vérifie : Quelle hypothèse d'abord ?

Dans la preuve, on part de $g\big(f(x)\big) = g\big(f(x')\big)$. Quelle hypothèse utilise-t-on en premier ?

A. L'injectivité de f.

Faux.
Elle sert ensuite, une fois obtenue l'égalité $f(x) = f(x')$.

B. La surjectivité de g.

Faux.
La surjectivité ne permet pas de simplifier une égalité d'images.

C. L'injectivité de g.

Juste.
Juste : elle donne $f(x) = f(x')$.

D. Aucune : on simplifie directement.

Faux.
On ne « simplifie » pas par g sans savoir que g est injective.

Correction
g est appliquée en dernier : on la « retire » en premier. Comme g est injective, $g\big(f(x)\big) = g\big(f(x')\big)$ donne $f(x) = f(x')$. Comme f est injective, on obtient $x = x'$.

Exemple : une composée de bijections

Les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x + 1$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x - 2$ sont des bijections. On l'a montré à la section « Bijections, application réciproque », avec $f^{-1}(y) = \dfrac{y-1}{2}$ et $g^{-1}(y) = \dfrac{y+2}{3}$.

D'après le résultat précédent, $g \circ f$ est bijective. Calculons-la : pour tout réel x,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= 3(2x+1) - 2 \\ &= 6x + 1.\end{aligned}$$

Vérification directe : pour tous réels x et y, $6x+1=y \Leftrightarrow x=\dfrac{y-1}{6}$. Chaque réel a bien un seul antécédent (existence : surjectivité ; unicité : injectivité).

Les hypothèses comptent. Avec $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto 2x+1$, injective, et $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^2$, non injective : $(u\circ f)(x)=(2x+1)^2$, et $(u\circ f)(-1)=(u\circ f)(0)=1$, avec $-1\neq 0$. La composée n'est pas injective.

À toi : Deux composées sur les entiers

Soit $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $n\mapsto 2n$, et $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $n\mapsto n+1$. (a) Calcule $g\circ f$ et $f\circ g$. (b) Sont-elles égales ? (c) Montre que $g\circ f$ est injective. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Applique la méthode : $(g\circ f)(n)=g\big(f(n)\big)$.
Indice 2
Pour (b), regarde si chaque résultat est pair ou impair.
Indice 3
Point délicat : pour (c), montre d'abord que f et g sont injectives, puis cite le résultat sur les composées.

Réponse
(a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$: $(g\circ f)(n)=g(2n)=2n+1$ et $(f\circ g)(n)=f(n+1)=2n+2$. Les deux vont de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

(b) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $2n+1$ est impair et $2n+2$ est pair : les valeurs diffèrent toujours. Donc $g\circ f\neq f\circ g$.

(c) f est injective : soit $(n,m)\in\mathbb{N}^2$ tel que $2n=2m$; alors $n=m$. De même, g est injective : si $n+1=m+1$, alors $n=m$.

D'après le résultat sur les composées, $g\circ f$ est injective.

Réciproque et composée

Aller et revenir

Devine : Aller et retour

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto 2x+1$, et $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $y\mapsto\dfrac{y-1}{2}$. Pour un réel x, que vaut $g\big(f(x)\big)$?

A. x
Juste.
Juste : $g(2x+1)=\dfrac{2x+1-1}{2}=x$.

B. $4x+3$
Faux.

C'est $f\big(f(x)\big)$: on a appliqué f deux fois.

C. 1

Faux.

Le résultat dépend de x : essaie avec $x = 0$, puis $x = 5$.

D. $\dfrac{1}{2x+1}$

Faux.

g n'est pas « un sur f » : on remplace y par $2x+1$ dans la formule de g.

Correction

Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g\big(f(x)\big) &= g(2x+1) \\ &= \frac{(2x+1)-1}{2} \\ &= x. \end{aligned}$$

La machine g défait ce que fait f. Dans l'autre sens aussi : pour tout réel y, $f\big(g(y)\big) = 2 \times \dfrac{y-1}{2} + 1 = y$.

Une application qui défait f dans les deux sens, c'est exactement sa réciproque.

Pourquoi est-ce vrai ? Si $g \circ f$ est l'identité, deux éléments de même image se confondent. Si $f \circ g$ l'est aussi, chaque élément d'arrivée a un antécédent. La preuve vérifie ces deux faits.

Une réciproque explicite

Propriété : Bijection et application réciproque

Soit $f : E \to F$ une application.

- Si f est bijective, alors $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$.
- Réciproquement, s'il existe une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$, alors f est bijective et $g = f^{-1}$.

Démonstration

Étape 1. Supposons f bijective. Soit $x \in E$: x est l'unique antécédent de $f(x)$, donc $f^{-1}(f(x)) = x$ (F12). Soit $y \in F$: $f^{-1}(y)$ est un antécédent de y, donc $f(f^{-1}(y)) = y$. Les deux égalités d'applications viennent de F07.

Étape 2. Supposons qu'une telle g existe. Soit $(x, x') \in E^2$ tel que $f(x) = f(x')$. Alors $g(f(x)) = g(f(x'))$, donc $x = x'$ car $g \circ f = \mathrm{Id}_E$: f est injective. Soit $y \in F$: $x = g(y)$ est un élément de E et $f(x) = f(g(y)) = y$ car $f \circ g = \mathrm{Id}_F$: f est surjective. Donc f est bijective (F12).

Étape 3. Pour tout $y \in F$, $g(y)$ est un antécédent de y (étape 2) ; comme cet antécédent est unique, $g(y) = f^{-1}(y)$. Les applications g et f^{-1} vont de F dans E : $g = f^{-1}$ (F07).

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour démontrer qu'une application est bijective, on peut **proposer** sa réciproque. On vérifie alors **deux** composées : $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ donne l'injectivité, $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ donne la surjectivité. Et l'unicité de l'antécédent donne $g = f^{-1}$.

Vérifie : Que faut-il vérifier ?

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to E$. Que suffit-il de vérifier pour conclure, avec ce résultat, que f est bijective et que $g = f^{-1}$?

A. $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ seulement.

Faux.

Cette égalité donne l'injectivité de f, pas sa surjectivité.

B. $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ seulement.

Faux.

Cette égalité donne la surjectivité de f, pas son injectivité.

C. Que g est injective.

Faux.

Il faut relier g à f : une propriété de g seule ne dit rien de f.

D. $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.

Juste.

Juste : ce sont les deux hypothèses du second point.

Correction

Le second point demande les **deux** égalités : $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$. Alors f est bijective, et $g = f^{-1}$. Une seule égalité ne suffit pas, comme le montre l'exemple qui suit.

Exemple : Contre-exemple : une seule composée ne suffit pas

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n+1$, et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par :

$$g(n) = \begin{cases} n-1 & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g\big(f(n)\big) = g(n+1) = n$: $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.

Mais $f\big(g(0)\big) = f(0) = 1$ et $1 \neq 0$: $f \circ g \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$. Et f n'est pas bijective : 0 n'a pas d'antécédent.

Réciproque d'une composée

Tu mets tes chaussettes, puis tes chaussures. Pour te déchausser, tu enlèves d'abord les chaussures.

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve propose $f^{-1} \circ g^{-1}$ comme réciproque de $g \circ f$. Puis elle vérifie les deux composées, grâce à l'associativité.

Propriété : Réciproque d'une réciproque, réciproque d'une composée

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux bijections. Alors :

- f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$;
- $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration

Étape 1. D'après F15, $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$. Appliquons le second point de F15 à l'application $f^{-1} : F \to E$, avec f dans le rôle de g : f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Étape 2. Posons $k = f^{-1} \circ g^{-1}$, de G dans E. Par l'associativité appliquée deux fois, F15, puis $\mathrm{Id}_F \circ g^{-1} = g^{-1}$ (F14) : $(g \circ f) \circ k = g \circ \big((f \circ f^{-1}) \circ g^{-1}\big) = g \circ (\mathrm{Id}_F \circ g^{-1}) = g \circ g^{-1} = \mathrm{Id}_G$.

Étape 3. De même, $k \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ \big((g^{-1} \circ g) \circ f\big) = f^{-1} \circ (\mathrm{Id}_F \circ f) = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$.

Étape 4. D'après le second point de F15, appliqué à $g \circ f$ avec k, l'application $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = k = f^{-1} \circ g^{-1}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve n'invente rien : elle **réutilise** la caractérisation par une réciproque explicite. On propose un candidat, on calcule les deux composées par associativité, et on conclut. Retiens l'ordre : $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. On défait d'abord la dernière machine.

Vérifie : Défaire dans le bon ordre

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux bijections. Quelle est la réciproque de $g \circ f$?

A. $g^{-1} \circ f^{-1}$

Faux.
On défait d'abord g, la dernière appliquée : c'est g^{-1} qui s'applique en premier.

B. $f^{-1} \circ g^{-1}$

Juste.
Juste : on applique g^{-1}, puis f^{-1}.

C. $\dfrac{1}{g \circ f}$

Faux.
La réciproque n'est pas un inverse numérique.

D. $f \circ g$
Faux.
$f \circ g$ ne défait rien, et n'est même pas toujours définie.

Correction
D'après le résultat, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. Elle va de G dans E : on applique g^{-1}, de G dans F, puis f^{-1}, de F dans E. L'ordre s'inverse, comme pour les chaussettes et les chaussures.

Exemple : l'ordre s'inverse

Les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x + 1$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x - 2$ sont des bijections. On l'a montré à la section « Bijections, application réciproque », avec $f^{-1}(y) = \dfrac{y-1}{2}$ et $g^{-1}(y) = \dfrac{y+2}{3}$. Et $(g \circ f)(x) = 6x + 1$.

Pour tout réel y :

$$\begin{aligned}\left(f^{-1} \circ g^{-1}\right)(y) &= \frac{1}{2}\left(\frac{y+2}{3} - 1\right) \\ &= \frac{y-1}{6}.\end{aligned}$$

C'est bien la réciproque de $x \mapsto 6x + 1$.

Dans le mauvais ordre, $\left(g^{-1} \circ f^{-1}\right)(y) = \dfrac{y+3}{6}$: ce n'est pas la réciproque.

À toi

À toi : Proposer une réciproque

Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Vérifie que f est bien définie. Puis, en proposant une réciproque, montre que f est bijective et détermine f^{-1}. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Un inverse n'est jamais nul : vérifie que $f(x) \in \mathbb{R}^*$.
Indice 2
Pour $y \in \mathbb{R}^*$, résous $\dfrac{1}{x} = y$ dans $\mathbb{R}^*$: la solution te suggère une application $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$.
Indice 3
Point délicat : il faut vérifier les deux composées, $g \circ f$ et $f \circ g$, pour la réciproque proposée g.

Réponse
Bien définie. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{1}{x}$ existe, et $\dfrac{1}{x} \neq 0$, car $x \times \dfrac{1}{x} = 1$. Donc $f(x) \in \mathbb{R}^*$.

Réciproque proposée. Posons $g = f$, de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$(g \circ f)(x) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x.$$

Donc $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^*}$. Comme $g = f$, le même calcul donne $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^*}$.

Conclusion. D'après la caractérisation par une réciproque, f est bijective, et $f^{-1} = f$.

Remarque : Coin devoir : la réciproque explicite

En devoir, une réciproque proposée se vérifie dans les **deux** sens. Écris : « Posons $g : F \to E$, $y \mapsto \ldots$ Pour tout $x \in E$, $(g \circ f)(x) = \cdots = x$. Pour tout $y \in F$, $(f \circ g)(y) = \cdots = y$. Donc f est bijective, et $f^{-1} = g$. » Vérifie aussi que $g(y)$ appartient bien à E. Cette rédaction te servira jusqu'à l'examen de 2BAC SM.

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir : quelle méthode pour quel « montrer que »

- « $A \subset B$ » : soit $x \in A$, … donc $x \in B$.
- « $A = B$ » : double inclusion, ou équivalences réversibles. Pour réfuter, un élément de l'un hors de l'autre.
- « Déterminer $f^{-1}(B)$ » : résoudre $f(x) \in B$. « Déterminer $f(A)$ » : résoudre $f(x) = y$ avec $x \in A$.
- « f est injective » : soit $f(x) = f(x')$, … donc $x = x'$. Pour réfuter, deux éléments distincts de même image.
- « f est surjective » : soit $y \in F$, un antécédent **dans** E. Pour réfuter, un y sans antécédent.
- « f est bijective » : une solution unique de $f(x) = y$, ou une réciproque vérifiée dans les deux sens.

Le mot du prof. Tu as rédigé tes premières preuves sur des ensembles et des applications : « soit », double inclusion, contraposée, absurde. Ce vocabulaire sert toute l'année. Au chapitre suivant, tu le retrouveras pour étudier les fonctions numériques.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Ensembles et applications » (1bac · sciences-mathematiques · mathematiques)