BURHAN

Devoir surveillé n° 2, semestre 2

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/devoirs/devoir-2-semestre-2

Semestre	Durée	Barème
Semestre 2	2h	20 pts (barème indicatif BURHAN)

Durée : deux heures. La calculatrice non programmable est autorisée. Les quatre exercices sont indépendants les uns des autres. Chaque résultat doit être justifié ; la précision des calculs et la qualité de la rédaction sont prises en compte.

Exercice 1 — 5,5 pts

Vecteurs de l'espace dans un cube

$ABCDEFGH$ est un cube : $ABCD$ et $EFGH$ sont deux faces opposées et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH}$. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$; ces trois vecteurs ne sont pas coplanaires.

On note K le centre de gravité du triangle BDE, I le milieu de l'arête $[EF]$, J le milieu de l'arête $[DH]$ et M le milieu de l'arête $[BC]$. Aucun repère n'est utilisé dans cet exercice.

1 — 0,5 pts

Écrire chacun des vecteurs $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$ comme combinaison de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

2 — 1 pts

Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$ ne sont pas coplanaires.

INDICE

Montrer d'abord que $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$ ne sont pas colinéaires, puis supposer que $\overrightarrow{AG}$ s'écrit $a\overrightarrow{BD} + b\overrightarrow{BE}$ et identifier les coefficients de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

3.a — 1 pts

Montrer que $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$.

3.b — 0,75 pts

En déduire que la droite (AG) coupe le plan (BDE) au point K (on pourra utiliser les questions 2 et 3.a).

4 — 1 pts

Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{BD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BE}$. En déduire que la droite (IJ) est parallèle au plan (BDE).

5 — 1,25 pts

Montrer que \overrightarrow{IM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BE} $, puisque les plans (IJM) et (BDE)$ sont parallèles.

Exercice 2 — 5 pts

Droites et plans en coordonnées

L'espace est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(1, 0, 2)$, $B(2, 1, 1)$ et $C(0, 3, 2)$.

On considère aussi la droite (D) de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -1 - 2t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 + t \end{cases}$$

et la droite (Δ) définie par le système

$$\begin{cases} x + z - 2 = 0 \\ y - 3 = 0 \end{cases}$$

On note F le point de (D) de paramètre $t = 0$ et $\vec{u}(2, -2, 1)$ un vecteur directeur de (D).

1 — 0,5 pts

Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2 — 1,25 pts

À l'aide d'un déterminant, montrer que $3x + y + 4z - 11 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

3 — 1 pts

Montrer que la droite (D) coupe le plan (ABC) en un point L dont on déterminera les coordonnées.

4.a — 0,5 pts

Vérifier que le point C appartient à (Δ), puis montrer que $\vec{v}(1, 0, -1)$ dirige (Δ) et donner une représentation paramétrique de (Δ).

4.b — 0,75 pts

Montrer que les droites (D) et (Δ) ne sont pas coplanaires.

INDICE

Deux droites $D(F, \vec{u})$ et $D'(C, \vec{v})$ sont coplanaires si et seulement si un certain déterminant de trois vecteurs est nul.

5 — 1 pts

Déterminer une équation cartésienne du plan (Q) qui contient la droite (Δ) et qui est parallèle à la droite (D).

Exercice 3 — 5 pts

Sphère, plans et droite

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère l'ensemble (S) des points $M(x,y,z)$ tels que

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+5=0,$$

le plan (P) d'équation $2x-y+2z-1=0$ et le plan (Q) d'équation $x+2y-2=0$.

1 — 0,75 pts

Montrer que (S) est une sphère dont on précisera le centre Ω et le rayon R.

2.a — 0,75 pts

Calculer la distance du point Ω au plan (P). En déduire que (P) est tangent à (S).

2.b — 0,75 pts

Déterminer les coordonnées du point de contact H de (P) et de (S).

INDICE

Chercher H sur la droite issue de Ω et dirigée par un vecteur normal à (P).

3 — 1 pts

Montrer que le plan (Q) coupe la sphère (S) suivant un cercle dont on déterminera le centre ω et le rayon r.

4 — 1 pts

On considère la droite (L) de représentation paramétrique $x=1+t, y=1-t, z=3+t$ ($t\in\mathbb{R}$). Montrer que (L) coupe (S) en deux points dont on déterminera les coordonnées ; on note A celui dont la cote est la plus grande et B l'autre.

5 — 0,75 pts

Déterminer une équation cartésienne du plan (T) tangent à la sphère (S) au point A.

Exercice 4 — 4,5 pts

Produit vectoriel et tétraèdre

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(1, 2, 0)$, $B(3, 0, 1)$, $C(0, 1, 2)$ et $D(2, 3, 4)$.

1 — 0,75 pts

Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2 — 0,5 pts

Calculer l'aire du triangle ABC.

3 — 0,75 pts

En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

4 — 0,75 pts

Calculer la distance du point C à la droite (AB), puis retrouver l'aire du triangle ABC.

5.a — 1 pts

Montrer que le point D n'appartient pas au plan (ABC) et calculer la distance de D au plan (ABC).

5.b — 0,75 pts

En déduire le volume du tétraèdre $ABCD$. On rappelle que le volume d'un tétraèdre est le tiers du produit de l'aire d'une face par la hauteur relative à cette face.

SOURCES

BURHAN