BURHAN

Devoir surveillé n° 2, semestre 1

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/devoirs/devoir-2-semestre-1

Semestre	Durée	Barème
Semestre 1	2h	20 pts (barème indicatif BURHAN)

Durée : deux heures. L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé. Les quatre exercices sont indépendants. Toute réponse doit être justifiée ; la clarté de la rédaction et la rigueur des raisonnements entrent dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 — 5 pts

Calcul trigonométrique

Pour tout réel x, on pose $f(x) = (\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin x$.

Les questions 1 à 4 s'enchaînent ; la question 5 est indépendante des précédentes.

1 — 0,75 pts

En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calculer les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et de $\sin\frac{\pi}{12}$.

2 — 1 pts

Montrer que, pour tout réel x : $f(x) = 4\cos\left(x - \frac{\pi}{12}\right)$.

INDICE

Calculer a^2+b^2 avec $a=\sqrt{6}+\sqrt{2}$ et $b=\sqrt{6}-\sqrt{2}$, puis utiliser la question 1.

3 — 0,75 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 2\sqrt{2}$.

4 — 1,25 pts

Résoudre dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ l'inéquation $f(x) \geq 2\sqrt{2}$, puis représenter l'ensemble de ses solutions sur le cercle trigonométrique.

5.a — 0,75 pts

Montrer que, pour tout réel x : $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2(2x)$.

5.b — 0,5 pts

En déduire la valeur exacte de $\cos^4\frac{\pi}{12} + \sin^4\frac{\pi}{12}$.

Exercice 2 — 5 pts

Droites et cercle dans un repère orthonormé

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère l'ensemble $(\mathcal{C})$ des points $M(x; y)$ tels que $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$, et le point $A(5; 3)$.

1 — 0,75 pts

Montrer que $(\mathcal{C})$ est un cercle dont on précisera le centre Ω et le rayon R, puis vérifier que A appartient à $(\mathcal{C})$.

2 — 0,75 pts

Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) au cercle $(\mathcal{C})$ au point A.

3 — 1 pts

Pour tout réel m, on note (Δ_m) la droite d'équation $4x - 3y + m = 0$. Étudier, suivant les valeurs de m, la position relative de (Δ_m) et de $(\mathcal{C})$.

4 — 1 pts

On prend $m = 4$. Déterminer les coordonnées des points E et F d'intersection de (Δ_4) et de $(\mathcal{C})$, E étant celui d'abscisse positive.

5 — 1,5 pts

Montrer que, pour tout point $M(x; y)$ de $(\mathcal{C})$: $-5\sqrt{5} \leq x + 2y \leq 5\sqrt{5}$. Déterminer le point de $(\mathcal{C})$ en lequel $x + 2y = 5\sqrt{5}$.

INDICE

Écrire $x + 2y$ comme le produit scalaire de $\vec{u}(1; 2)$ et de $\overrightarrow{\Omega M}$.

Exercice 3 — 4,25 pts

Rotations dans un carré

Le plan est orienté. $ABCD$ est un carré de centre O tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. M est un point du segment $[AB]$, distinct de A et de B, et N est le point du segment $[BC]$ tel que $BN = AM$.

On note r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1 — 1,25 pts

Déterminer $r(A)$ et $r(B)$, puis montrer que $r(M) = N$.

INDICE

Utiliser les propriétés des diagonales du carré, puis l'image du segment $[AB]$ par r et la conservation des distances.

2 — 0,5 pts

En déduire la nature du triangle OMN.

3 — 0,75 pts

Déterminer $r(D)$, puis montrer que $DM = AN$ et que les droites (DM) et (AN) sont perpendiculaires.

4.a — 0,75 pts

On note r_1 la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, r_2 la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et, pour toute droite (Δ), $s_{(\Delta)}$ la symétrie axiale d'axe (Δ). Vérifier que $r_1 = s_{(AC)} \circ s_{(AB)}$ et que $r_2 = s_{(CB)} \circ s_{(CA)}$.

4.b — 1 pts

En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $r_2 \circ r_1$.

Exercice 4 — 5,75 pts

Limites d'une fonction

Les deux parties sont indépendantes.

1.a — 0,75 pts

Partie I. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)$.

1.b — 0,75 pts

Calculer $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4}$.

1.c — 1 pts

Calculer $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{2\cos x-1}{3x-\pi}$.

INDICE

Poser $t=x-\frac{\pi}{3}$ et développer $\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)$.

1.d — 0,75 pts

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+\cos x}{x+1}$.

2.a — 1 pts

Partie II. Soit a un réel strictement positif et g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$g(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}\ \text{ si } x<0, \qquad g(x)=\frac{\sqrt{1+ax}-1}{x}\ \text{ si } x>0.$$

Calculer $\lim\limits_{x\to 0^-}g(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)$.

2.b — 0,5 pts

Déterminer la valeur de a pour laquelle g admet une limite en 0. Pour cette valeur, on note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui coïncide avec g sur $\mathbb{R}^*$ et telle que $h(0)=\frac{1}{2}$; vérifier que $\lim\limits_{x\to 0}h(x)=h(0)$.

2.c — 1 pts

On suppose $a=1$. Montrer que, pour tout réel $x<0$: $0\le g(x)\le\frac{2}{x^2}$. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$, puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.

SOURCES

BURHAN