BURHAN

Devoir surveillé n° 1, semestre 2

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/devoirs/devoir-1-semestre-2

Semestre	Durée	Barème
Semestre 2	2h	20 pts (barème indicatif BURHAN)

Durée : deux heures. La calculatrice non programmable est autorisée. Les quatre exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. Chaque résultat doit être justifié ; la précision des raisonnements et la qualité de la rédaction comptent dans la note.

Exercice 1 — 5 pts

Dérivabilité d'une fonction définie par morceaux

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x) = \sqrt{x^2+3}$ lorsque $x \leq 1$;
- $f(x) = 2 + (x-1)\sqrt{x-1}$ lorsque $x > 1$.

On note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et A le point de $(\mathcal{C}_f)$ d'abscisse 1.

1 — 0,5 pts

Calculer $f(1)$, puis montrer que f est continue au point 1.

2.a — 0,75 pts

En revenant à la définition, montrer que f est dérivable à gauche au point 1 et que $f'_g(1) = \frac{1}{2}$.

INDICE

Multiplier le numérateur et le dénominateur du taux d'accroissement par $\sqrt{x^2+3}+2$.

2.b — 1,25 pts

Étudier la dérivabilité de f à droite au point 1. La fonction f est-elle dérivable en 1 ? Interpréter géométriquement les résultats obtenus au point A.

3 — 0,75 pts

Justifier que f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty; 1[$ et $]1; +\infty[$, puis calculer $f'(x)$ sur chacun d'eux.

4 — 1 pts

Écrire une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point B d'abscisse -1. En déduire, grâce à l'approximation affine de f au voisinage de -1, une valeur approchée du nombre $\sqrt{3{,}9801}$.

5 — 0,75 pts

Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f (les limites en $-\infty$ et $+\infty$ sont $+\infty$; les justifier brièvement).

Exercice 2 5 pts

Étude et représentation d'une fonction rationnelle

Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{x^2+x+4}{x+1}$, et $(\mathcal{C}_g)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1 0,5 pts

Déterminer l'ensemble de définition D_g de g, puis vérifier que $g(x) = x + \frac{4}{x+1}$ pour tout $x \in D_g$.

2 0,75 pts

Calculer les limites de g en $-\infty$, en $+\infty$, à gauche et à droite en -1. Interpréter graphiquement les limites en -1.

3 0,75 pts

Montrer que la droite $(\Delta) : y = x$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C}_g)$ en $-\infty$ et en $+\infty$, puis étudier la position relative de $(\mathcal{C}_g)$ et de (Δ).

4 1 pts

Montrer que, pour tout $x \in D_g$, $g'(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$, puis dresser le tableau de variations de g.

5 0,75 pts

Montrer que le point $\Omega(-1; -1)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_g)$.

6 0,5 pts

Montrer que $g''(x) = \frac{8}{(x+1)^3}$ pour $x \in D_g$, étudier la concavité de $(\mathcal{C}_g)$ et dire si elle admet un point d'inflexion.

7 0,75 pts

Tracer (Δ) et $(\mathcal{C}_g)$.

Exercice 3 — 5 pts

PGCD, congruences modulo 7 et calcul dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

La question 1 est indépendante des questions 2 à 4.

1.a — 0,75 pts

À l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer $\text{pgcd}(1386;546)$.

1.b — 1 pts

Décomposer 1386 et 546 en produits de facteurs premiers, puis calculer $\text{ppcm}(1386;546)$.

2 — 1 pts

Vérifier que $2^3 \equiv 1\ [7]$. En déduire, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 2^n par 7, puis le reste de 2^{2026} dans la division par 7.

3 — 1 pts

Déterminer les entiers naturels n tels que 7 divise 2^n+3. En déduire que le nombre $2^{2027}+3$ n'est pas premier.

4 — 1,25 pts

Résoudre dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ l'équation $x^2+x+\overline{1}=\overline{0}$. En déduire les entiers naturels n tels que 7 divise 4^n+2^n+1.

INDICE

Poser $y=2^n$ et remarquer que $4^n=y^2$.

Exercice 4 — 5 pts

Tirages dans une urne et formule du binôme

Une urne contient neuf boules indiscernables au toucher : quatre rouges, trois vertes et deux blanches. Les parties 1 à 3 décrivent trois façons différentes de tirer trois boules de cette urne ; la partie 4 est indépendante.

1 — 1,25 pts

On tire **simultanément** trois boules de l'urne. Déterminer le nombre de tirages possibles, le nombre de tirages contenant une boule de chaque couleur, puis le nombre de tirages contenant au moins une boule blanche.

2 — 1 pts

On tire **successivement et sans remise** trois boules de l'urne. Déterminer le nombre de tirages possibles, puis le nombre de tirages contenant exactement deux boules rouges.

3 — 1 pts

On tire **successivement et avec remise** trois boules de l'urne. Déterminer le nombre de tirages possibles, puis le nombre de tirages dont les trois boules sont de la même couleur.

4.a — 0,75 pts

À l'aide de la formule du binôme, déterminer le coefficient de x^3 dans le développement de $(2x-1)^6$.

4.b — 1 pts

Soit n un entier naturel non nul. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} C_n^k\, 2^k = 3^n$. Soit E un ensemble à n éléments : en déduire le nombre de couples $(A;B)$ de parties de E tels que $A \subset B$.

INDICE

Classer les couples $(A;B)$ selon le nombre d'éléments de B.

SOURCES

BURHAN