BURHAN

Devoir surveillé n° 1, semestre 1

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/devoirs/devoir-1-semestre-1

Semestre	Durée	Barème
Semestre 1	2h	20 pts (barème indicatif BURHAN)

Durée : deux heures. L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé. Les quatre exercices sont indépendants. Toute réponse doit être justifiée ; la clarté de la rédaction et la rigueur des raisonnements entrent dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 — 4 pts

Quantificateurs et raisonnements

Les quatre parties de cet exercice sont indépendantes.

1.a — 0,75 pts

On considère la proposition P : « $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y^2 = 1$ ». Écrire la négation de P, puis déterminer la valeur de vérité de P.

1.b — 0,5 pts

On considère la proposition Q : « $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x \geq a$ ». Montrer que Q est vraie, puis écrire sa négation.

2 — 1 pts

Soit x et y deux réels de l'intervalle $]1; +\infty[$. Montrer, par contraposée, que : $x \neq y \implies x^2 - 2x \neq y^2 - 2y$.

3 — 0,75 pts

Montrer, par l'absurde, que pour tout entier naturel n non nul, le réel $\sqrt{n^2 + 1}$ n'est pas un entier.

4 — 1 pts

Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, le nombre $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

INDICE

Écrire $3^{2n+3} = 9 \times 3^{2n+1}$ et $2^{n+3} = 2 \times 2^{n+2}$, puis faire apparaître $9\left(3^{2n+1} + 2^{n+2}\right)$.

Exercice 2 — 6 pts

Application bornée, monotonie et restriction bijective

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$, et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1 — 0,25 pts

Montrer que f est une fonction impaire.

2 — 0,75 pts

Montrer que, pour tout réel x : $-1 \leq f(x) \leq 1$. En déduire que f est bornée, puis que f admet sur $\mathbb{R}$ un maximum et un minimum, que l'on précisera.

3.a — 0,75 pts

Montrer que, pour tous réels x et y distincts : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = \dfrac{4(4-xy)}{(x^2+4)(y^2+4)}$.

3.b — 1,25 pts

En déduire que f est strictement croissante sur $[0;2]$ et strictement décroissante sur $[2;+\infty[$, puis, en utilisant l'imparité de f, dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

4 — 1 pts

Calculer $f(1)$ et $f(4)$. L'application f est-elle injective ? Est-elle surjective ? Déterminer l'image réciproque $f^{-1}\left(\left\{\frac{4}{5}\right\}\right)$.

5 — 2 pts

On note g la restriction de f à l'intervalle $I = [2;+\infty[$. Montrer que g est une bijection de I sur $J =]0;1]$, et déterminer $g^{-1}(y)$ pour tout $y \in J$.

INDICE

Pour $y \in J$, résoudre l'équation $g(x) = y$ d'inconnue $x \in I$; le produit des deux racines du trinôme obtenu vaut 4.

Exercice 3 — 5 pts

Suite récurrente et suite géométrique auxiliaire

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 2}$. On note φ la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $\varphi(x) = \dfrac{3x + 2}{x + 2}$, de sorte que $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

1 — 0,25 pts

Calculer u_1 et u_2.

2.a — 0,5 pts

Vérifier que, pour tout réel $x \geq 0$: $\varphi(x) = 3 - \dfrac{4}{x + 2}$, et en déduire que φ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

2.b — 0,75 pts

Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $1 \leq u_n < 2$.

3 — 0,75 pts

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(2 - u_n)(1 + u_n)}{u_n + 2}$, puis en déduire la monotonie de la suite (u_n).

4.a — 0,75 pts

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 1}$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique, dont on précisera la raison et le premier terme.

4.b — 1 pts

Exprimer v_n en fonction de n, puis montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{4^{n+1} - 1}{2 \times 4^n + 1}$.

5 — 1 pts

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et $T_n = \dfrac{1}{u_0 + 1} + \dfrac{1}{u_1 + 1} + \cdots + \dfrac{1}{u_n + 1}$. Calculer S_n en fonction de n, vérifier que $\dfrac{1}{u_n + 1} = \dfrac{1 - v_n}{3}$, puis en déduire T_n en fonction de n.

INDICE

Calculer $1 - v_n$ à partir de la définition de v_n, puis utiliser la somme S_n.

Exercice 4 5 pts

Barycentres, droites concourantes et lieux de points

Soit ABC un triangle. On note I, J et K les barycentres respectifs des systèmes pondérés $\{(A,1);(B,3)\}$, $\{(B,3);(C,2)\}$ et $\{(A,1);(C,2)\}$, et G le barycentre du système $\{(A,1);(B,3);(C,2)\}$.

1 1 pts

Exprimer $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BJ}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$, puis construire les points I, J et K.

2 1,25 pts

Montrer que les droites (AJ), (BK) et (CI) sont concourantes en G, et que G est le milieu du segment $[BK]$.

3 1 pts

Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\| = 3\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right\|$.

4 0,5 pts

Déterminer l'ensemble (Δ) des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MC}\right\|$.

5 1,25 pts

Pour tout réel $m \neq -3$, on note G_m le barycentre du système $\{(A,1);(B,m);(C,2)\}$. Justifier l'existence de G_m, montrer que G_m appartient à la droite (BK), puis déterminer l'ensemble des points G_m lorsque m décrit $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.

INDICE

Utiliser le barycentre partiel K, puis exprimer $\overrightarrow{KG_m}$ en fonction de $\overrightarrow{KB}$ et chercher quelles valeurs prend le coefficient obtenu.

SOURCES

BURHAN