BURHAN

Résumé : Dérivabilité

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/derivabilite/resume

Chapitre	Semestre
Dérivabilité	Semestre 2

Nombre dérivé

Définition : Nombre dérivé, dérivabilité en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, et $a \in I$. On dit que f est **dérivable en** a si le taux de variation $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une **limite finie** ℓ quand x tend vers a. Ce réel ℓ est le **nombre dérivé** de f en a ; on le note $f'(a)$:

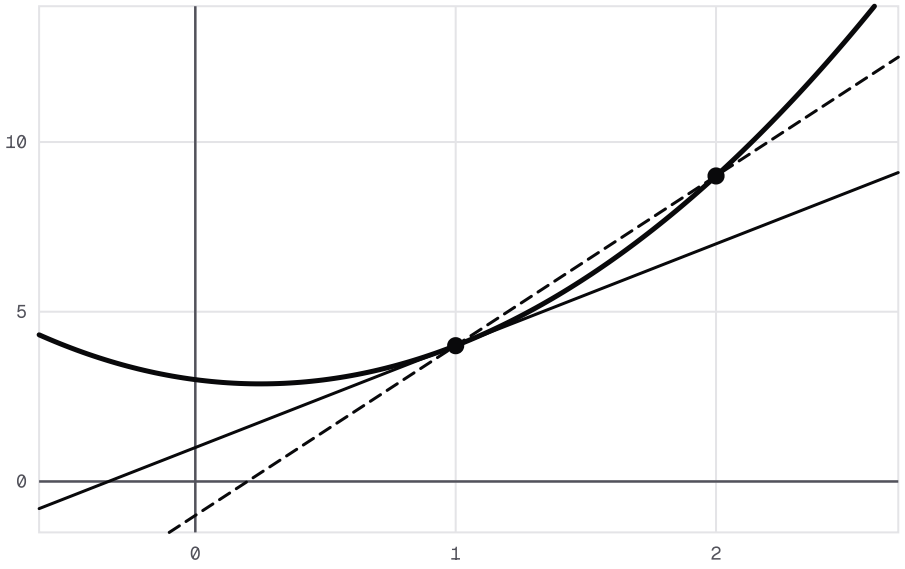
$$\begin{aligned} & f'(a) \\ & = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \\ & = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}. \end{aligned}$$

Les deux écritures sont équivalentes : on pose $x = a + h$ (propriété « se ramener à une limite en 0 » du chapitre « Limite d'une fonction numérique »). Si la limite est infinie, ou n'existe pas, f n'est pas dérivable en a.

À retenir : Lire la définition

Le nombre dérivé est la limite d'un taux de variation. Ce taux mesure la pente de la sécante qui joint les points d'abscisses a et $a + h$.

Quand h tend vers 0, cette pente se stabilise : sa limite est $f'(a)$. Si la limite est infinie, ou n'existe pas, il n'y a pas de nombre dérivé.



Pour f : x ↦ 2x² − x + 3 et a = 1 : la sécante qui joint les points d'abscisses a et a + h, ici avec h = 1, a pour pente le taux de variation ; quand h tend vers 0, elle tend vers la tangente en A, de pente f'(1) = 3.

Propriété : Dérivabilité et écriture affine au voisinage de a

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, et $a \in I$.

1. f est dérivable en a si et seulement s'il existe un réel ℓ et une fonction φ, définie pour les h tels que $a + h \in I$, avec $\lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$, $\varphi(0) = 0$ et, pour tous ces h :

$$f(a + h) = f(a) + \ell h + h\varphi(h).$$

   Dans ce cas, $\ell = f'(a)$.

2. Si f est dérivable en a, alors $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

À retenir : Ce que dit l'écriture affine

Près de a, $f(a + h)$ vaut $f(a) + f'(a)h$, plus un terme $h\varphi(h)$ très petit devant h.

Retiens aussi la conséquence : si f est dérivable en a, alors $f(x)$ tend vers $f(a)$ quand x tend vers a. La réciproque est fausse.

Méthode : nombre dérivé par la définition

1. **Pose** le taux $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$, pour $h \neq 0$ et $a + h$ dans l'ensemble de définition.
2. **Développe** $f(a + h)$, puis simplifie par h. Devant une racine carrée, passe par la quantité conjuguée.
3. **Passe à la limite** quand h tend vers 0, en nommant la règle employée.

4. **Conclus** : une limite finie ℓ donne $f'(a) = \ell$; sinon, f n'est pas dérivable en a.

Exemple

Énoncé. Calcule le nombre dérivé en -1 de la fonction $f : x \mapsto x^2 + 4x$.

Taux. Soit h un réel non nul. On a $f(-1) = -3$ et :

$$\begin{aligned} f(-1+h) &= 1 - 2h + h^2 \\ &\quad - 4 + 4h \\ &= -3 + 2h + h^2. \end{aligned}$$

Le taux vaut donc $\dfrac{2h + h^2}{h} = 2 + h$.

Limite. Par la limite d'un polynôme en 0, $2 + h$ tend vers 2.

Conclusion. f est dérivable en -1, et $f'(-1) = 2$.

Dérivabilité à droite et à gauche

Définition : Dérivabilité à droite, à gauche

Soit a un réel et $r > 0$.

- Soit f une fonction définie sur $[a, a + r[$. On dit que f est **dérivable à droite en** a si $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie quand x tend vers a à droite. Cette limite est le **nombre dérivé à droite** de f en a : $f'_d(a) = \lim_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.
- Soit f une fonction définie sur $]a - r, a]$. On définit de même la **dérivabilité à gauche** en a et le **nombre dérivé à gauche** $f'_g(a) = \lim_{x \to a^-} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Propriété : Dérivabilité et dérivabilités à droite et à gauche

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, et $a \in I$. Alors f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en a avec $f'_d(a) = f'_g(a)$. Dans ce cas, $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$.

Méthode : étudier un point de raccord

1. **Vérifie** que $f(x)$ tend vers $f(a)$ des deux côtés. Sinon, f n'est pas dérivable en a.
2. **Écris** le taux à droite avec l'expression valable pour $x > a$, et le taux à gauche avec celle valable pour $x < a$.
3. **Calcule** les deux limites.

4. **Conclus** : deux limites finies égales, f est dérivable en a ; finies et distinctes, point anguleux. Une limite infinie, avec $f(x)$ qui tend vers $f(a)$ (étape 1), donne une demi-tangente verticale.

Exemple

Énoncé. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - x^2$ si $x \leq 0$, et $f(x) = 1 + 3x$ si $x > 0$. Étudie sa dérivabilité en 0.

On a $f(0) = 1$.

À gauche. Pour $x < 0$, le taux vaut $\dfrac{1 - x^2 - 1}{x} = -x$, qui tend vers 0. Donc $f'_g(0) = 0$.

À droite. Pour $x > 0$, le taux vaut $\dfrac{1 + 3x - 1}{x} = 3$. Donc $f'_d(0) = 3$.

Conclusion. Les deux nombres diffèrent : f n'est pas dérivable en 0. Le point $A(0, 1)$ est un point anguleux.

Attention : Tendre vers f(a) ne suffit pas

Si f est dérivable en a, alors $f(x)$ tend vers $f(a)$. La réciproque est fausse.

Dans l'exemple précédent, $1 - x^2$ et $1 + 3x$ tendent tous deux vers $1 = f(0)$ quand x tend vers 0. Pourtant, f n'est pas dérivable en 0. Étudie donc toujours les deux taux.

Tangente, approximation affine, demi-tangentes

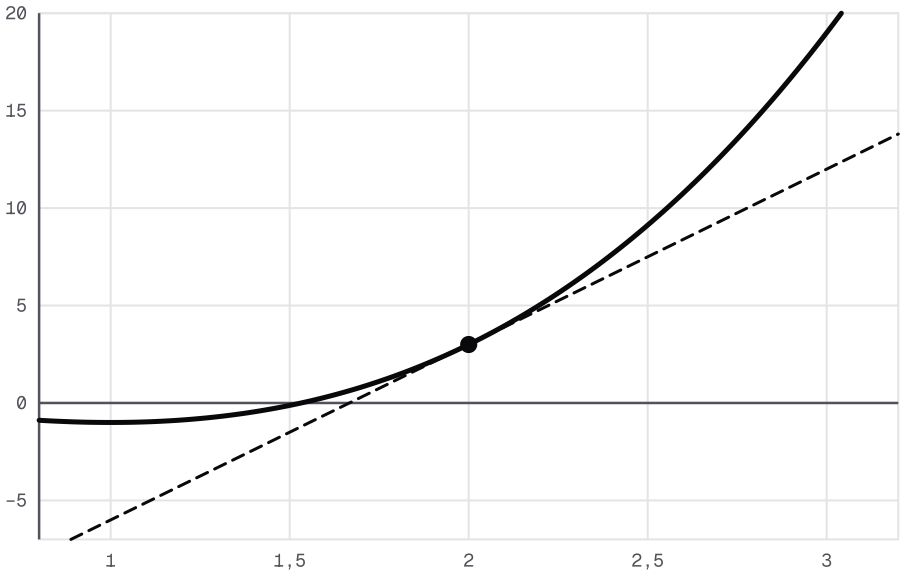
Définition : Tangente ; approximation affine

Soit f une fonction dérivable en a, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère.

- La **tangente** à $\mathcal{C}_f$ au point $A\big(a, f(a)\big)$ est la droite qui passe par A et a pour coefficient directeur $f'(a)$. Elle a pour équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

- La fonction affine $x \mapsto f(a) + f'(a)(x - a)$ est l'**approximation affine** de f au voisinage de a. Pour h proche de 0, on écrit $f(a + h) \approx f(a) + f'(a)h$: l'erreur commise est $h\varphi(h)$, avec $\lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$.



$y = x^3 - 3x + 1$ $y = 9x - 15$ Point plein A Point du graphe

Exemple avec f : x ↦ x³ – 3x + 1 et a = 2 : la tangente au point A(2, 3) a pour équation y = 9(x – 2) + 3, soit y = 9x – 15.

Méthode : équation d'une tangente

1. **Calcule** $f(a)$, puis $f'(a)$ en nommant la règle de dérivation.
2. **Remplace** dans $y = f'(a)(x - a) + f(a)$, puis réduis sous la forme $y = mx + p$.
3. **Contrôle** : le point $A\big(a, f(a)\big)$ vérifie l'équation trouvée.
4. **Approximation** : pour h proche de 0, écris $f(a + h) \approx f(a) + f'(a)h$, jamais une égalité.

Exemple

Énoncé. Soit $f : x \mapsto x^2 - x^3$. Cherche la tangente à sa courbe au point d'abscisse 2.

Calculs. On a $f(2) = 4 - 8 = -4$. Par la propriété de la somme et la dérivée des puissances, $f'(x) = 2x - 3x^2$ pour tout réel x. Donc $f'(2) = -8$.

Équation. La tangente a pour équation $y = -8(x - 2) - 4$, soit $y = -8x + 12$.

Contrôle. $-8 \times 2 + 12 = -4$.

Exemple

Énoncé. Donne une valeur approchée de $1{,}002^4$ sans calculatrice.

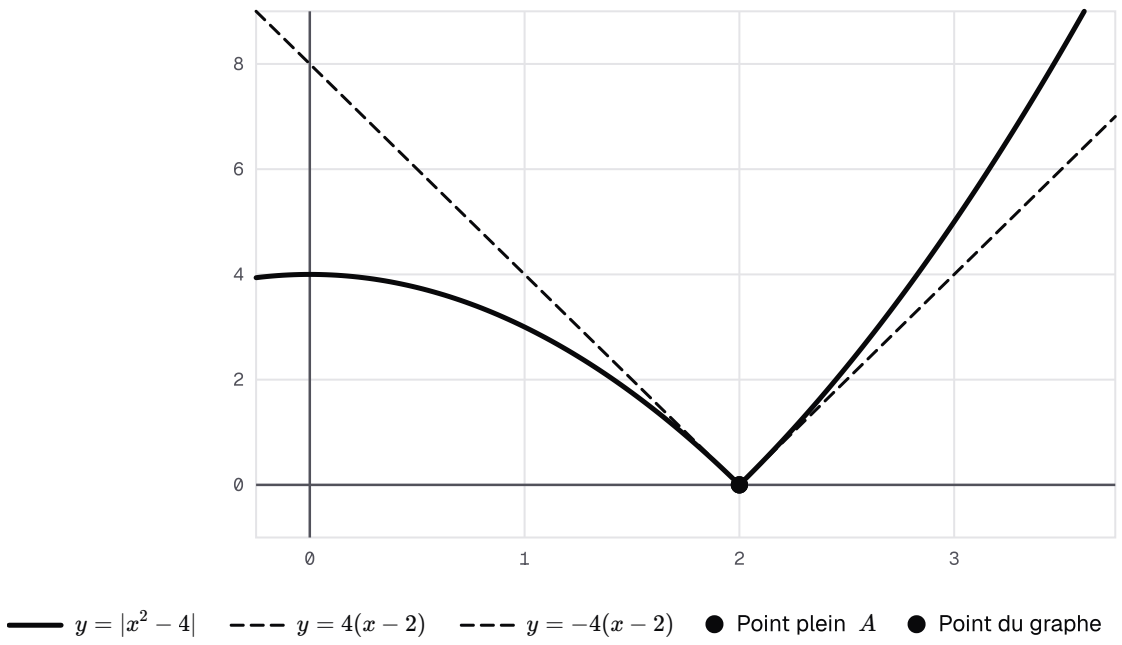
Approximation. La fonction $g : x \mapsto x^4$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $g'(x) = 4x^3$. En 1, $g(1) = 1$ et $g'(1) = 4$. Pour $h = 0{,}002$, on écrit $g(1 + h) \approx 1 + 4h = 1{,}008$.

Contrôle. La calculatrice donne $1{,}002^4 = 1{,}008024\ldots$: l'erreur est inférieure à 10^{-4}.

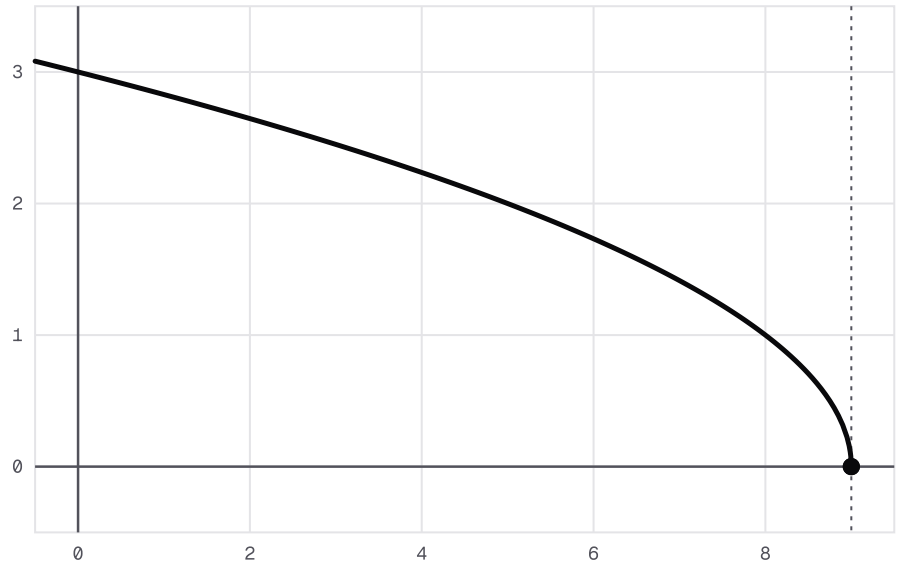
Définition : Demi-tangentes ; point anguleux

Soit f une fonction, a un réel, et $A\big(a, f(a)\big)$ le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a.

- Si f est dérivable à droite en a, la **demi-tangente à droite** à $\mathcal{C}_f$ en A est la demi-droite d'équation $y = f'_d(a)(x-a) + f(a)$, avec $x \geq a$. De même à gauche, avec $f'_g(a)$ et $x \leq a$.
- Si f est dérivable à droite et à gauche en a, avec $f'_d(a) \neq f'_g(a)$, le point A est un **point anguleux** de $\mathcal{C}_f$.
- Si $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ et si $\lim_{x \to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ ou $-\infty$, f n'est pas dérivable à droite en a, et $\mathcal{C}_f$ admet en A une **demi-tangente verticale**, portée par la droite d'équation $x = a$. De même à gauche.



Un point anguleux : au point A(2, 0) de la courbe de x ↦ |x² − 4|, la demi-tangente à droite a pour pente 4, celle de gauche pour pente −4.



Une demi-tangente verticale : en A(9, 0), la courbe de x ↦ √(9 − x) devient verticale et longe la droite x = 9 ; à gauche de 9, le taux tend vers −∞.

Attention : Pas de formule là où la racine s'annule

La formule $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ suppose $u(x) > 0$. Pour $x \mapsto \sqrt{x+5}$ en -5, reviens donc à la définition.

Pour $h > 0$, le taux vaut $\dfrac{\sqrt{h}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$, qui tend vers $+\infty$ par la règle du quotient, puisque $\sqrt{h}$ tend vers 0 en restant strictement positif. La fonction n'est pas dérivable à droite en -5.

Comme $\sqrt{x+5}$ tend vers 0, valeur de la fonction en -5, quand x tend vers -5 à droite, sa courbe admet une demi-tangente verticale au point $(-5, 0)$.

Fonction dérivée ; dérivées usuelles

Définition : Fonction dérivée

- Une fonction f est **dérivable sur un intervalle ouvert** I si elle est dérivable en tout point de I.
- f est **dérivable sur** $[a, b]$ si elle est dérivable sur $]a, b[$, dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b ; de même pour $[a, b[$, $]a, b]$, $[a, +\infty[$ et $]-\infty, b]$.
- Si f est dérivable sur un intervalle I, la **fonction dérivée** de f est la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$, définie sur I ; aux bornes de I qui lui appartiennent, $f'(x)$ désigne le nombre dérivé à droite ou à gauche.

f' est une fonction ; $f'(a)$ est un nombre.

> **À retenir : Toujours préciser l'intervalle**
>
> Une dérivée se calcule sur un intervalle. Commence par l'ensemble de définition.

> Retire ensuite les points où une formule ne s'applique pas : dénominateur nul, racine carrée d'un nombre nul. En ces points, reviens à la définition.

Propriété : Dérivées de fonctions usuelles

- Pour tout réel c, la fonction constante $x \mapsto c$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto 0$.
- La fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto 1$.
- La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, de dérivée $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Elle n'est **pas** dérivable à droite en 0.

Constante c, sur $\mathbb{R}$ $(c)' = 0$	Identité, sur $\mathbb{R}$ $(x)' = 1$
Puissance, n entier naturel non nul, sur $\mathbb{R}$ $(x^n)' = nx^{n-1}$	Inverse, sur]−∞, 0[et sur]0, +∞[$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$
Racine carrée, sur]0, +∞[$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	Sinus, sur $\mathbb{R}$ $\sin' = \cos$
Cosinus, sur $\mathbb{R}$ $\cos' = -\sin$	Tangente, sur chaque intervalle de définition $\tan' = 1 + \tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2}$

Somme, produit, quotient, puissances

Propriété : Somme, produit par un réel, produit

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I, et k un réel. Alors $u + v$, ku et uv sont dérivables sur I, et :

$$\begin{aligned}(u+v)' &= u' + v',\\ (ku)' &= ku',\\ (uv)' &= u'v + uv'.\end{aligned}$$

Propriété : Inverse et quotient

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I, v ne s'annulant pas sur I. Alors $\dfrac{1}{v}$ et $\dfrac{u}{v}$ sont dérivables sur I, et :

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2},$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Propriété : Puissances entières, polynômes, fonctions rationnelles

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, et n un entier naturel non nul.

- u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$, avec la convention $u^0 = 1$.
- Si u ne s'annule pas sur I, la même formule vaut pour l'exposant $-n$: $(u^{-n})' = -n\,u'\,u^{-n-1}$.
- En particulier, $x \mapsto x^n$ a pour dérivée $x \mapsto nx^{n-1}$ sur $\mathbb{R}$. Tout polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$. Toute fonction rationnelle est dérivable sur chaque intervalle ouvert inclus dans son ensemble de définition.

Méthode : dériver une fonction

1. **Précise** l'intervalle de travail.
2. **Reconnais** la forme : somme, produit, inverse, quotient, puissance, $x \mapsto f(ax+b)$ ou $\sqrt{u}$.
3. **Nomme** u et v, calcule u' et v', puis applique la formule.
4. **Simplifie** : même dénominateur, factorisation. Le signe d'une dérivée se lit sur une forme factorisée.

Exemple

Énoncé. Dérive la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x+1}{x^2+2}$.

Intervalle. Pour tout réel x, $x^2+2>0$: f est une fonction rationnelle dérivable sur $\mathbb{R}$.

Calcul. On applique la propriété du quotient, avec $u : x \mapsto 3x+1$ et $v : x \mapsto x^2+2$. Pour tout réel x, le numérateur $u'(x)v(x) - u(x)v'(x)$ vaut :

$$\begin{aligned} &3(x^2+2) - (3x+1)\times 2x \\ &= -3x^2 - 2x + 6. \end{aligned}$$

Donc, pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{-3x^2-2x+6}{(x^2+2)^2}.$$

Exemple

Énoncé. Dérive $g : x \mapsto (2x^2-1)^3$ sur $\mathbb{R}$.

Calcul. Par la propriété des puissances, avec $u : x \mapsto 2x^2 - 1$, dérivable sur $\mathbb{R}$, et $u'(x) = 4x$, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3 \times 4x \times (2x^2 - 1)^2 \\ &= 12x(2x^2 - 1)^2. \end{aligned}$$

Attention : Le produit des dérivées n'est pas la dérivée du produit

Écrire $(uv)' = u'v'$ est faux. Prends $u : x \mapsto x^2$ et $v : x \mapsto x + 1$. Leur produit est $x \mapsto x^3 + x^2$, de dérivée $x \mapsto 3x^2 + 2x$.

Or $u'(x)v'(x) = 2x \times 1 = 2x$. La bonne formule est $(uv)' = u'v + uv'$: ici, $2x(x + 1) + x^2 = 3x^2 + 2x$.

Sinus, cosinus ; x ↦ f(ax + b) ; racine carrée

Propriété : Dérivées de sinus, cosinus et tangente

Le réel x désignant une mesure d'angle en radians :

- les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$;
- la fonction $\tan$ est dérivable sur chaque intervalle $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$, où $k \in \mathbb{Z}$, et $\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$.

Propriété : Dérivée de x ↦ f(ax + b)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert J, et a, b deux réels, avec $a \neq 0$. Soit I l'intervalle ouvert des réels x tels que $ax + b \in J$. Alors la fonction $g : x \mapsto f(ax + b)$ est dérivable sur I, et :

$$\forall x \in I, \quad g'(x) = a\, f'(ax + b).$$

Propriété : Dérivée de la racine carrée d'une fonction

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, telle que $u(x) > 0$ pour tout $x \in I$. Alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I, et :

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

Somme	Produit par un réel k
$(u + v)' = u' + v'$	$(ku)' = ku'$
Produit	**Inverse, v ne s'annule pas**
$(uv)' = u'v + uv'$	$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$

Quotient, v ne s'annule pas

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Puissance, n entier naturel non nul

$$(u^n)' = nu'u^{n-1}$$

Fonction x ↦ f(ax + b)

$$\big(f(ax+b)\big)' = af'(ax+b)$$

Racine carrée, u strictement positive

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

Exemple

Énoncé. Dérive $f : x \mapsto \sin\left(\frac{x}{3} - 1\right)$ sur $\mathbb{R}$.

Calcul. La fonction $\sin$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\cos$. Par la propriété de $x \mapsto \sin(ax+b)$, avec $a = \frac{1}{3}$ et $b = -1$, pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{1}{3}\cos\left(\frac{x}{3} - 1\right).$$

Exemple

Énoncé. Dérive $g : x \mapsto \sqrt{x^2+4}$.

Intervalle. Pour tout réel x, $x^2 + 4 \geq 4 > 0$: la propriété de la racine carrée s'applique sur $\mathbb{R}$.

Calcul. Avec $u : x \mapsto x^2 + 4$ et $u'(x) = 2x$, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}. \end{aligned}$$

Attention : N'oublie pas le facteur a

La dérivée de $x \mapsto f(ax+b)$ est $x \mapsto af'(ax+b)$.

Ainsi, $x \mapsto (3x-1)^4$ a pour dérivée $x \mapsto 12(3x-1)^3$, et non $x \mapsto 4(3x-1)^3$. De même, $x \mapsto \cos(\pi x)$ a pour dérivée $x \mapsto -\pi\sin(\pi x)$.

Du sens de variation au signe de la dérivée

Propriété : Signe d'une limite à droite ou à gauche

Soit a un réel, $r > 0$, et q une fonction définie sur $]a, a+r[$ telle que $\lim_{x \to a^+} q(x) = \ell$, où ℓ est un réel.

- Si $q(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a, a+r[$, alors $\ell \geq 0$.
- Si $q(x) \leq 0$ pour tout $x \in]a, a+r[$, alors $\ell \leq 0$.

De même pour une limite à gauche, avec q définie sur $]a-r, a[$.

Propriété : Sens de variation et signe de la dérivée

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.

1. Si f est constante sur I, alors $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.
2. Si f est croissante sur I, alors $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.
3. Si f est décroissante sur I, alors $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$.

À retenir : Le sens direct

Le taux de variation d'une fonction croissante sur I est positif. Son nombre dérivé, limite de ce taux, est donc positif lui aussi.

Ce sens direct part du sens de variation. Pour étudier une fonction, tu utiliseras surtout le sens inverse, énoncé dans la section suivante.

Du signe de la dérivée au sens de variation

Théorème : Signe de la dérivée et sens de variation

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est croissante sur I.
2. Si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est décroissante sur I.
3. Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$, alors f est constante sur I.
4. Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, sauf en un nombre fini de points où f' s'annule, alors f est strictement croissante sur I. De même, avec $f'(x) < 0$, f est strictement décroissante sur I.

L'hypothèse « I est un **intervalle** » est indispensable.

Remarque

Ce résultat est admis. Tu l'emploies sans le démontrer, toujours sur un intervalle.

Méthode : dresser un tableau de variations

1. **Détermine** l'ensemble de définition et les intervalles où f est dérivable.
2. **Calcule** $f'(x)$ et factorise-la.
3. **Étudie le signe** de chaque facteur, puis celui de $f'(x)$.

4. **Conclus** intervalle par intervalle par le théorème du signe de la dérivée. Complète le tableau par les valeurs de f aux points remarquables.

Exemple

Énoncé. Étudie les variations de $f : x \mapsto 2x^3 + 3x^2 - 12x$ sur $\mathbb{R}$.

Dérivée. Par les propriétés de la somme et des puissances, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 + 6x - 12 \\ &= 6(x+2)(x-1). \end{aligned}$$

Signe. Ce trinôme est positif à l'extérieur de ses racines -2 et 1, négatif entre elles.

Conclusion. f est strictement croissante sur $]-\infty, -2]$ et sur $[1, +\infty[$, strictement décroissante sur $[-2, 1]$. De plus, $f(-2) = 20$ et $f(1) = -7$.

Attention : Le signe de la dérivée se lit sur un intervalle

Soit $g : x \mapsto \dfrac{x+1}{x}$, définie sur $\mathbb{R}^*$. Par la propriété du quotient, pour tout $x \neq 0$, $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$.

Pourtant, $g(-1) = 0 < 2 = g(1)$: g n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$, qui n'est pas un intervalle. Conclus séparément sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

Extremums

Propriété : Extremum local et dérivée nulle

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, et $a \in I$. Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.

La réciproque est fausse.

Propriété : Dérivée qui s'annule en changeant de signe

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, $a \in I$, et $r > 0$ tel que $]a - r, a + r[\subset I$.

- Si $f'(x) \geq 0$ pour $x \in]a - r, a]$ et $f'(x) \leq 0$ pour $x \in [a, a + r[$, alors f admet un maximum local en a.
- Si $f'(x) \leq 0$ pour $x \in]a - r, a]$ et $f'(x) \geq 0$ pour $x \in [a, a + r[$, alors f admet un minimum local en a.

Dans les deux cas, $f'(a) = 0$.

Méthode : chercher les extremums

1. **Résous** $f'(x) = 0$ sur l'intervalle ouvert étudié.

2. **Regarde** le signe de f' de part et d'autre de chaque solution. S'il change, c'est un extremum local ; sinon, ce n'en est pas un.
3. **Traite à part** les bornes d'un intervalle fermé : la dérivée n'y est pas forcément nulle.
4. **Conclus** en écrivant chaque extremum, puis le réel en lequel f le prend.

Exemple

Énoncé. Cherche les extremums locaux de $f : x \mapsto x^4 - 2x^2$.

Dérivée. Ce polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 4x \\ &= 4x(x-1)(x+1). \end{aligned}$$

Elle s'annule en -1, en 0 et en 1.

Signe. $f'(x)$ est négatif sur $]-\infty, -1[$ et sur $]0, 1[$, positif sur $]-1, 0[$ et sur $]1, +\infty[$.

Conclusion. f admet un minimum local, égal à -1, en -1 et en 1. Elle admet un maximum local, égal à 0, en 0.

Attention : Une dérivée nulle ne suffit pas

Pour $x \mapsto (x-1)^3$, la dérivée $x \mapsto 3(x-1)^2$ s'annule en 1. Elle reste positive des deux côtés de 1 : la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et n'a donc pas d'extremum en 1.

Seul un changement de signe de la dérivée garantit un extremum.

À retenir : Penser aux bornes

Sur un intervalle fermé $[a, b]$, compare aussi $f(a)$ et $f(b)$ aux extremums locaux.

Par exemple, sur $[1, 3]$, la dérivée $2x$ de $x \mapsto x^2$ ne s'annule jamais. Pourtant, cette fonction atteint son minimum 1 en 1, et son maximum 9 en 3.

Dérivées successives ; l'équation y'' + a²y = 0

Définition : Équation différentielle y'' + a²y = 0

- Une fonction y est **deux fois dérivable** sur $\mathbb{R}$ si y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et si sa dérivée y' est dérivable sur $\mathbb{R}$. La dérivée de y' est la **dérivée seconde** de y, notée y''.

- Soit a un réel non nul. Une **solution sur** $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + a^2 y = 0$ est une fonction y deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + a^2\, y(x) = 0.$$

Méthode : dérivées successives

1. **Dérive** plusieurs fois, en simplifiant à chaque étape : f'' est la dérivée de f', puis $f^{(3)}$ celle de f''.
2. **Conjecture** une formule pour $f^{(n)}$.
3. **Démontre-la** par récurrence : initialisation au premier rang, puis hérédité en dérivant la formule au rang n.
4. **Conclus** pour tout entier naturel n concerné.

Exemple

Énoncé. Soit $f : x \mapsto \cos(5x)$. Calcule f' et f'', puis exprime $f^{(4)}$ à l'aide de f.

Calcul. Par la propriété de $x \mapsto \cos(ax + b)$, pour tout réel x :

$$f'(x) = -5\sin(5x),$$

puis :

$$\begin{aligned} f''(x) &= -25\cos(5x) \\ &= -25 f(x). \end{aligned}$$

Conséquence. En dérivant deux fois l'égalité $f'' = -25f$, on obtient $f^{(4)} = -25f'' = 625f$.

Propriété : Les fonctions x ↦ α cos(ax) + β sin(ax) sont solutions

Soit a un réel non nul, et α, β deux réels. La fonction $y : x \mapsto \alpha\cos(ax) + \beta\sin(ax)$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + a^2 y = 0$.

Théorème : Solutions de l'équation y'' + a²y = 0

Soit a un réel non nul.

1. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + a^2 y = 0$ sont **exactement** les fonctions $x \mapsto \alpha\cos(ax) + \beta\sin(ax)$, où α et β sont des réels.
2. Pour tous réels x_0, y_0 et y_1, il existe une **unique** solution y telle que $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$.

Remarque

Ce résultat est admis. Il donne toutes les solutions, et pas seulement celles que l'on sait vérifier.

Méthode : résoudre avec deux conditions

1. **Repère** a : l'équation s'écrit $y'' + a^2 y = 0$, avec $a \neq 0$. Par exemple, $y'' + 7y = 0$ donne $a = \sqrt{7}$.
2. **Écris** la forme $\alpha \cos(ax) + \beta \sin(ax)$ de la solution, et sa dérivée $-a\alpha \sin(ax) + a\beta \cos(ax)$.
3. **Traduis** les deux conditions : tu obtiens un système d'inconnues α et β.
4. **Résous-le**, conclus par l'unicité, puis vérifie les conditions.

Exemple

Énoncé. Trouve la solution de $y'' + 36y = 0$ telle que $y(0) = -1$ et $y'(0) = 12$.

Forme. Ici $a = 6$. Les solutions s'écrivent $y : x \mapsto \alpha \cos(6x) + \beta \sin(6x)$ et, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} y'(x) = &-6\alpha \sin(6x) \\ &+ 6\beta \cos(6x). \end{aligned}$$

Conditions. $y(0) = \alpha = -1$ et $y'(0) = 6\beta = 12$, donc $\beta = 2$.

Conclusion. La solution cherchée est unique : $x \mapsto -\cos(6x) + 2\sin(6x)$.

Quelle méthode pour quelle question

Méthode : Quelle méthode pour quelle question

Lis la question, puis choisis ton outil.

Question posée	Outil à employer
nombre dérivé en un point, sans formule disponible	taux de variation, puis limite quand h tend vers 0
dérivabilité en un point de raccord ou en une borne	taux à droite et à gauche, puis comparaison
équation d'une tangente	$f(a)$ et $f'(a)$, puis $y = f'(a)(x - a) + f(a)$
valeur approchée de $f(a + h)$ pour h petit	$f(a + h) \approx f(a) + f'(a)h$
dérivée sur un intervalle	dérivées usuelles et propriétés des opérations
sens de variation	signe de $f'(x)$ factorisée, sur chaque intervalle
extremum local	$f'(a) = 0$ avec changement de signe de f'
inégalité $f(x) \geq g(x)$ sur un intervalle	étude de fonction : variations de $f - g$, puis son minimum, positif ou nul

Question posée	Outil à employer
formule de $f^{(n)}$	premières dérivées, conjecture, récurrence
solution de $y'' + a^2 y = 0$ avec deux conditions	forme $\alpha\cos(ax) + \beta\sin(ax)$, système en α et β

> **À retenir : Rédiger en devoir**
>
> En devoir, chaque dérivée commence par son intervalle. Nomme la règle employée : « par la propriété du produit, sur $\mathbb{R}$ ». Nomme aussi l'opération ou la limite de référence de chaque calcul de limite.
>
> Pour conclure sur les variations, cite le signe de la dérivée sur un intervalle. Annonce une récurrence, puis rédige l'initialisation et l'hérédité.