BURHAN

Dérivabilité : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/derivabilite/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Dérivabilité	Niveau examen	5

Exercice 1 — 5 pts

Étude d'un produit par une racine carrée

Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 3]$ par $f(x) = x\sqrt{3-x}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1. — 1,25 pts

Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 3[$ et que, pour tout $x < 3$, $f'(x) = \dfrac{3(2-x)}{2\sqrt{3-x}}$.

INDICE

Outil : la propriété de la racine carrée d'une fonction, avec $u : x \mapsto 3 - x$, puis la propriété du produit.

2. — 1 pts

Étudier la dérivabilité de f à gauche en 3. Interpréter graphiquement le résultat.

INDICE

Outil : pour $x < 3$, écris $x - 3 = -\left(\sqrt{3-x}\right)^2$ pour simplifier le taux.

3. — 1 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, puis dresser le tableau de variations de f.

INDICE

Outil : le signe de $f'(x)$ est celui de $2 - x$.

4. — 0,75 pts

Écrire une équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

INDICE

Outil : la formule de la question 1 en $x = 0$.

5. — 1 pts

En déduire que, pour tout $x \leq 3$, $x\sqrt{3-x} \leq 2$. Pour quelle valeur de x a-t-on l'égalité ?

INDICE

Outil : le tableau de variations de la question 3.

Exercice 2 5 pts

Une fonction trigonométrique sur un demi-tour

Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \sin x\,(1 + \cos x)$.

1. 1,25 pts

Montrer que, pour tout $x \in [0, \pi]$, $f'(x) = (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$.

INDICE

Outil : la propriété du produit, puis $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$; développe ensuite l'expression proposée pour comparer.

2. 1,25 pts

Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0, \pi]$, puis dresser le tableau de variations de f.

INDICE

Outil : sur $[0, \pi]$, le cosinus est strictement décroissant et vaut $\frac{1}{2}$ en $\frac{\pi}{3}$.

3. 0,75 pts

En déduire que, pour tout $x \in [0, \pi]$, $0 \leq \sin x\,(1 + \cos x) \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

INDICE

Outil : les valeurs du tableau de la question 2.

4. 0,75 pts

Écrire une équation de la tangente (T) à la courbe de f au point d'abscisse 0, puis en déduire une valeur approchée de $f(0{,}01)$.

INDICE

Outil : la forme factorisée de la question 1 en $x = 0$, puis l'approximation affine $f(h) \approx f(0) + f'(0)h$ pour h proche de 0.

5. 1 pts

Soit g la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $g(x) = 2x - f(x)$. Montrer que g est croissante sur $[0, \pi]$, puis que $f(x) \leq 2x$ pour tout $x \in [0, \pi]$.

INDICE

Outil : dérive g en utilisant f' de la question 1, puis étudie le signe de g'.

Exercice 3 — 5 pts

Une valeur absolue et un point anguleux

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x|x-2|$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère.

1. — 0,5 pts

Écrire $f(x)$ sans valeur absolue sur $]-\infty, 2]$, puis sur $[2, +\infty[$.

INDICE

Outil : le signe de $x - 2$ de chaque côté de 2.

2. — 1 pts

Montrer que f est dérivable à droite et à gauche en 2, mais pas dérivable en 2.

INDICE

Outil : les deux taux $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$, avec l'expression de la question 1 valable de chaque côté.

3. — 0,75 pts

Donner une équation de chacune des deux demi-tangentes à $\mathcal{C}_f$ au point $A(2, 0)$. Comment appelle-t-on ce point ?

INDICE

Outil : la définition des demi-tangentes, avec $f'_g(2)$ et $f'_d(2)$.

4. — 1 pts

Calculer $f'(x)$ sur $]-\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$. Dresser le tableau de variations de f, avec ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

INDICE

Outil : la question 1, la dérivée des puissances, puis le théorème du signe de la dérivée sur chaque intervalle.

5. — 1 pts

Montrer que f admet un maximum local en 1 et un minimum local en 2. Pourquoi la propriété « extremum local et dérivée nulle » ne s'applique-t-elle pas en 2 ?

INDICE

Point délicat : en 2, raisonne sur les variations, pas sur la dérivée.

6. — 0,75 pts

En déduire que, pour tout $x \in [0, 2]$, $x(2-x) \leq 1$.

INDICE

Outil : sur $[0, 2]$, $f(x) = x(2-x)$ d'après la question 1.

Exercice 4 5 pts

Une solution d'équation différentielle et ses variations

On considère l'équation différentielle (E) : $4y'' + 25y = 0$, d'inconnue y deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. 0,5 pts

Montrer que (E) s'écrit $y'' + a^2 y = 0$, avec un réel $a > 0$ à préciser. Donner la forme des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : divise les deux membres par 4, puis écris $\dfrac{25}{4}$ comme un carré.

2. 0,75 pts

Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$.

INDICE

Outil : dérive la forme générale de la question 1, puis traduis les deux conditions en un système d'inconnues α et β.

3. 0,75 pts

Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = 2\cos\left(\dfrac{5x}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

INDICE

Outil : la formule $\cos(p - q) = \cos p \cos q + \sin p \sin q$, avec les valeurs de $\cos\dfrac{\pi}{3}$ et $\sin\dfrac{\pi}{3}$.

4. 1,25 pts

En déduire que, pour tout réel x, $f'(x) = -5\sin\left(\dfrac{5x}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right)$, puis dresser le tableau de variations de f sur $\left[0, \dfrac{4\pi}{5}\right]$.

INDICE

Outil : pose $t = \dfrac{5x}{2} - \dfrac{\pi}{3}$; quand x parcourt $\left[0, \dfrac{4\pi}{5}\right]$, cherche l'intervalle parcouru par t et le signe de $\sin t$.

5. 0,75 pts

En déduire les extremums locaux de f sur $\left]0, \dfrac{4\pi}{5}\right[$, puis le maximum et le minimum de f sur $\left[0, \dfrac{4\pi}{5}\right]$.

INDICE

Outil : les changements de signe de f' de la question 4, puis la comparaison avec les valeurs aux bornes.

6. 1 pts

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4f'(x)^2 + 25f(x)^2$. Sans utiliser la question 3, montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $g'(x) = 0$ pour tout réel x. En déduire que, pour tout réel x, $4f'(x)^2 + 25f(x)^2 = 100$, puis que $-5 \leq f'(x) \leq 5$.

INDICE

Outil : la dérivée de u^2 est $2u'u$; remplace ensuite $4f''(x)$ à l'aide de (E).

Exercice 5 5 pts

Des limites qui cachent un nombre dérivé

Dans les questions 1, 2 et 5, f désigne une fonction définie sur un intervalle ouvert I, et a un réel de I tel que f soit dérivable en a. Les réels h considérés sont non nuls et assez proches de 0 pour que $a+2h$, $a+h$ et $a-h$ appartiennent à I.

1. 0,75 pts

Montrer que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a)}{h}=2f'(a)$.

INDICE

Outil : pose $t=2h$ et fais apparaître le taux de variation de f entre a et $a+t$.

2. 0,75 pts

En déduire que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a-h)}{h}=3f'(a)$.

INDICE

Outil : ajoute et retranche $f(a)$ au numérateur.

3. 0,75 pts

Application : calculer $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+2h\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}-h\right)}{h}$.

INDICE

Outil : la question 2, avec la fonction sinus et $a=\dfrac{\pi}{6}$.

4. 1 pts

En reconnaissant un nombre dérivé, calculer $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{2\cos x-1}{x-\frac{\pi}{3}}$, puis $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{4x-\pi}$.

INDICE

Outil : écris $1=2\cos\dfrac{\pi}{3}$ dans la première limite, puis $1=\tan\dfrac{\pi}{4}$ et $4x-\pi=4\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ dans la seconde.

5. 0,75 pts

Montrer de même que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=f'(a)$.

INDICE

Outil : la décomposition de la question 2, appliquée à $f(a+h)-f(a-h)$.

6. 1 pts

Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x)=|x-1|$. Montrer que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{k(1+h)-k(1-h)}{2h}=0$, mais que k n'est pas dérivable en 1. La réciproque du résultat de la question 5 est-elle vraie ?

INDICE

Point délicat : calcule séparément le taux de k entre 1 et x pour $x>1$, puis pour $x<1$.