BURHAN

Dérivabilité : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/derivabilite/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Dérivabilité	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Étude d'un produit par une racine carrée

Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 3]$ par $f(x) = x\sqrt{3-x}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1. 1,25 pts

Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 3[$ et que, pour tout $x < 3$, $f'(x) = \dfrac{3(2-x)}{2\sqrt{3-x}}$.

INDICE

Outil : la propriété de la racine carrée d'une fonction, avec $u : x \mapsto 3 - x$, puis la propriété du produit.

CORRIGÉ

Dérivabilité. Sur $]-\infty, 3[$, la fonction $u : x \mapsto 3 - x$ est dérivable et strictement positive, avec $u'(x) = -1$. Par la propriété de la racine carrée d'une fonction, $x \mapsto \sqrt{3-x}$ est dérivable sur cet intervalle, de dérivée $x \mapsto -\dfrac{1}{2\sqrt{3-x}}$. Par la propriété du produit, f est dérivable sur $]-\infty, 3[$.

Calcul. Pour tout $x < 3$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{3-x} - \frac{x}{2\sqrt{3-x}} \\ &= \frac{2(3-x) - x}{2\sqrt{3-x}} \\ &= \frac{3(2-x)}{2\sqrt{3-x}}. \end{aligned}$$

Conclusion. f est dérivable sur $]-\infty, 3[$ et, pour tout $x < 3$, $f'(x) = \dfrac{3(2-x)}{2\sqrt{3-x}}$.

2. 1 pts

Étudier la dérivabilité de f à gauche en 3. Interpréter graphiquement le résultat.

INDICE

Outil : pour $x < 3$, écris $x - 3 = -\left(\sqrt{3-x}\right)^2$ pour simplifier le taux.

CORRIGÉ

Taux en 3. On a $f(3) = 0$. Pour $x < 3$, on a $x - 3 = -\left(\sqrt{3-x}\right)^2$, donc :

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} &= \frac{x\sqrt{3-x}}{-\left(\sqrt{3-x}\right)^2} \\ &= -\frac{x}{\sqrt{3-x}}. \end{aligned}$$

Limite. Quand x tend vers 3 à gauche, $-x$ tend vers -3, et $\sqrt{3-x}$ tend vers 0 en restant strictement positif. Par la règle du quotient, le taux tend vers $-\infty$: f n'est pas dérivable à gauche en 3.

Interprétation. Par produit, $f(x)$ tend vers $3 \times 0 = 0 = f(3)$ quand x tend vers 3 à gauche. Comme le taux tend vers $-\infty$, la courbe admet au point $A(3, 0)$ une demi-tangente verticale.

Conclusion. f n'est pas dérivable à gauche en 3, et $\mathcal{C}_f$ admet au point $A(3, 0)$ une demi-tangente verticale.

3. 1 pts

Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, puis dresser le tableau de variations de f.

INDICE

Outil : le signe de $f'(x)$ est celui de $2 - x$.

CORRIGÉ

Limite en $-\infty$. Soit $x \leq 0$. Alors $3 - x \geq 3 \geq 1$, donc $\sqrt{3-x} \geq 1$ et, en multipliant par $x \leq 0$:

$$f(x) = x\sqrt{3-x} \leq x.$$

Comme x tend vers $-\infty$, par comparaison, $f(x)$ tend vers $-\infty$.

Signe de $f'(x)$. Pour $x < 3$, $2\sqrt{3-x} > 0$: $f'(x)$ a le signe de $2 - x$. Donc $f'(x) > 0$ sur $]-\infty, 2[$ et $f'(x) < 0$ sur $]2, 3[$; f' ne s'annule qu'en 2.

Variations. Comme f est dérivable sur $]-\infty, 3[$, le théorème du signe de la dérivée donne : f est strictement croissante sur $]-\infty, 2]$ et strictement décroissante sur $[2, 3[$. Il ne s'applique pas sur $[2, 3]$, car f n'est pas dérivable à gauche en 3 (question 2).

La borne 3. Pour $x \in [2, 3[$, on a $x > 0$ et $\sqrt{3-x} > 0$, donc $f(x) > 0 = f(3)$. Ainsi f est strictement décroissante sur $[2, 3]$.

Tableau de variations. f croît de $-\infty$ à $f(2) = 2\sqrt{1} = 2$ sur $]-\infty, 2]$, puis décroît de 2 à $f(3) = 0$ sur $[2, 3]$.

4. 0,75 pts

Écrire une équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

INDICE

Outil : la formule de la question 1 en $x = 0$.

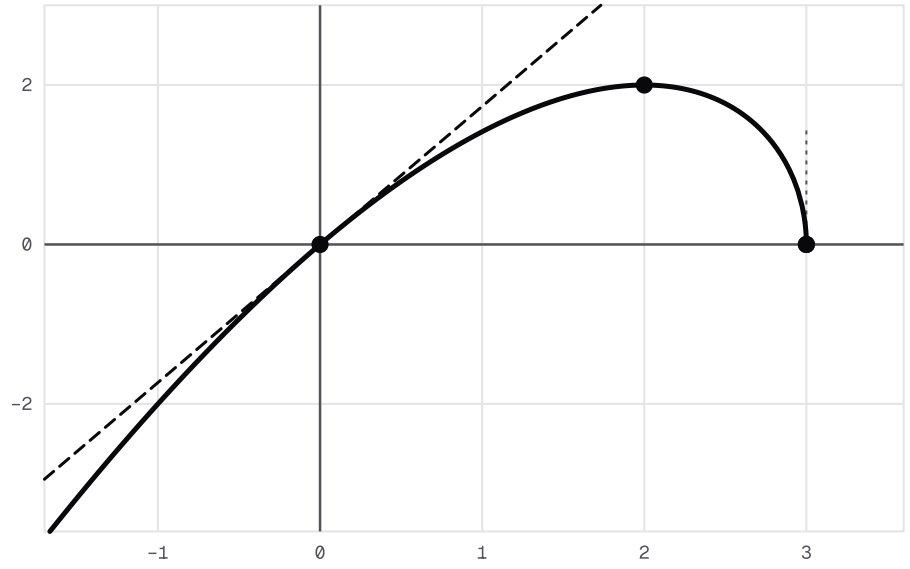
CORRIGÉ

D'après la question 1 :

$$f'(0) = \frac{3 \times 2}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

De plus, $f(0) = 0$. La tangente (T) a pour équation $y = \sqrt{3}(x - 0) + 0$.

Conclusion. (T) a pour équation $y = \sqrt{3}\,x$.



Courbe de f : x ↦ x√(3 − x) : maximum 2 en 2, demi-tangente verticale au point A(3, 0), et tangente (T) d'équation y = √3 x à l'origine.

5. 1 pts

En déduire que, pour tout $x \leq 3$, $x\sqrt{3-x} \leq 2$. Pour quelle valeur de x a-t-on l'égalité ?

INDICE

Outil : le tableau de variations de la question 3.

CORRIGÉ

Inégalité. D'après la question 3, f est strictement croissante sur $]-\infty, 2]$ et strictement décroissante sur $[2, 3]$, borne 3 comprise. Elle atteint donc en 2 son maximum sur $]-\infty, 3]$: pour tout $x \leq 3$, $f(x) \leq f(2) = 2$.

Cas d'égalité. Sur chacun de ces deux intervalles, la monotonie est stricte : pour $x \neq 2$, $f(x) < f(2) = 2$.

Conclusion. Pour tout $x \leq 3$, $x\sqrt{3-x} \leq 2$, avec égalité seulement pour $x = 2$.

Exercice 2 — 5 pts

Une fonction trigonométrique sur un demi-tour

Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \sin x\,(1 + \cos x)$.

1. — 1,25 pts

Montrer que, pour tout $x \in [0, \pi]$, $f'(x) = (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$.

INDICE

Outil : la propriété du produit, puis $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$; développe ensuite l'expression proposée pour comparer.

CORRIGÉ

Dérivée. Les fonctions $\sin$ et $x \mapsto 1 + \cos x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, de dérivées $\cos$ et $-\sin$. Par la propriété du produit, puis avec $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, pour tout $x \in [0, \pi]$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x\,(1 + \cos x) \\ &\quad + \sin x \times (-\sin x) \\ &= \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 2\cos^2 x + \cos x - 1. \end{aligned}$$

Forme factorisée. En développant, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &(2\cos x - 1)(\cos x + 1) \\ &= 2\cos^2 x + 2\cos x \\ &\quad - \cos x - 1 \\ &= 2\cos^2 x + \cos x - 1. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x \in [0, \pi]$, $f'(x) = (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$.

2. 1,25 pts

Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0,\pi]$, puis dresser le tableau de variations de f.

INDICE

Outil : sur $[0,\pi]$, le cosinus est strictement décroissant et vaut $\frac{1}{2}$ en $\frac{\pi}{3}$.

CORRIGÉ

Signe des facteurs. Sur $[0,\pi]$, $\cos x + 1 \geq 0$, avec égalité seulement en π. Le cosinus est strictement décroissant sur $[0,\pi]$ et $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, donc :

- $2\cos x - 1 > 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right[$;
- $2\cos x - 1 < 0$ sur $\left]\frac{\pi}{3}, \pi\right]$.

Signe de $f'(x)$. Ainsi $f'(x) > 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right[$, $f'(x) < 0$ sur $\left]\frac{\pi}{3}, \pi\right[$, et f' ne s'annule qu'en $\frac{\pi}{3}$ et en π.

Variations. Par le théorème du signe de la dérivée (cas strict), f est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$.

Tableau de variations. On a $f(0) = 0$, $f(\pi) = 0$ et :

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Donc f croît de 0 à $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, puis décroît de $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ à 0 sur $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$.

3. 0,75 pts

En déduire que, pour tout $x \in [0,\pi]$, $0 \leq \sin x\,(1+\cos x) \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

INDICE

Outil : les valeurs du tableau de la question 2.

CORRIGÉ

D'après la question 2 :

- sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, f croît de 0 à $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, donc $0 \leq f(x) \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$;
- sur $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$, f décroît de $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ à 0, donc $0 \leq f(x) \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Conclusion. Pour tout $x \in [0,\pi]$, $0 \leq \sin x\,(1+\cos x) \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$. Le maximum $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ est atteint en $\frac{\pi}{3}$.

4. 0,75 pts

Écrire une équation de la tangente (T) à la courbe de f au point d'abscisse 0, puis en déduire une valeur approchée de $f(0{,}01)$.

INDICE

Outil : la forme factorisée de la question 1 en $x = 0$, puis l'approximation affine $f(h) \approx f(0) + f'(0)h$ pour h proche de 0.

CORRIGÉ

Tangente. On a $f(0) = 0$ et, d'après la question 1, $f'(0) = (2-1)(1+1) = 2$. La tangente (T) a pour équation $y = 2(x-0) + 0$, soit $y = 2x$.

Valeur approchée. Pour h proche de 0, l'approximation affine en 0 donne $f(h) \approx f(0) + f'(0)h = 2h$. Avec $h = 0{,}01$:

$$f(0{,}01) \approx 0{,}02.$$

Conclusion. (T) a pour équation $y = 2x$, et $f(0{,}01) \approx 0{,}02$. La calculatrice donne $f(0{,}01) = 0{,}0199991\ldots$: l'erreur est inférieure à 10^{-6}.

5. 1 pts

Soit g la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $g(x) = 2x - f(x)$. Montrer que g est croissante sur $[0, \pi]$, puis que $f(x) \leq 2x$ pour tout $x \in [0, \pi]$.

INDICE

Outil : dérive g en utilisant f' de la question 1, puis étudie le signe de g'.

CORRIGÉ

Dérivée de g. Par la propriété de la somme, g est dérivable sur $[0, \pi]$ et, d'après la question 1, pour tout $x \in [0, \pi]$:

$$\begin{aligned} &g'(x) \\ &= 2 - (2\cos^2 x + \cos x - 1) \\ &= 3 - \cos x - 2\cos^2 x. \end{aligned}$$

Signe. Comme $\cos x \leq 1$ et $\cos^2 x \leq 1$, on a $\cos x + 2\cos^2 x \leq 3$, donc $g'(x) \geq 0$. Par le théorème du signe de la dérivée, g est croissante sur $[0, \pi]$.

Inégalité. Pour tout $x \in [0, \pi]$, $g(x) \geq g(0) = 0$, c'est-à-dire $f(x) \leq 2x$.

Conclusion. g est croissante sur $[0, \pi]$ et, pour tout $x \in [0, \pi]$, $f(x) \leq 2x$: sur cet intervalle, la courbe de f est sous la tangente (T).

Exercice 3 — 5 pts

Une valeur absolue et un point anguleux

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x|x-2|$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère.

1. — 0,5 pts

Écrire $f(x)$ sans valeur absolue sur $]-\infty, 2]$, puis sur $[2, +\infty[$.

INDICE

Outil : le signe de $x - 2$ de chaque côté de 2.

CORRIGÉ

- Si $x \leq 2$, alors $x - 2 \leq 0$, donc $|x-2| = 2 - x$ et $f(x) = x(2-x) = 2x - x^2$.
- Si $x \geq 2$, alors $x - 2 \geq 0$, donc $|x-2| = x - 2$ et $f(x) = x(x-2) = x^2 - 2x$.

Conclusion. $f(x) = 2x - x^2$ sur $]-\infty, 2]$, et $f(x) = x^2 - 2x$ sur $[2, +\infty[$.

2. — 1 pts

Montrer que f est dérivable à droite et à gauche en 2, mais pas dérivable en 2.

INDICE

Outil : les deux taux $\dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$, avec l'expression de la question 1 valable de chaque côté.

CORRIGÉ

On a $f(2) = 0$.

À gauche. Pour $x < 2$, d'après la question 1 :

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \frac{x(2-x)}{x-2} \\ &= -x. \end{aligned}$$

Quand x tend vers 2, $-x$ tend vers -2 : f est dérivable à gauche en 2, et $f'_g(2) = -2$.

À droite. Pour $x > 2$:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \frac{x(x-2)}{x-2} \\ &= x. \end{aligned}$$

Ce taux tend vers 2 : f est dérivable à droite en 2, et $f'_d(2) = 2$.

Conclusion. Les deux nombres dérivés latéraux existent mais diffèrent. Par la propriété des nombres dérivés latéraux, f est dérivable à droite et à gauche en 2, mais pas dérivable en 2.

3. `0,75 pts`

Donner une équation de chacune des deux demi-tangentes à $\mathcal{C}_f$ au point $A(2,0)$. Comment appelle-t-on ce point ?

INDICE

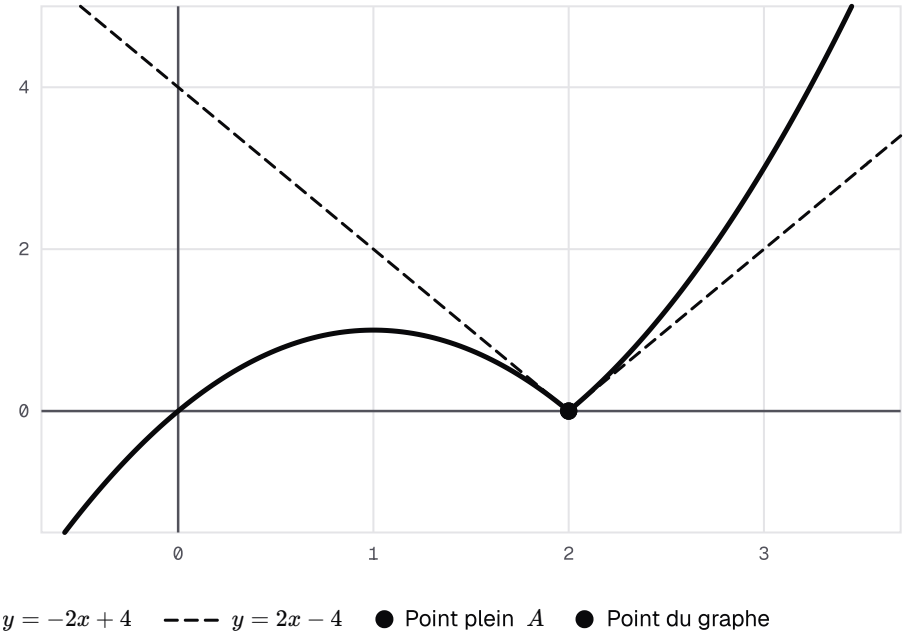
Outil : la définition des demi-tangentes, avec $f'_g(2)$ et $f'_d(2)$.

CORRIGÉ

Demi-tangente à gauche. Elle passe par $A(2,0)$, avec le coefficient directeur $f'_g(2) = -2$: elle a pour équation $y = -2(x-2)$, soit $y = -2x + 4$, avec $x \leq 2$.

Demi-tangente à droite. Avec le coefficient directeur $f'_d(2) = 2$, elle a pour équation $y = 2(x-2)$, soit $y = 2x - 4$, avec $x \geq 2$.

Conclusion. Les nombres dérivés à droite et à gauche en 2 existent mais diffèrent : A est un point anguleux de $\mathcal{C}_f$.



Courbe de f : x ↦ x|x − 2| et ses deux demi-tangentes au point anguleux A(2, 0) : y = −2x + 4 à gauche, y = 2x − 4 à droite.

4. 1 pts

Calculer $f'(x)$ sur $]-\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$. Dresser le tableau de variations de f, avec ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

INDICE

Outil : la question 1, la dérivée des puissances, puis le théorème du signe de la dérivée sur chaque intervalle.

CORRIGÉ

Dérivée. D'après la question 1, par les propriétés de la somme et des puissances :

- sur $]-\infty, 2[$, $f'(x) = 2 - 2x$, positive sur $]-\infty, 1[$ et négative sur $]1, 2[$;
- sur $]2, +\infty[$, $f'(x) = 2x - 2 > 0$.

Variations. D'après la question 2, f est dérivable sur $[1, 2]$ (à gauche en 2) et sur $[2, +\infty[$ (à droite en 2). Par le théorème du signe de la dérivée, f est strictement croissante sur $]-\infty, 1]$, strictement décroissante sur $[1, 2]$ et strictement croissante sur $[2, +\infty[$. On a $f(1) = 1$ et $f(2) = 0$.

Limites. Par la règle du terme de plus haut degré, $2x - x^2$ tend vers $-\infty$ en $-\infty$, et $x^2 - 2x$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Tableau de variations. f croît de $-\infty$ à 1 sur $]-\infty, 1]$, décroît de 1 à 0 sur $[1, 2]$, puis croît de 0 à $+\infty$ sur $[2, +\infty[$.

5. 1 pts

Montrer que f admet un maximum local en 1 et un minimum local en 2. Pourquoi la propriété « extremum local et dérivée nulle » ne s'applique-t-elle pas en 2 ?

INDICE

Point délicat : en 2, raisonne sur les variations, pas sur la dérivée.

CORRIGÉ

Maximum local en 1. Sur $]-\infty, 2[$, f est dérivable, et f' s'annule en 1 en passant du positif au négatif. Par la propriété de la dérivée qui s'annule en changeant de signe, f admet en 1 un maximum local, égal à $f(1) = 1$.

Minimum local en 2. D'après la question 4, f décroît sur $[1, 2]$ et croît sur $[2, 3]$. Pour tout $x \in]1, 3[$, on a donc $f(x) \geq f(2) = 0$: f admet en 2 un minimum local, égal à 0.

La propriété en 2. La propriété « extremum local et dérivée nulle » suppose f dérivable au point considéré. Or f n'est pas dérivable en 2 (question 2) : elle ne s'applique pas.

Conclusion. f admet un maximum local en 1 et un minimum local en 2 ; en 2, faute de dérivabilité, la propriété « extremum local et dérivée nulle » ne s'applique pas.

6. 0,75 pts

En déduire que, pour tout $x \in [0, 2]$, $x(2 - x) \leq 1$.

INDICE

Outil : sur $[0, 2]$, $f(x) = x(2 - x)$ d'après la question 1.

CORRIGÉ

Pour $x \in [0, 2]$, $f(x) = x(2 - x)$ d'après la question 1. D'après la question 4, f croît sur $[0, 1]$ et décroît sur $[1, 2]$: sur $[0, 2]$, elle atteint son maximum en 1.

Conclusion. Pour tout $x \in [0, 2]$, $x(2 - x) = f(x) \leq f(1) = 1$.

Exercice 4 5 pts

Une solution d'équation différentielle et ses variations

On considère l'équation différentielle (E) : $4y'' + 25y = 0$, d'inconnue y deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. 0,5 pts

Montrer que (E) s'écrit $y'' + a^2 y = 0$, avec un réel $a > 0$ à préciser. Donner la forme des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : divise les deux membres par 4, puis écris $\dfrac{25}{4}$ comme un carré.

CORRIGÉ

Forme de l'équation. En divisant par 4, (E) équivaut à $y'' + \dfrac{25}{4}y = 0$. Or $\dfrac{25}{4} = \left(\dfrac{5}{2}\right)^2$: (E) s'écrit $y'' + a^2 y = 0$, avec $a = \dfrac{5}{2}$.

Solutions. Par le théorème des solutions de $y'' + a^2 y = 0$ (admis), les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions :

$$x \mapsto \alpha \cos\left(\frac{5x}{2}\right) + \beta \sin\left(\frac{5x}{2}\right),$$

où α et β sont des réels.

2. 0,75 pts

Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$.

INDICE

Outil : dérive la forme générale de la question 1, puis traduis les deux conditions en un système d'inconnues α et β.

CORRIGÉ

Dérivée. D'après la question 1, il existe deux réels α et β tels que, pour tout réel x, $f(x) = \alpha\cos\left(\dfrac{5x}{2}\right) + \beta\sin\left(\dfrac{5x}{2}\right)$. Par la propriété de $x \mapsto f(ax+b)$, avec $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) = &-\frac{5}{2}\alpha\sin\left(\frac{5x}{2}\right) \\ &+\frac{5}{2}\beta\cos\left(\frac{5x}{2}\right). \end{aligned}$$

Conditions. On a $f(0) = \alpha$, donc $\alpha = 1$. On a $f'(0) = \dfrac{5}{2}\beta$; la condition sur $f'(0)$ s'écrit $\dfrac{5}{2}\beta = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$, donc $\beta = \sqrt{3}$.

Conclusion. Les deux conditions fixent α et β : la solution cherchée est unique et, pour tout réel x, $f(x) = \cos\left(\dfrac{5x}{2}\right) + \sqrt{3}\sin\left(\dfrac{5x}{2}\right)$.

3. 0,75 pts

Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = 2\cos\left(\dfrac{5x}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

INDICE

Outil : la formule $\cos(p-q) = \cos p\cos q + \sin p\sin q$, avec les valeurs de $\cos\dfrac{\pi}{3}$ et $\sin\dfrac{\pi}{3}$.

CORRIGÉ

Soit x un réel. Par la formule $\cos(p-q) = \cos p\cos q + \sin p\sin q$, avec $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$:

$$\begin{aligned} &2\cos\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{5x}{2}\right)\times\frac{1}{2} \\ &\quad + 2\sin\left(\frac{5x}{2}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \cos\left(\frac{5x}{2}\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{5x}{2}\right). \end{aligned}$$

Conclusion. On retrouve l'expression de la question 2 : pour tout réel x, $f(x) = 2\cos\left(\dfrac{5x}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

4. 1,25 pts

En déduire que, pour tout réel x, $f'(x) = -5\sin\left(\dfrac{5x}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right)$, puis dresser le tableau de variations de f sur $\left[0, \dfrac{4\pi}{5}\right]$.

INDICE

Outil : pose $t = \dfrac{5x}{2} - \dfrac{\pi}{3}$; quand x parcourt $\left[0, \dfrac{4\pi}{5}\right]$, cherche l'intervalle parcouru par t et le signe de $\sin t$.

CORRIGÉ

Dérivée. Par la propriété de $x \mapsto f(ax+b)$, avec $a = \dfrac{5}{2}$, $b = -\dfrac{\pi}{3}$ et $\cos' = -\sin$, la fonction $x \mapsto \cos\left(\dfrac{5x}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right)$ a pour dérivée $x \mapsto -\dfrac{5}{2}\sin\left(\dfrac{5x}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right)$. Par la propriété du produit par le réel 2, appliquée à l'écriture de la question 3, pour tout réel x :

$$f'(x) = -5\sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{3}\right).$$

Changement de variable. Posons $t = \dfrac{5x}{2} - \dfrac{\pi}{3}$. Quand x croît de 0 à $\dfrac{4\pi}{5}$, t croît de $-\dfrac{\pi}{3}$ à $\dfrac{5\pi}{3}$. Sur $\left[-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right]$:

- $\sin t < 0$ pour $t \in \left[-\dfrac{\pi}{3}, 0\right[$;
- $\sin t > 0$ pour $t \in \left]0, \pi\right[$;
- $\sin t < 0$ pour $t \in \left]\pi, \dfrac{5\pi}{3}\right]$.

Or $t = 0$ pour $x = \dfrac{2\pi}{15}$, et $t = \pi$ pour $x = \dfrac{8\pi}{15}$.

Signe de $f'(x)$. Comme $f'(x) = -5\sin t$:

- $f'(x) > 0$ sur $\left[0, \dfrac{2\pi}{15}\right[$;
- $f'(x) < 0$ sur $\left]\dfrac{2\pi}{15}, \dfrac{8\pi}{15}\right[$;
- $f'(x) > 0$ sur $\left]\dfrac{8\pi}{15}, \dfrac{4\pi}{5}\right]$.

Ainsi f' ne s'annule qu'en $\dfrac{2\pi}{15}$ et en $\dfrac{8\pi}{15}$.

Variations. Par le théorème du signe de la dérivée (cas strict), f est strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{2\pi}{15}\right]$, strictement décroissante sur $\left[\dfrac{2\pi}{15}, \dfrac{8\pi}{15}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\dfrac{8\pi}{15}, \dfrac{4\pi}{5}\right]$.

Valeurs. Par la question 3 :

- $f(0) = 2\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = 1$;
- $f\left(\dfrac{2\pi}{15}\right) = 2\cos 0 = 2$;

- $f\left(\dfrac{8\pi}{15}\right) = 2\cos\pi = -2$;
- $f\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) = 2\cos\left(\dfrac{5\pi}{3}\right) = 1$.

Tableau de variations. f croît de 1 à 2 sur $\left[0, \dfrac{2\pi}{15}\right]$, décroît de 2 à -2 sur $\left[\dfrac{2\pi}{15}, \dfrac{8\pi}{15}\right]$, puis croît de -2 à 1 sur $\left[\dfrac{8\pi}{15}, \dfrac{4\pi}{5}\right]$.

5. `0,75 pts`

En déduire les extremums locaux de f sur $\left]0, \dfrac{4\pi}{5}\right[$, puis le maximum et le minimum de f sur $\left[0, \dfrac{4\pi}{5}\right]$.

INDICE

Outil : les changements de signe de f' de la question 4, puis la comparaison avec les valeurs aux bornes.

CORRIGÉ

Extremums locaux. D'après la question 4, f' s'annule en $\dfrac{2\pi}{15}$ en passant du positif au négatif. Par la propriété de la dérivée qui s'annule en changeant de signe, f admet en $\dfrac{2\pi}{15}$ un maximum local, égal à 2. De même, f' s'annule en $\dfrac{8\pi}{15}$ en passant du négatif au positif : f admet en $\dfrac{8\pi}{15}$ un minimum local, égal à -2.

Comparaison aux bornes. On a $f(0) = f\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) = 1$, et $-2 < 1 < 2$. Le tableau de variations donne donc, pour tout $x \in \left[0, \dfrac{4\pi}{5}\right]$, $-2 \leq f(x) \leq 2$.

Conclusion. Sur $\left]0, \dfrac{4\pi}{5}\right[$, f admet un maximum local en $\dfrac{2\pi}{15}$, égal à 2, et un minimum local en $\dfrac{8\pi}{15}$, égal à -2. Sur $\left[0, \dfrac{4\pi}{5}\right]$, le maximum de f est 2, atteint en $\dfrac{2\pi}{15}$, et son minimum est -2, atteint en $\dfrac{8\pi}{15}$.

6. 1 pts

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4f'(x)^2 + 25f(x)^2$. Sans utiliser la question 3, montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $g'(x) = 0$ pour tout réel x. En déduire que, pour tout réel x, $4f'(x)^2 + 25f(x)^2 = 100$, puis que $-5 \leq f'(x) \leq 5$.

INDICE

Outil : la dérivée de u^2 est $2u'u$; remplace ensuite $4f''(x)$ à l'aide de (E).

CORRIGÉ

Dérivabilité de g. La fonction f est solution de (E) : elle est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et f' est dérivable, de dérivée f''. Par la propriété des puissances, $(u^2)' = 2u'u$; avec les propriétés de la somme et du produit par un réel, g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Dérivée nulle. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 8f''(x)f'(x) \\ &\quad + 50f'(x)f(x) \\ &= 2f'(x)\big(4f''(x) + 25f(x)\big) \\ &= 0, \end{aligned}$$

car $4f''(x) + 25f(x) = 0$ d'après (E).

Valeur de la constante. Par le théorème du signe de la dérivée (dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$), g est constante sur $\mathbb{R}$. Avec les conditions de la question 2, $f(0) = 1$ et $f'(0)^2 = \dfrac{75}{4}$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g(x) &= g(0) \\ &= 4 \times \frac{75}{4} + 25 \times 1 \\ &= 100. \end{aligned}$$

Encadrement de $f'(x)$. Comme $25f(x)^2 \geq 0$, on a $4f'(x)^2 \leq 100$, soit $f'(x)^2 \leq 25$.

Conclusion. Pour tout réel x, $4f'(x)^2 + 25f(x)^2 = 100$ et $-5 \leq f'(x) \leq 5$, sans passer par l'expression de f' de la question 4.

Exercice 5 5 pts

Des limites qui cachent un nombre dérivé

Dans les questions 1, 2 et 5, f désigne une fonction définie sur un intervalle ouvert I, et a un réel de I tel que f soit dérivable en a. Les réels h considérés sont non nuls et assez proches de 0 pour que $a+2h$, $a+h$ et $a-h$ appartiennent à I.

1. 0,75 pts

Montrer que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a)}{h}=2f'(a)$.

INDICE

Outil : pose $t=2h$ et fais apparaître le taux de variation de f entre a et $a+t$.

CORRIGÉ

Changement de variable. Posons $t=2h$. Alors $t\neq 0$, t tend vers 0 quand h tend vers 0, et :

$$\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}=2\times\frac{f(a+t)-f(a)}{t}.$$

Limite. Comme f est dérivable en a, $\dfrac{f(a+t)-f(a)}{t}$ tend vers $f'(a)$ quand t tend vers 0 (définition du nombre dérivé). D'après la propriété « se ramener à une limite en 0 », appliquée avec le réel non nul 2 (comme dans la preuve du nombre dérivé de $x\mapsto f(ax+b)$), $\dfrac{f(a+2h)-f(a)}{2h}$ tend vers $f'(a)$ quand h tend vers 0.

Conclusion. Par produit par le réel 2, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a)}{h}=2f'(a)$.

2. 0,75 pts

En déduire que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a-h)}{h}=3f'(a)$.

INDICE

Outil : ajoute et retranche $f(a)$ au numérateur.

CORRIGÉ

Décomposition. En ajoutant et en retranchant $f(a)$ au numérateur :

$$\frac{f(a+2h)-f(a-h)}{h}=\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}+\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}.$$

Limites. Le premier quotient tend vers $2f'(a)$ d'après la question 1. Dans le second, posons $s=-h$: par la définition du nombre dérivé et la propriété « se ramener à une limite en 0 », appliquée avec le réel non nul -1, $\dfrac{f(a+s)-f(a)}{s}$ tend vers $f'(a)$ quand h tend vers 0.

Conclusion. Par somme, la limite cherchée vaut $2f'(a)+f'(a)=3f'(a)$.

3. 0,75 pts

Application : calculer $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{6} + 2h\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6} - h\right)}{h}$.

INDICE

Outil : la question 2, avec la fonction sinus et $a = \dfrac{\pi}{6}$.

CORRIGÉ

La fonction $\sin$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par les dérivées usuelles, avec $\sin' = \cos$. Elle est donc dérivable en $\dfrac{\pi}{6}$, et $\sin'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

D'après la question 2, appliquée à la fonction $\sin$, avec $I = \mathbb{R}$ et $a = \dfrac{\pi}{6}$, la limite cherchée vaut :

$$\begin{aligned} 3\sin'\left(\frac{\pi}{6}\right) &= 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion. La limite demandée vaut $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

4. 1 pts

En reconnaissant un nombre dérivé, calculer $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{2\cos x-1}{x-\dfrac{\pi}{3}}$, puis $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan x-1}{4x-\pi}$.

INDICE

Outil : écris $1=2\cos\dfrac{\pi}{3}$ dans la première limite, puis $1=\tan\dfrac{\pi}{4}$ et $4x-\pi=4\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ dans la seconde.

CORRIGÉ

Première limite. Comme $\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$, pour $x\neq\dfrac{\pi}{3}$:

$$\frac{2\cos x-1}{x-\dfrac{\pi}{3}} = 2\times\frac{\cos x-\cos\dfrac{\pi}{3}}{x-\dfrac{\pi}{3}}.$$

Par les dérivées usuelles, $\cos$ est dérivable en $\dfrac{\pi}{3}$, avec $\cos'=-\sin$: ce taux de variation tend vers $-\sin\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Par produit, la première limite vaut $-\sqrt{3}$.

Seconde limite. Comme $\tan\dfrac{\pi}{4}=1$ et $4x-\pi=4\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$, pour $x\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $x\neq\dfrac{\pi}{4}$:

$$\frac{\tan x-1}{4x-\pi} = \frac{1}{4}\times\frac{\tan x-\tan\dfrac{\pi}{4}}{x-\dfrac{\pi}{4}}.$$

Par la dérivée de la tangente, $\tan$ est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, de dérivée $1+\tan^2$: ce taux tend vers $1+\tan^2\dfrac{\pi}{4}=2$. Par produit, la seconde limite vaut $\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

Conclusion. Les deux limites valent respectivement $-\sqrt{3}$ et $\dfrac{1}{2}$.

5. 0,75 pts

Montrer de même que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=f'(a)$.

INDICE

Outil : la décomposition de la question 2, appliquée à $f(a+h)-f(a-h)$.

CORRIGÉ

Décomposition. Comme à la question 2, en ajoutant et en retranchant $f(a)$:

$$\begin{aligned}&\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\\&\quad+\frac{1}{2}\times\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}.\end{aligned}$$

Limites. Par la définition du nombre dérivé, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers $f'(a)$. Le second quotient aussi, comme à la question 2 avec $s=-h$ (propriété « se ramener à une limite en 0 », appliquée avec le réel non nul -1).

Conclusion. Par somme et produit par le réel $\dfrac{1}{2}$, la limite vaut $\dfrac{1}{2}\big(f'(a)+f'(a)\big)=f'(a)$.

6. 1 pts

Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x)=|x-1|$. Montrer que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{k(1+h)-k(1-h)}{2h}=0$, mais que k n'est pas dérivable en 1. La réciproque du résultat de la question 5 est-elle vraie ?

INDICE

Point délicat : calcule séparément le taux de k entre 1 et x pour $x>1$, puis pour $x<1$.

CORRIGÉ

Le quotient symétrique. Pour $h\neq 0$, $k(1+h)=|h|$ et $k(1-h)=|-h|=|h|$. Le quotient $\dfrac{k(1+h)-k(1-h)}{2h}$ est donc nul pour tout $h\neq 0$: sa limite en 0 vaut 0.

Nombres dérivés latéraux. On a $k(1)=0$.

- Pour $x>1$: $\dfrac{k(x)-k(1)}{x-1}=\dfrac{x-1}{x-1}=1$, donc $k'_d(1)=1$.
- Pour $x<1$: $\dfrac{k(x)-k(1)}{x-1}=\dfrac{1-x}{x-1}=-1$, donc $k'_g(1)=-1$.

Ces deux nombres existent mais diffèrent. Par la propriété des nombres dérivés latéraux, k n'est pas dérivable en 1.

Conclusion. La réciproque est donc fausse : le quotient $\dfrac{k(1+h)-k(1-h)}{2h}$ a une limite en 0, alors que k n'est pas dérivable en 1. Pour établir la dérivabilité, il faut revenir au taux de variation $\dfrac{k(1+h)-k(1)}{h}$.