BURHAN

Dérivabilité : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/derivabilite/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Dérivabilité	Entraînement	8

Exercice 1

Un raccord avec le sinus

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x) = 2x^2 + x$ si $x \leq 0$;
- $f(x) = \sin x$ si $x > 0$.

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Calculer $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$.

INDICE

Outil : pour $x < 0$, utilise l'expression valable à gauche ; calcule d'abord $f(0)$.

2.

Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$.

INDICE

Outil : une limite usuelle du chapitre « Limite d'une fonction numérique ».

3.

En déduire que f est dérivable en 0, puis écrire une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ à l'origine.

INDICE

Outil : la propriété qui relie la dérivabilité aux deux nombres dérivés latéraux.

Exercice 2

Une demi-tangente verticale

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = (x-1)\sqrt{x}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Étudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter le résultat sur $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : pour $x > 0$, simplifie le taux $\dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ en écrivant $x = \sqrt{x} \times \sqrt{x}$.

2.

Montrer que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{3x - 1}{2\sqrt{x}}$.

INDICE

Outil : la propriété du produit sur $]0, +\infty[$.

3.

Écrire une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

INDICE

Outil : la formule de la question 2 en $x = 1$.

Exercice 3

Approximation affine et erreur commise

Soit f la fonction définie sur $]-2,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{2+x}$.

1.

Calculer $f(0)$ et $f'(0)$.

INDICE

Outil : la propriété de l'inverse.

2.

En déduire une valeur approchée de $\dfrac{1}{2{,}04}$ par l'approximation affine de f en 0.

INDICE

Outil : $f(h)\approx f(0)+f'(0)h$ pour h proche de 0 ; ici $h=0{,}04$.

3.

Montrer que, pour tout $h>-2$, $f(h)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{h}{4}+h\varphi(h)$, avec $\varphi(h)=\dfrac{h}{4(2+h)}$. Vérifier que $\varphi(h)$ tend vers 0 quand h tend vers 0.

INDICE

Outil : réduis $f(h)-\dfrac{1}{2}+\dfrac{h}{4}$ au dénominateur commun $4(2+h)$.

4.

Donner l'erreur commise à la question 2.

INDICE

Outil : l'erreur est l'écart entre $f(0{,}04)$ et sa valeur approchée ; utilise l'écriture de la question 3 avec $h=0{,}04$.

Exercice 4

Tableau de variations d'une fonction rationnelle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x - 2}$.

1.

Montrer que, pour tout $x \neq 2$, $f'(x) = \dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$.

INDICE

Outil : la propriété du quotient sur $]-\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$, puis la factorisation du numérateur.

2.

Étudier le signe de $f'(x)$. Préciser le sens de variation de f sur $]-\infty, 1]$, $[1, 2[$, $]2, 3]$ et $[3, +\infty[$.

INDICE

Point délicat : le dénominateur $(x-2)^2$ est strictement positif ; seul le numérateur décide du signe.

3.

Calculer $f(1)$ et $f(3)$, puis les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

INDICE

Outil : à l'infini, garde le terme de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

4.

Calculer les limites de f à gauche et à droite de 2, puis dresser le tableau de variations de f.

INDICE

Outil : le signe du dénominateur $x - 2$ de chaque côté de 2.

Exercice 5

Extremums sur un intervalle fermé

Soit f la fonction définie sur $[0, 2\pi]$ par $f(x) = x + 2\cos x$.

1.

Calculer $f'(x)$ et résoudre l'équation $f'(x) = 0$ sur $[0, 2\pi]$.

INDICE

Outil : la dérivée du cosinus, puis les solutions de $\sin x = \dfrac{1}{2}$ sur un tour.

2.

Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0, 2\pi]$, puis le sens de variation de f.

INDICE

Outil : sur $[0, 2\pi]$, $\sin x > \dfrac{1}{2}$ exactement quand x est strictement compris entre $\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{5\pi}{6}$.

3.

Déterminer les extremums locaux de f sur $]0, 2\pi[$. Quels sont le maximum et le minimum de f sur $[0, 2\pi]$?

INDICE

Point délicat : compare les extremums locaux aux valeurs $f(0)$ et $f(2\pi)$.

Exercice 6

Une formule pour toutes les dérivées

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(3x)$.

1.

Calculer $f'(x)$, $f''(x)$ et $f^{(3)}(x)$.

INDICE

Outil : la dérivée de $x \mapsto f(ax+b)$, appliquée à chaque étape avec $a = 3$.

2.

Vérifier que, pour tout réel t, $\sin\left(t + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos t$ et $\cos\left(t + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin t$. En déduire que $f'(x) = 3\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

INDICE

Outil : les formules d'addition, avec $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$ et $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$.

3.

Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x, $f^{(n)}(x) = 3^n \sin\left(3x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$.

INDICE

Outil : pour l'hérédité, dérive la formule au rang n, puis utilise la première égalité de la question 2.

4.

En déduire $f^{(5)}(0)$.

INDICE

Outil : la formule de la question 3 avec $n = 5$ et $x = 0$.

Exercice 7

Une solution sous deux conditions

On considère l'équation différentielle $y'' + \frac{1}{4}y = 0$.

1.

Donner le réel $a > 0$ tel que l'équation s'écrive $y'' + a^2 y = 0$, puis la forme de ses solutions sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : le théorème qui donne les solutions de $y'' + a^2 y = 0$.

2.

Déterminer la solution y de l'équation telle que $y(\pi) = 1$ et $y'(\pi) = 0$.

INDICE

Outil : écris $y'(x)$, puis remplace x par π dans y et dans y' ; utilise $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ et $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.

3.

Vérifier directement que cette fonction convient, puis calculer sa valeur en $\frac{\pi}{3}$.

INDICE

Outil : dérive deux fois, avec le facteur $\frac{1}{2}$ à chaque fois.

Exercice 8

Une inégalité par l'étude d'une fonction

On veut montrer que, pour tout réel $x > 0$:

$$2\sqrt{x} + \frac{1}{x} \geq 3.$$

Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = 2\sqrt{x} + \frac{1}{x} - 3$.

1.

Montrer que, pour tout $x > 0$, $g'(x) = \frac{x\sqrt{x} - 1}{x^2}$.

INDICE

Outil : les dérivées de la racine carrée et de l'inverse sur $]0, +\infty[$; puis $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x}}{x^2}$.

2.

Étudier le signe de $g'(x)$ sur $]0, +\infty[$, puis les variations de g.

INDICE

Outil : si $0 < x < y$, alors $x < y$ et $\sqrt{x} < \sqrt{y}$; que peut-on dire de $x\sqrt{x}$ et de $y\sqrt{y}$?

3.

En déduire l'inégalité annoncée. Pour quelle valeur de x est-ce une égalité ?

INDICE

Outil : reprends le tableau de variations de g (question 2) : où g est-elle la plus petite ?