BURHAN

Dérivabilité : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/derivabilite/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Dérivabilité	Entraînement	8

Exercice 1

Un raccord avec le sinus

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x) = 2x^2 + x$ si $x \leq 0$;
- $f(x) = \sin x$ si $x > 0$.

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Calculer $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$.

INDICE

Outil : pour $x < 0$, utilise l'expression valable à gauche ; calcule d'abord $f(0)$.

CORRIGÉ

Taux à gauche. On a $f(0) = 0$. Pour tout $x < 0$:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \frac{2x^2 + x}{x} \\ &= 2x + 1. \end{aligned}$$

Limite. Par la limite d'un polynôme en 0, $2x + 1$ tend vers 1 quand x tend vers 0.

Conclusion. $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 1$: f est dérivable à gauche en 0, et $f'_g(0) = 1$.

2.

Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$.

INDICE

Outil : une limite usuelle du chapitre « Limite d'une fonction numérique ».

CORRIGÉ

Taux à droite. Pour tout $x > 0$, $f(x) = \sin x$, donc :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\sin x}{x}.$$

Limite. Par la limite usuelle $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, ce taux tend vers 1 quand x tend vers 0 à droite.

Conclusion. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 1$: f est dérivable à droite en 0, et $f'_d(0) = 1$.

3.

En déduire que f est dérivable en 0, puis écrire une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ à l'origine.

INDICE

Outil : la propriété qui relie la dérivabilité aux deux nombres dérivés latéraux.

CORRIGÉ

Dérivabilité en 0. D'après les questions 1 et 2, les nombres dérivés à gauche et à droite en 0 existent et valent tous deux 1. Par la propriété des nombres dérivés latéraux, f est dérivable en 0, et $f'(0) = 1$.

Tangente. Une équation de la tangente à l'origine est $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$, soit $y = 1 \times x + 0$.

Conclusion. f est dérivable en 0, et la tangente à $\mathcal{C}_f$ à l'origine a pour équation $y = x$.

Exercice 2

Une demi-tangente verticale

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = (x-1)\sqrt{x}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Étudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter le résultat sur $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : pour $x > 0$, simplifie le taux $\dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ en écrivant $x = \sqrt{x} \times \sqrt{x}$.

CORRIGÉ

Taux en 0. On a $f(0) = 0$. Pour tout $x > 0$, comme $x = \sqrt{x} \times \sqrt{x}$:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \frac{(x-1)\sqrt{x}}{x} \\ &= \frac{x-1}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Limite. Quand x tend vers 0 à droite, $x - 1$ tend vers -1, et $\sqrt{x}$ tend vers 0 en restant strictement positif. Par la règle du quotient, le taux tend vers $-\infty$: f n'est pas dérivable à droite en 0.

Interprétation. Par produit, $f(x)$ tend vers $-1 \times 0 = 0 = f(0)$ quand x tend vers 0 à droite. Le taux tendant vers $-\infty$, la courbe admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente verticale.

Conclusion. f n'est pas dérivable à droite en 0, et $\mathcal{C}_f$ admet à l'origine une demi-tangente verticale.

2.

Montrer que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{3x-1}{2\sqrt{x}}$.

INDICE

Outil : la propriété du produit sur $]0, +\infty[$.

CORRIGÉ

Sur $]0, +\infty[$, la fonction affine $x \mapsto x - 1$ est dérivable, de dérivée constante égale à 1, et la fonction racine carrée est dérivable, de dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Par la propriété du produit, puis au dénominateur commun $2\sqrt{x}$, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \sqrt{x} + \frac{x-1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{2x + x - 1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{3x-1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{3x-1}{2\sqrt{x}}$.

3.

Écrire une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

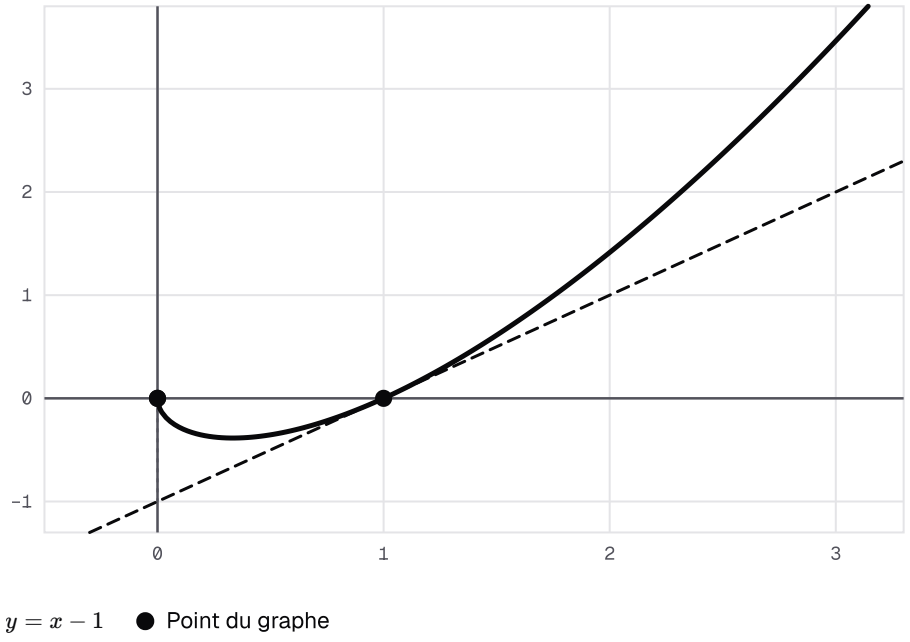
INDICE

Outil : la formule de la question 2 en $x = 1$.

CORRIGÉ

D'après la question 2, $f'(1) = \dfrac{3-1}{2\sqrt{1}} = 1$. De plus, $f(1) = 0 \times 1 = 0$. La tangente a pour équation $y = 1 \times (x-1) + 0$.

Conclusion. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation $y = x - 1$.



Courbe de f : x ↦ (x − 1)√x : à l'origine, elle part à la verticale, le long de l'axe des ordonnées ; au point d'abscisse 1, sa tangente a pour équation y = x − 1.

Exercice 3

Approximation affine et erreur commise

Soit f la fonction définie sur $]-2,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{2+x}$.

1.

Calculer $f(0)$ et $f'(0)$.

INDICE

Outil : la propriété de l'inverse.

CORRIGÉ

La fonction $x\mapsto 2+x$ est dérivable et ne s'annule pas sur $]-2,+\infty[$. Par la propriété de l'inverse, f est dérivable sur cet intervalle et, pour tout $x>-2$:

$$f'(x)=-\frac{1}{(2+x)^2}.$$

Conclusion. $f(0)=\dfrac{1}{2}$ et $f'(0)=-\dfrac{1}{4}$.

2.

En déduire une valeur approchée de $\dfrac{1}{2{,}04}$ par l'approximation affine de f en 0.

INDICE

Outil : $f(h)\approx f(0)+f'(0)h$ pour h proche de 0 ; ici $h=0{,}04$.

CORRIGÉ

D'après la question 1, l'approximation affine de f en 0 s'écrit, pour h proche de 0 :

$$f(h)\approx \frac{1}{2}-\frac{h}{4}.$$

Avec $h=0{,}04$, on a $\dfrac{h}{4}=0{,}01$, donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2{,}04}&=f(0{,}04)\\&\approx 0{,}5-0{,}01.\end{aligned}$$

Conclusion. $\dfrac{1}{2{,}04}\approx 0{,}49$.

3.

Montrer que, pour tout $h > -2$, $f(h) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{h}{4} + h\varphi(h)$, avec $\varphi(h) = \dfrac{h}{4(2+h)}$. Vérifier que $\varphi(h)$ tend vers 0 quand h tend vers 0.

INDICE

Outil : réduis $f(h) - \dfrac{1}{2} + \dfrac{h}{4}$ au dénominateur commun $4(2+h)$.

CORRIGÉ

Écriture. Soit $h > -2$. Au dénominateur commun $4(2+h)$:

$$\begin{aligned} & f(h) - \frac{1}{2} + \frac{h}{4} \\ &= \frac{4 - 2(2+h) + h(2+h)}{4(2+h)} \\ &= \frac{h^2}{4(2+h)} = h\varphi(h). \end{aligned}$$

Limite de $\varphi(h)$. Quand h tend vers 0, le numérateur h tend vers 0 et le dénominateur $4(2+h)$ tend vers 8. Par la règle du quotient, $\varphi(h)$ tend vers $\dfrac{0}{8} = 0$.

Conclusion. Pour tout $h > -2$, $f(h) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{h}{4} + h\varphi(h)$, et $\varphi(h)$ tend vers 0 quand h tend vers 0.

4.

Donner l'erreur commise à la question 2.

INDICE

Outil : l'erreur est l'écart entre $f(0{,}04)$ et sa valeur approchée ; utilise l'écriture de la question 3 avec $h = 0{,}04$.

CORRIGÉ

L'erreur est l'écart entre $f(0{,}04)$ et la valeur approchée $0{,}49$. D'après la question 3, avec $h = 0{,}04$:

$$\begin{aligned} f(0{,}04) - 0{,}49 &= h\varphi(h) \\ &= \frac{h^2}{4(2+h)} \\ &= \frac{0{,}0016}{8{,}16}. \end{aligned}$$

Ce quotient vaut environ $1{,}96 \times 10^{-4}$.

Conclusion. L'erreur commise vaut $\dfrac{0{,}0016}{8{,}16}$: elle est inférieure à 2×10^{-4}.

Exercice 4

Tableau de variations d'une fonction rationnelle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x - 2}$.

1.

Montrer que, pour tout $x \neq 2$, $f'(x) = \dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$.

INDICE

Outil : la propriété du quotient sur $]-\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$, puis la factorisation du numérateur.

CORRIGÉ

Dérivabilité. La fonction f est rationnelle et son dénominateur ne s'annule qu'en 2 : elle est dérivable sur $]-\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$.

Dérivée. Par la propriété du quotient, pour tout $x \neq 2$:

$$\begin{aligned} & f'(x) \\ &= \frac{2x(x-2) - (x^2 - 3)}{(x-2)^2} \\ &= \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}. \end{aligned}$$

Factorisation. Le trinôme $x^2 - 4x + 3$ a pour racines 1 et 3, donc $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$ pour tout réel x.

Conclusion. Pour tout $x \neq 2$, $f'(x) = \dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$.

2.

Étudier le signe de $f'(x)$. Préciser le sens de variation de f sur $]-\infty, 1]$, $[1, 2[$, $]2, 3]$ et $[3, +\infty[$.

INDICE

Point délicat : le dénominateur $(x-2)^2$ est strictement positif ; seul le numérateur décide du signe.

CORRIGÉ

Signe de $f'(x)$. Pour $x \neq 2$, $(x-2)^2 > 0$: $f'(x)$ a le signe de $(x-1)(x-3)$. Ce produit est positif à l'extérieur de $[1, 3]$ et négatif sur $]1, 3[$. Donc :

- $f'(x) > 0$ sur $]-\infty, 1[$ et sur $]3, +\infty[$;
- $f'(x) < 0$ sur $]1, 2[$ et sur $]2, 3[$.

La dérivée f' ne s'annule qu'en 1 et en 3.

Conclusion. Par le théorème du signe de la dérivée (cas strict), appliqué sur chaque intervalle :

- f est strictement croissante sur $]-\infty, 1]$ et sur $[3, +\infty[$;
- f est strictement décroissante sur $[1, 2[$ et sur $]2, 3]$.

3.

Calculer $f(1)$ et $f(3)$, puis les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

INDICE

Outil : à l'infini, garde le terme de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

CORRIGÉ

Valeurs. On a $f(1) = \dfrac{1-3}{1-2} = \dfrac{-2}{-1} = 2$ et $f(3) = \dfrac{9-3}{3-2} = 6$.

Limites à l'infini. Par la règle des termes de plus haut degré, en $-\infty$ comme en $+\infty$, $f(x)$ a la même limite que $\dfrac{x^2}{x} = x$.

Conclusion. $f(1) = 2$ et $f(3) = 6$; f tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et vers $+\infty$ en $+\infty$.

4.

Calculer les limites de f à gauche et à droite de 2, puis dresser le tableau de variations de f.

INDICE

Outil : le signe du dénominateur $x - 2$ de chaque côté de 2.

CORRIGÉ

Limites en 2. Quand x tend vers 2, le numérateur $x^2 - 3$ tend vers 1, et le dénominateur $x - 2$ tend vers 0 : il est positif à droite de 2 et négatif à gauche. Par la règle du quotient, $f(x)$ tend vers $+\infty$ à droite de 2 et vers $-\infty$ à gauche de 2.

Tableau de variations. D'après les questions 2 et 3 :

- sur $]-\infty, 1]$, f croît de $-\infty$ à 2 ;
- sur $[1, 2[$, f décroît de 2 à $-\infty$;
- sur $]2, 3]$, f décroît de $+\infty$ à 6 ;
- sur $[3, +\infty[$, f croît de 6 à $+\infty$.

Exercice 5

Extremums sur un intervalle fermé

Soit f la fonction définie sur $[0, 2\pi]$ par $f(x) = x + 2\cos x$.

1.

Calculer $f'(x)$ et résoudre l'équation $f'(x) = 0$ sur $[0, 2\pi]$.

INDICE

Outil : la dérivée du cosinus, puis les solutions de $\sin x = \dfrac{1}{2}$ sur un tour.

CORRIGÉ

Dérivée. Par la propriété de la somme et la dérivée du cosinus, f est dérivable sur $[0, 2\pi]$ et, pour tout x de cet intervalle :

$$f'(x) = 1 - 2\sin x.$$

Équation. Pour $x \in [0, 2\pi]$, $f'(x) = 0$ équivaut à $\sin x = \dfrac{1}{2}$. Sur $[0, 2\pi]$, cette équation a pour solutions $\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{5\pi}{6}$.

Conclusion. Pour tout $x \in [0, 2\pi]$, $f'(x) = 1 - 2\sin x$; l'équation $f'(x) = 0$ a pour solutions $\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{5\pi}{6}$.

2.

Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0, 2\pi]$, puis le sens de variation de f.

INDICE

Outil : sur $[0, 2\pi]$, $\sin x > \dfrac{1}{2}$ exactement quand x est strictement compris entre $\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{5\pi}{6}$.

CORRIGÉ

Signe de $f'(x)$. Pour $x \in [0, 2\pi]$, $f'(x) < 0$ si et seulement si $\sin x > \dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire si $x \in \left]\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right[$.

Donc :

- $f'(x) > 0$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{6}\right[$ et sur $\left]\dfrac{5\pi}{6}, 2\pi\right]$;
- $f'(x) < 0$ sur $\left]\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right[$.

La dérivée f' ne s'annule qu'en $\dfrac{\pi}{6}$ et en $\dfrac{5\pi}{6}$.

Conclusion. Par le théorème du signe de la dérivée (cas strict), f est strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{6}\right]$ et sur $\left[\dfrac{5\pi}{6}, 2\pi\right]$, et strictement décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right]$.

3.

Déterminer les extremums locaux de f sur $]0, 2\pi[$. Quels sont le maximum et le minimum de f sur $[0, 2\pi]$?

INDICE

Point délicat : compare les extremums locaux aux valeurs $f(0)$ et $f(2\pi)$.

CORRIGÉ

Extremums locaux. D'après la question 2, f' s'annule en changeant de signe en $\dfrac{\pi}{6}$ (de positive à négative) et en $\dfrac{5\pi}{6}$ (de négative à positive). Par la propriété de la dérivée qui s'annule en changeant de signe :

- f admet en $\dfrac{\pi}{6}$ un maximum local, égal à $\dfrac{\pi}{6} + \sqrt{3}$;
- f admet en $\dfrac{5\pi}{6}$ un minimum local, égal à $\dfrac{5\pi}{6} - \sqrt{3}$.

Encadrements. Aux bornes, $f(0) = 2$ et $f(2\pi) = 2\pi + 2$. Sur chacun des trois intervalles de monotonie de la question 2 :

- sur $\left[0, \dfrac{\pi}{6}\right]$, f croît, donc $2 \leq f(x) \leq \dfrac{\pi}{6} + \sqrt{3}$;
- sur $\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right]$, f décroît, donc $\dfrac{5\pi}{6} - \sqrt{3} \leq f(x) \leq \dfrac{\pi}{6} + \sqrt{3}$;
- sur $\left[\dfrac{5\pi}{6}, 2\pi\right]$, f croît, donc $\dfrac{5\pi}{6} - \sqrt{3} \leq f(x) \leq 2\pi + 2$.

Minimum. Le minimum de f sur $[0, 2\pi]$ est donc le plus petit des nombres $f(0) = 2$ et $f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = \dfrac{5\pi}{6} - \sqrt{3}$. Comme $\pi < 3{,}15$, on a $\dfrac{5\pi}{6} < 2{,}63$; avec $\sqrt{3} > 1{,}73$, on obtient :

$$\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3} < 0{,}9 < 2.$$

Le minimum est donc $\dfrac{5\pi}{6} - \sqrt{3}$, atteint en $\dfrac{5\pi}{6}$.

Maximum. C'est le plus grand des nombres $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\pi}{6} + \sqrt{3}$ et $f(2\pi) = 2\pi + 2$. De $\pi < 3{,}15$, on tire $\dfrac{\pi}{6} < 0{,}53$; avec $\sqrt{3} < 1{,}74$, on a $\dfrac{\pi}{6} + \sqrt{3} < 2{,}27$. Or $\pi > 3$ donne $2\pi + 2 > 8$. Le maximum est donc $2\pi + 2$, atteint à la borne 2π, où $f'(2\pi) = 1 \neq 0$.

Conclusion. Sur $]0, 2\pi[$, f admet un maximum local en $\dfrac{\pi}{6}$ et un minimum local en $\dfrac{5\pi}{6}$. Sur $[0, 2\pi]$, son minimum est $\dfrac{5\pi}{6} - \sqrt{3}$ et son maximum est $2\pi + 2$.

Exercice 6

Une formule pour toutes les dérivées

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(3x)$.

1.

Calculer $f'(x)$, $f''(x)$ et $f^{(3)}(x)$.

INDICE

Outil : la dérivée de $x \mapsto f(ax+b)$, appliquée à chaque étape avec $a = 3$.

CORRIGÉ

Par la propriété de $x \mapsto f(ax+b)$, avec $a = 3$ et $b = 0$, et par les dérivées du sinus et du cosinus, chaque fonction obtenue est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\cos(3x), \\ f''(x) &= -9\sin(3x), \\ f^{(3)}(x) &= -27\cos(3x). \end{aligned}$$

2.

Vérifier que, pour tout réel t, $\sin\left(t + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos t$ et $\cos\left(t + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin t$. En déduire que $f'(x) = 3\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

INDICE

Outil : les formules d'addition, avec $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$ et $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$.

CORRIGÉ

Les deux égalités. Soit t un réel. Par les formules d'addition, avec $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$ et $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$:

$$\begin{aligned} \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) &= \sin t\cos\frac{\pi}{2} \\ &\quad + \cos t\sin\frac{\pi}{2} \\ &= \cos t, \\ \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos t\cos\frac{\pi}{2} \\ &\quad - \sin t\sin\frac{\pi}{2} \\ &= -\sin t. \end{aligned}$$

Application. Avec $t = 3x$, la première égalité donne, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} 3\sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) &= 3\cos(3x) \\ &= f'(x). \end{aligned}$$

Conclusion. Les deux égalités sont vraies pour tout réel t et, pour tout réel x, $f'(x) = 3\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

3.

Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x, $f^{(n)}(x) = 3^n \sin\left(3x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$.

INDICE

Outil : pour l'hérédité, dérive la formule au rang n, puis utilise la première égalité de la question 2.

CORRIGÉ

Pour tout entier $n \geq 1$, notons $P(n)$ la propriété : « pour tout réel x, $f^{(n)}(x) = 3^n \sin\left(3x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ ».

Initialisation. Pour $n = 1$, c'est l'égalité de la question 2 : $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geq 1$ tel que $P(n)$ soit vraie. La fonction $\sin$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\cos$. Par la propriété de $x \mapsto f(ax+b)$, avec $a = 3$ et $b = \dfrac{n\pi}{2}$, la fonction $x \mapsto \sin\left(3x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto 3\cos\left(3x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$.

Par la propriété du produit par le réel 3^n, $f^{(n)}$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Le passage du cosinus au sinus vient de la première égalité de la question 2, avec $t = 3x + \dfrac{n\pi}{2}$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & f^{(n+1)}(x) \\ &= 3^n \times 3\cos\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right) \\ &= 3^{n+1}\sin\left(3x + \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 3^{n+1}\sin\left(3x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Ainsi $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par récurrence, pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x, $f^{(n)}(x) = 3^n \sin\left(3x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$.

4.

En déduire $f^{(5)}(0)$.

INDICE

Outil : la formule de la question 3 avec $n = 5$ et $x = 0$.

CORRIGÉ

D'après la question 3, avec $n = 5$ et $x = 0$:

$$\begin{aligned} f^{(5)}(0) &= 3^5 \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) \\ &= 243\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 243. \end{aligned}$$

Conclusion. $f^{(5)}(0) = 243$.

Exercice 7

Une solution sous deux conditions

On considère l'équation différentielle $y'' + \frac{1}{4}y = 0$.

1.

Donner le réel $a > 0$ tel que l'équation s'écrive $y'' + a^2 y = 0$, puis la forme de ses solutions sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : le théorème qui donne les solutions de $y'' + a^2 y = 0$.

CORRIGÉ

Le réel a. On a $\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$: l'équation s'écrit $y'' + a^2 y = 0$ avec $a = \frac{1}{2}$, et $a > 0$.

Solutions. Par le théorème des solutions de $y'' + a^2 y = 0$, les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions :

$$x \mapsto \alpha \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \beta \sin\left(\frac{x}{2}\right),$$

où α et β sont des réels.

2.

Déterminer la solution y de l'équation telle que $y(\pi) = 1$ et $y'(\pi) = 0$.

INDICE

Outil : écris $y'(x)$, puis remplace x par π dans y et dans y' ; utilise $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ et $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.

CORRIGÉ

Dérivée. D'après la question 1, il existe deux réels α et β tels que, pour tout réel x, $y(x) = \alpha \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \beta \sin\left(\frac{x}{2}\right)$. Par la propriété de $x \mapsto f(ax+b)$, avec $a = \frac{1}{2}$ et $b = 0$, pour tout réel x :

$$y'(x) = -\frac{\alpha}{2} \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{\beta}{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

Conditions. Avec $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ et $\sin\frac{\pi}{2} = 1$:

- $y(\pi) = \beta$, donc la condition $y(\pi) = 1$ donne $\beta = 1$;
- $y'(\pi) = -\frac{\alpha}{2}$, donc la condition $y'(\pi) = 0$ donne $\alpha = 0$.

Conclusion. La solution cherchée est unique : $y : x \mapsto \sin\left(\frac{x}{2}\right)$.

3.

Vérifier directement que cette fonction convient, puis calculer sa valeur en $\frac{\pi}{3}$.

INDICE

Outil : dérive deux fois, avec le facteur $\frac{1}{2}$ à chaque fois.

CORRIGÉ

Équation. Par la propriété de $x \mapsto f(ax+b)$, avec $a = \frac{1}{2}$ et $b = 0$, pour tout réel x :

$$y'(x) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right),$$
$$y''(x) = -\frac{1}{4}\sin\left(\frac{x}{2}\right).$$

Donc $y''(x) + \frac{1}{4}y(x) = 0$ pour tout réel x.

Conditions. $y(\pi) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ et $y'(\pi) = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

Valeur demandée. $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Conclusion. La fonction y est solution de l'équation et vérifie les deux conditions ; de plus, $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

Exercice 8

Une inégalité par l'étude d'une fonction

On veut montrer que, pour tout réel $x > 0$:

$$2\sqrt{x} + \frac{1}{x} \geq 3.$$

Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = 2\sqrt{x} + \frac{1}{x} - 3$.

1.

Montrer que, pour tout $x > 0$, $g'(x) = \frac{x\sqrt{x} - 1}{x^2}$.

INDICE

Outil : les dérivées de la racine carrée et de l'inverse sur $]0, +\infty[$; puis $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x}}{x^2}$.

CORRIGÉ

Dérivée. Sur $]0, +\infty[$, la fonction racine carrée et la fonction inverse sont dérivables. Par les dérivées usuelles et la propriété de la somme, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Même dénominateur. Pour $x > 0$, $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{x\sqrt{x}}{x^2}$.

Conclusion. Pour tout $x > 0$, $g'(x) = \frac{x\sqrt{x} - 1}{x^2}$.

2.

Étudier le signe de $g'(x)$ sur $]0, +\infty[$, puis les variations de g.

INDICE

Outil : si $0 < x < y$, alors $x < y$ et $\sqrt{x} < \sqrt{y}$; que peut-on dire de $x\sqrt{x}$ et de $y\sqrt{y}$?

CORRIGÉ

Une fonction strictement croissante. Soit x et y deux réels tels que $0 < x < y$. Alors $0 < \sqrt{x} < \sqrt{y}$. En multipliant membre à membre ces inégalités entre nombres positifs, $x\sqrt{x} < y\sqrt{y}$. Ainsi $x \mapsto x\sqrt{x}$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, et elle vaut 1 en 1.

Signe de $g'(x)$. Donc $x\sqrt{x} - 1 < 0$ sur $]0, 1[$ et $x\sqrt{x} - 1 > 0$ sur $]1, +\infty[$. Comme $x^2 > 0$, $g'(x)$ a le même signe ; g' ne s'annule qu'en 1.

Conclusion. Par le théorème du signe de la dérivée (cas strict), g est strictement décroissante sur $]0, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

3.

En déduire l'inégalité annoncée. Pour quelle valeur de x est-ce une égalité ?

INDICE

Outil : reprends le tableau de variations de g (question 2) : où g est-elle la plus petite ?

CORRIGÉ

Minimum. D'après la question 2, g admet en 1 un minimum sur $]0,+\infty[$, égal à $g(1)=2+1-3=0$.

Donc $g(x)\geq 0$ pour tout $x>0$, c'est-à-dire $2\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}\geq 3$.

Cas d'égalité. Si $x\neq 1$, la stricte monotonie de g de chaque côté de 1 donne $g(x)>g(1)=0$.

Conclusion. Pour tout réel $x>0$, $2\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}\geq 3$, avec égalité seulement pour $x=1$.