BURHAN

Dérivabilité : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/derivabilite/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Dérivabilité	Application	10

Exercice 1

Nombre dérivé par la définition

Dans chaque question, revenir à la définition du nombre dérivé : taux de variation, simplification, limite quand h tend vers 0.

1.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 5x$. Montrer que f est dérivable en 3 et calculer $f'(3)$.

INDICE

Outil : le taux $\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}$, pour $h \neq 0$. Développe $(3+h)^2$.

2.

Soit g la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{2}{x+1}$. Montrer que g est dérivable en 1 et calculer $g'(1)$.

INDICE

Outil : la même définition. Réduis $g(1+h) - g(1)$ au même dénominateur.

3.

Soit k la fonction définie sur $[-8, +\infty[$ par $k(x) = \sqrt{x+8}$. Montrer que k est dérivable en 1 et calculer $k'(1)$.

INDICE

Outil : multiplie le numérateur et le dénominateur du taux par la quantité conjuguée $\sqrt{9+h}+3$.

Exercice 2

Deux tangentes à une même courbe

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère.

1.

Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

INDICE

Outil : la dérivée des puissances entières et la propriété de la somme.

2.

Écrire une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1. Que remarque-t-on ?

INDICE

Outil : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$, avec $a = 1$.

3.

Écrire une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2.

INDICE

Point délicat : calcule d'abord $f'(2)$; que dit sa valeur sur la direction de la tangente ?

Exercice 3

Dériver un produit

Chacune des fonctions suivantes est définie sur $\mathbb{R}$. Dans chaque cas, nommer les deux facteurs, puis donner la dérivée.

1.

$f(x) = (3x^2 + 1)(x - 4)$.

INDICE

Outil : la propriété du produit, avec $u : x \mapsto 3x^2 + 1$ et $v : x \mapsto x - 4$.

2.

$g(x) = (2x + 1)\sin x$.

INDICE

Outil : la propriété du produit et la dérivée du sinus.

Exercice 4

Dériver un quotient ou un inverse

Pour chaque fonction, préciser d'abord sur quels intervalles elle est dérivable.

1.

$f(x) = \dfrac{3x+2}{x-4}$, pour $x \neq 4$.

INDICE

Point délicat : f n'est pas définie en 4 ; on dérive sur chacun des intervalles $]-\infty, 4[$ et $]4, +\infty[$.

2.

$g(x) = \dfrac{x^2}{x^2+3}$, pour tout réel x.

INDICE

Outil : la propriété du quotient ; le dénominateur ne s'annule jamais.

3.

$k(x) = \dfrac{1}{x^2+x+2}$, pour tout réel x.

INDICE

Outil : la propriété de l'inverse. Montre d'abord, par le discriminant, que le dénominateur ne s'annule pas.

Exercice 5

Puissances d'une fonction

On rappelle que $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ pour tout entier n ; lorsque l'exposant est négatif, u ne doit pas s'annuler.

1.

Dériver la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2+2x)^3$.

INDICE

Outil : la formule rappelée, avec $n = 3$ et $u : x \mapsto x^2 + 2x$.

2.

Dériver la fonction g définie pour $x \neq \dfrac{1}{3}$ par $g(x) = \dfrac{1}{(3x-1)^2}$.

INDICE

Outil : écris $g = u^{-2}$, avec $u : x \mapsto 3x - 1$. **Point délicat :** sur quels intervalles u ne s'annule-t-elle pas ?

Exercice 6

Le facteur a d'une fonction affine

Rappel : si f est dérivable sur un intervalle ouvert, la dérivée de $x \mapsto f(ax+b)$ est $x \mapsto af'(ax+b)$, là où $ax+b$ reste dans cet intervalle.

1.

Dériver $x \mapsto \sin(3x-1)$ sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : le rappel, avec $a=3$ et $b=-1$.

2.

Dériver $x \mapsto (5-2x)^4$ sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Point délicat : le coefficient de x est négatif ; il apparaît dans la dérivée.

3.

Dériver $x \mapsto \tan(2x)$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right[$.

INDICE

Outil : la dérivée de $\tan$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Vérifie que $2x$ reste dans cet intervalle.

Exercice 7

Racine carrée d'une fonction

La propriété de la racine carrée d'une fonction exige que la quantité sous la racine soit strictement positive.

1.

Dériver la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{3x^2+1}$.

INDICE

Outil : $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, avec $u : x \mapsto 3x^2+1$.

2.

Soit g la fonction définie sur $]-\infty, 3]$ par $g(x) = \sqrt{6-2x}$. Sur quel intervalle ouvert la propriété s'applique-t-elle ? Donner $g'(x)$ sur cet intervalle.

INDICE

Point délicat : en 3, la quantité sous la racine est nulle.

Exercice 8

Dérivées avec sinus et cosinus

Les fonctions suivantes sont définies sur $\mathbb{R}$; x désigne une mesure en radians.

1.

Dériver $f : x \mapsto 2\sin x - 3\cos x$.

INDICE

Outil : les dérivées de $\sin$ et de $\cos$, la somme et le produit par un réel.

2.

Soit $g : x \mapsto \sin x \cos x$. Montrer que $g'(x) = \cos(2x)$ pour tout réel x.

INDICE

Outil : la propriété du produit, puis une formule de duplication.

3.

Dériver $k : x \mapsto \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$.

INDICE

Point délicat : vérifie que $2 + \cos x$ ne s'annule pas, puis simplifie par $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Exercice 9

Lire les variations sur le signe de la dérivée

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 12x + 5$.

1.

Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = -6(x - 1)(x - 2)$.

INDICE

Outil : dérive le polynôme, puis factorise le trinôme obtenu par ses racines.

2.

Étudier le signe de $f'(x)$. En déduire le sens de variation de f sur $]-\infty, 1]$, sur $[1, 2]$ et sur $[2, +\infty[$.

INDICE

Outil : le signe d'un trinôme, puis le théorème du signe de la dérivée, intervalle par intervalle.

Exercice 10

Vérifier une solution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle $y'' + 2y = 0$, d'inconnue y deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4\cos\left(\sqrt{2}\,x\right) - \sin\left(\sqrt{2}\,x\right)$. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$, puis montrer que f est solution.

INDICE

Outil : la dérivée de $x \mapsto \cos(ax)$ est $x \mapsto -a\sin(ax)$, celle de $x \mapsto \sin(ax)$ est $x \mapsto a\cos(ax)$.

2.

La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\sin\left(\sqrt{2}\,x\right)$ est-elle solution de l'équation ?

INDICE

Outil : la propriété du produit, appliquée deux fois, pour calculer $g''(x) + 2g(x)$.