BURHAN

Dérivabilité : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/derivabilite/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Dérivabilité	Application	10

Exercice 1

Nombre dérivé par la définition

Dans chaque question, revenir à la définition du nombre dérivé : taux de variation, simplification, limite quand h tend vers 0.

1.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 5x$. Montrer que f est dérivable en 3 et calculer $f'(3)$.

INDICE

Outil : le taux $\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}$, pour $h \neq 0$. Développe $(3+h)^2$.

CORRIGÉ

Taux de variation. Soit h un réel non nul. On a $f(3) = 9 - 15 = -6$ et :

$$\begin{aligned} &f(3+h) \\ &= (3+h)^2 - 5(3+h) \\ &= 9 + 6h + h^2 - 15 - 5h \\ &= -6 + h + h^2. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} &= \frac{h+h^2}{h} \\ &= 1 + h. \end{aligned}$$

Limite. Par la limite d'un polynôme en 0, $1 + h$ tend vers 1 quand h tend vers 0. Cette limite est finie.

Conclusion. f est dérivable en 3, et $f'(3) = 1$.

2.

Soit g la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{2}{x+1}$. Montrer que g est dérivable en 1 et calculer $g'(1)$.

INDICE

Outil : la même définition. Réduis $g(1+h)-g(1)$ au même dénominateur.

CORRIGÉ

Taux de variation. Soit h un réel non nul tel que $h>-2$, de sorte que $1+h>-1$. On a $g(1)=1$ et $g(1+h)=\dfrac{2}{2+h}$, donc :

$$\begin{aligned} &g(1+h)-g(1)\\ &=\frac{2}{2+h}-1\\ &=\frac{2-(2+h)}{2+h}\\ &=\frac{-h}{2+h}. \end{aligned}$$

Le taux vaut donc :

$$\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=-\frac{1}{2+h}.$$

Limite. Quand h tend vers 0, $2+h$ tend vers $2\neq 0$. Par la règle du quotient, le taux tend vers $-\dfrac{1}{2}$.

Conclusion. g est dérivable en 1, et $g'(1)=-\dfrac{1}{2}$.

3.

Soit k la fonction définie sur $[-8, +\infty[$ par $k(x) = \sqrt{x+8}$. Montrer que k est dérivable en 1 et calculer $k'(1)$.

INDICE

Outil : multiplie le numérateur et le dénominateur du taux par la quantité conjuguée $\sqrt{9+h}+3$.

CORRIGÉ

Taux de variation. Soit h un réel non nul tel que $h \geq -9$. On a $k(1) = 3$ et $k(1+h) = \sqrt{9+h}$. Par la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned} &\frac{k(1+h)-k(1)}{h} \\ &= \frac{\sqrt{9+h}-3}{h} \\ &= \frac{(9+h)-9}{h\left(\sqrt{9+h}+3\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{9+h}+3}. \end{aligned}$$

Limite. Quand h tend vers 0, $9+h$ tend vers 9, donc $\sqrt{9+h}$ tend vers $\sqrt{9} = 3$. Par somme, le dénominateur tend vers 6 ; par la règle du quotient, le taux tend vers $\dfrac{1}{6}$.

Conclusion. k est dérivable en 1, et $k'(1) = \dfrac{1}{6}$.

Exercice 2

Deux tangentes à une même courbe

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère.

1.

Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

INDICE

Outil : la dérivée des puissances entières et la propriété de la somme.

CORRIGÉ

La fonction f est un polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Par la dérivée des puissances et la propriété de la somme, pour tout réel x :

$$f'(x) = -3x^2 + 6x.$$

2.

Écrire une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1. Que remarque-t-on ?

INDICE

Outil : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$, avec $a = 1$.

CORRIGÉ

On a $f(1) = -1 + 3 + 1 = 3$ et $f'(1) = -3 + 6 = 3$. Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$, soit :

$$y = 3(x - 1) + 3.$$

Conclusion. La tangente a pour équation $y = 3x$. Elle passe par l'origine du repère.

3.

Écrire une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2.

INDICE

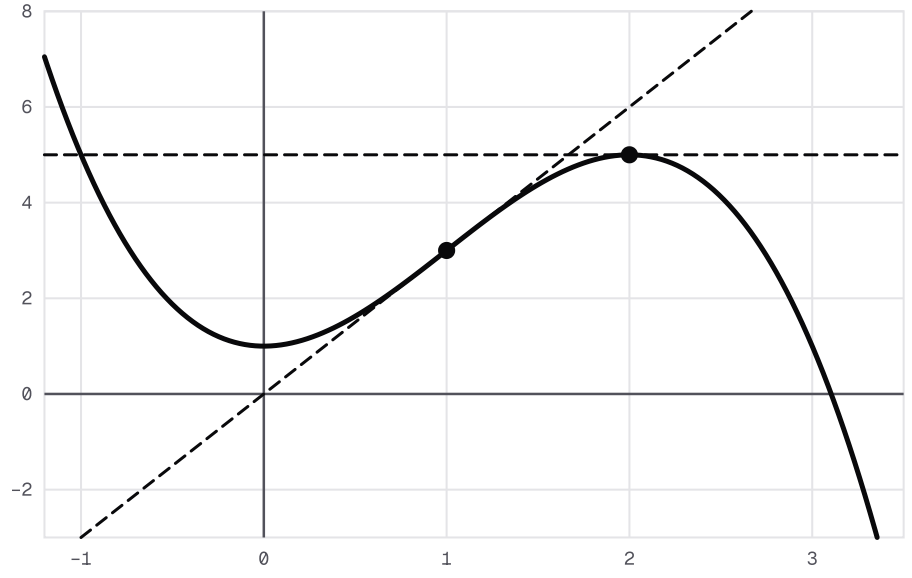
Point délicat : calcule d'abord $f'(2)$; que dit sa valeur sur la direction de la tangente ?

CORRIGÉ

On a $f(2) = -8 + 12 + 1 = 5$ et $f'(2) = -12 + 12 = 0$. La tangente au point d'abscisse 2 a donc pour équation :

$$y = 0 \times (x - 2) + 5.$$

Conclusion. La tangente a pour équation $y = 5$. Son coefficient directeur est nul : elle est parallèle à l'axe des abscisses.



Courbe de f : x ↦ −x³ + 3x² + 1 avec ses tangentes aux points d'abscisses 1 et 2 : y = 3x, qui passe par l'origine, et y = 5, parallèle à l'axe des abscisses.

Exercice 3

Dériver un produit

Chacune des fonctions suivantes est définie sur $\mathbb{R}$. Dans chaque cas, nommer les deux facteurs, puis donner la dérivée.

1.

$f(x) = (3x^2 + 1)(x - 4)$.

INDICE

Outil : la propriété du produit, avec $u : x \mapsto 3x^2 + 1$ et $v : x \mapsto x - 4$.

CORRIGÉ

Les deux facteurs. Posons $u : x \mapsto 3x^2 + 1$ et $v : x \mapsto x - 4$. Ce sont des polynômes, dérivables sur $\mathbb{R}$, avec $u'(x) = 6x$ et $v'(x) = 1$.

Dérivée. Par la propriété du produit, $(uv)' = u'v + uv'$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x(x - 4) \\ &\quad + (3x^2 + 1) \times 1 \\ &= 9x^2 - 24x + 1. \end{aligned}$$

Conclusion. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f'(x) = 9x^2 - 24x + 1$.

2.

$g(x) = (2x + 1)\sin x$.

INDICE

Outil : la propriété du produit et la dérivée du sinus.

CORRIGÉ

Les deux facteurs. La fonction affine $x \mapsto 2x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée constante égale à 2. La fonction $\sin$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\cos$.

Dérivée. Par la propriété du produit, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2\sin x \\ &\quad + (2x + 1)\cos x. \end{aligned}$$

Exercice 4

Dériver un quotient ou un inverse

Pour chaque fonction, préciser d'abord sur quels intervalles elle est dérivable.

1.

$f(x) = \dfrac{3x+2}{x-4}$, pour $x \neq 4$.

INDICE

Point délicat : f n'est pas définie en 4 ; on dérive sur chacun des intervalles $]-\infty, 4[$ et $]4, +\infty[$.

CORRIGÉ

Intervalles. La fonction f est rationnelle et son dénominateur ne s'annule qu'en 4. Elle est donc dérivable sur $]-\infty, 4[$ et sur $]4, +\infty[$.

Dérivée. Posons $u : x \mapsto 3x+2$ et $v : x \mapsto x-4$, avec $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 1$. Par la propriété du quotient, $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$. Pour tout réel $x \neq 4$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3(x-4) - (3x+2)}{(x-4)^2} \\ &= \frac{3x - 12 - 3x - 2}{(x-4)^2} \\ &= -\frac{14}{(x-4)^2}. \end{aligned}$$

Conclusion. f est dérivable sur $]-\infty, 4[$ et sur $]4, +\infty[$, et $f'(x) = -\dfrac{14}{(x-4)^2}$ pour tout $x \neq 4$.

2.

$g(x) = \dfrac{x^2}{x^2+3}$, pour tout réel x.

INDICE

Outil : la propriété du quotient ; le dénominateur ne s'annule jamais.

CORRIGÉ

Intervalle. Pour tout réel x, $x^2 + 3 \geq 3 > 0$: le dénominateur ne s'annule pas. Par la propriété du quotient, g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Dérivée. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &g'(x) \\ &= \frac{2x(x^2+3) - x^2 \times 2x}{(x^2+3)^2} \\ &= \frac{2x^3 + 6x - 2x^3}{(x^2+3)^2} \\ &= \frac{6x}{(x^2+3)^2}. \end{aligned}$$

Conclusion. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $g'(x) = \dfrac{6x}{(x^2+3)^2}$.

3.

$k(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 2}$, pour tout réel x.

INDICE

Outil : la propriété de l'inverse. Montre d'abord, par le discriminant, que le dénominateur ne s'annule pas.

CORRIGÉ

Le dénominateur ne s'annule pas. Le discriminant de $x^2 + x + 2$ vaut $1 - 8 = -7 < 0$. Ce trinôme garde donc le signe de son coefficient dominant 1 : il est strictement positif sur $\mathbb{R}$.

Dérivée. Posons $u : x \mapsto x^2 + x + 2$, dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $u'(x) = 2x + 1$. Par la propriété de l'inverse, $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$.

Conclusion. k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$k'(x) = -\frac{2x + 1}{(x^2 + x + 2)^2}.$$

Exercice 5

Puissances d'une fonction

On rappelle que $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ pour tout entier n ; lorsque l'exposant est négatif, u ne doit pas s'annuler.

1.

Dériver la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + 2x)^3$.

INDICE

Outil : la formule rappelée, avec $n = 3$ et $u : x \mapsto x^2 + 2x$.

CORRIGÉ

Posons $u : x \mapsto x^2 + 2x$, dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $u'(x) = 2x + 2$. Par la propriété des puissances avec $n = 3$, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(2x + 2)(x^2 + 2x)^2 \\ &= 6(x + 1)(x^2 + 2x)^2. \end{aligned}$$

2.

Dériver la fonction g définie pour $x \neq \dfrac{1}{3}$ par $g(x) = \dfrac{1}{(3x - 1)^2}$.

INDICE

Outil : écris $g = u^{-2}$, avec $u : x \mapsto 3x - 1$. **Point délicat :** sur quels intervalles u ne s'annule-t-elle pas ?

CORRIGÉ

Intervalles. La fonction $u : x \mapsto 3x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $u'(x) = 3$. Elle ne s'annule qu'en $\dfrac{1}{3}$: elle ne s'annule ni sur $\left]-\infty, \dfrac{1}{3}\right[$, ni sur $\left]\dfrac{1}{3}, +\infty\right[$.

Dérivée. On a $g = u^{-2}$. Sur chacun de ces intervalles, par la propriété des puissances avec l'exposant -2 :

$$\begin{aligned} &g'(x) \\ &= -2 \times 3 \times (3x - 1)^{-3} \\ &= -\frac{6}{(3x - 1)^3}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel $x \neq \dfrac{1}{3}$, $g'(x) = -\dfrac{6}{(3x - 1)^3}$.

Exercice 6

Le facteur a d'une fonction affine

Rappel : si f est dérivable sur un intervalle ouvert, la dérivée de $x \mapsto f(ax+b)$ est $x \mapsto af'(ax+b)$, là où $ax+b$ reste dans cet intervalle.

1.

Dériver $x \mapsto \sin(3x-1)$ sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : le rappel, avec $a=3$ et $b=-1$.

CORRIGÉ

La fonction $\sin$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\cos$. Par la propriété de $x \mapsto f(ax+b)$, avec $a=3$ et $b=-1$, la fonction $x \mapsto \sin(3x-1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Conclusion. Sa dérivée est $x \mapsto 3\cos(3x-1)$.

2.

Dériver $x \mapsto (5-2x)^4$ sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Point délicat : le coefficient de x est négatif ; il apparaît dans la dérivée.

CORRIGÉ

La fonction $t \mapsto t^4$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $t \mapsto 4t^3$. Par la propriété de $x \mapsto f(ax+b)$, avec $a=-2$ et $b=5$, la fonction $x \mapsto (5-2x)^4$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto -2 \times 4(5-2x)^3$.

Conclusion. La dérivée est $x \mapsto -8(5-2x)^3$.

3.

Dériver $x \mapsto \tan(2x)$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right[$.

INDICE

Outil : la dérivée de $\tan$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Vérifie que $2x$ reste dans cet intervalle.

CORRIGÉ

Intervalle. Si $x \in \left]-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right[$, alors $2x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Sur ce dernier intervalle, $\tan$ est dérivable, de dérivée $1+\tan^2$.

Dérivée. Par la propriété de $x \mapsto f(ax+b)$, avec $a=2$ et $b=0$, la fonction $x \mapsto \tan(2x)$ est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right[$.

Conclusion. Sa dérivée est $x \mapsto 2\left(1+\tan^2(2x)\right)$.

Exercice 7

Racine carrée d'une fonction

La propriété de la racine carrée d'une fonction exige que la quantité sous la racine soit strictement positive.

1.

Dériver la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{3x^2 + 1}$.

INDICE

Outil : $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, avec $u : x \mapsto 3x^2 + 1$.

CORRIGÉ

Posons $u : x \mapsto 3x^2 + 1$. Pour tout réel x, $u(x) \geq 1 > 0$, et $u'(x) = 6x$. Par la dérivée de $\sqrt{u}$, qui est $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{6x}{2\sqrt{3x^2 + 1}} \\ &= \frac{3x}{\sqrt{3x^2 + 1}}. \end{aligned}$$

2.

Soit g la fonction définie sur $]-\infty, 3]$ par $g(x) = \sqrt{6 - 2x}$. Sur quel intervalle ouvert la propriété s'applique-t-elle ? Donner $g'(x)$ sur cet intervalle.

INDICE

Point délicat : en 3, la quantité sous la racine est nulle.

CORRIGÉ

Intervalle. Posons $u : x \mapsto 6 - 2x$. On a $u(x) > 0$ si et seulement si $x < 3$. La propriété de la racine carrée d'une fonction s'applique donc sur l'intervalle ouvert $]-\infty, 3[$.

Dérivée. On a $u'(x) = -2$. Pour tout $x < 3$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{-2}{2\sqrt{6 - 2x}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{6 - 2x}}. \end{aligned}$$

Conclusion. La propriété s'applique sur $]-\infty, 3[$, où $g'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{6 - 2x}}$. En 3, la quantité sous la racine est nulle : la formule ne s'applique pas, et la dérivabilité à gauche en 3 s'étudie par la définition.

Exercice 8

Dérivées avec sinus et cosinus

Les fonctions suivantes sont définies sur $\mathbb{R}$; x désigne une mesure en radians.

1.

Dériver $f : x \mapsto 2\sin x - 3\cos x$.

INDICE

Outil : les dérivées de $\sin$ et de $\cos$, la somme et le produit par un réel.

CORRIGÉ

Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, avec $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$. Par les propriétés de la somme et du produit par un réel, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &f'(x) \\ &= 2\cos x - 3 \times (-\sin x) \\ &= 2\cos x + 3\sin x. \end{aligned}$$

2.

Soit $g : x \mapsto \sin x \cos x$. Montrer que $g'(x) = \cos(2x)$ pour tout réel x.

INDICE

Outil : la propriété du produit, puis une formule de duplication.

CORRIGÉ

Dérivée. Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, avec $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$. Par la propriété du produit, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \cos x \times \cos x \\ &\quad + \sin x \times (-\sin x) \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x. \end{aligned}$$

Duplication. Par la formule de duplication du cosinus, $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$ pour tout réel x.

Conclusion. Pour tout réel x, $g'(x) = \cos(2x)$.

3.

Dériver $k : x \mapsto \dfrac{\sin x}{2+\cos x}$.

INDICE

Point délicat : vérifie que $2+\cos x$ ne s'annule pas, puis simplifie par $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

CORRIGÉ

Dérivabilité. Pour tout réel x, $\cos x \geq -1$, donc $2+\cos x \geq 1 > 0$. Par la propriété du quotient, k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $k'(x) = \dfrac{N(x)}{(2+\cos x)^2}$, où :

$$\begin{aligned} &N(x) \\ &= \cos x\,(2+\cos x) \\ &\quad - \sin x \times (-\sin x) \\ &= 2\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x \\ &= 2\cos x + 1, \end{aligned}$$

car $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Conclusion. Pour tout réel x :

$$k'(x) = \frac{2\cos x + 1}{(2+\cos x)^2}.$$

Exercice 9

Lire les variations sur le signe de la dérivée

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 12x + 5$.

1.

Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = -6(x-1)(x-2)$.

INDICE

Outil : dérive le polynôme, puis factorise le trinôme obtenu par ses racines.

CORRIGÉ

Dérivée. La fonction f est un polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$. Par la dérivée des puissances et la propriété de la somme, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -6x^2 + 18x - 12 \\ &= -6(x^2 - 3x + 2). \end{aligned}$$

Factorisation. Le trinôme $x^2 - 3x + 2$ a pour racines 1 et 2, car $1 - 3 + 2 = 0$ et $4 - 6 + 2 = 0$. Donc $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ pour tout réel x.

Conclusion. Pour tout réel x, $f'(x) = -6(x-1)(x-2)$.

2.

Étudier le signe de $f'(x)$. En déduire le sens de variation de f sur $]-\infty, 1]$, sur $[1, 2]$ et sur $[2, +\infty[$.

INDICE

Outil : le signe d'un trinôme, puis le théorème du signe de la dérivée, intervalle par intervalle.

CORRIGÉ

Signe de $f'(x)$. Le produit $(x-1)(x-2)$ est positif à l'extérieur de ses racines et négatif entre elles ; le facteur -6 inverse ce signe. Donc :

- $f'(x) < 0$ sur $]-\infty, 1[$ et sur $]2, +\infty[$;
- $f'(x) > 0$ sur $]1, 2[$.

La dérivée f' ne s'annule qu'en 1 et en 2.

Variations. Par le théorème du signe de la dérivée (cas strict), f est strictement décroissante sur $]-\infty, 1]$ et sur $[2, +\infty[$, et strictement croissante sur $[1, 2]$.

Conclusion. f décroît strictement sur $]-\infty, 1]$, croît strictement sur $[1, 2]$, puis décroît strictement sur $[2, +\infty[$. De plus, $f(1) = 0$ et $f(2) = 1$.

Exercice 10

Vérifier une solution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle $y'' + 2y = 0$, d'inconnue y deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4\cos\left(\sqrt{2}\,x\right) - \sin\left(\sqrt{2}\,x\right)$. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$, puis montrer que f est solution.

INDICE

Outil : la dérivée de $x \mapsto \cos(ax)$ est $x \mapsto -a\sin(ax)$, celle de $x \mapsto \sin(ax)$ est $x \mapsto a\cos(ax)$.

CORRIGÉ

Dérivée première. Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, avec $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$. Par la propriété de $x \mapsto f(ax+b)$, avec $a = \sqrt{2}$ et $b = 0$, puis par les propriétés de la somme et du produit par un réel, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -4\sqrt{2}\sin\left(\sqrt{2}\,x\right) \\ &\quad - \sqrt{2}\cos\left(\sqrt{2}\,x\right). \end{aligned}$$

Dérivée seconde. Par les mêmes propriétés, f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f''(x) &= -8\cos\left(\sqrt{2}\,x\right) \\ &\quad + 2\sin\left(\sqrt{2}\,x\right) \\ &= -2f(x). \end{aligned}$$

Conclusion. f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f''(x) + 2f(x) = 0$: f est solution de l'équation.

2.

La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\sin\left(\sqrt{2}\,x\right)$ est-elle solution de l'équation ?

INDICE

Outil : la propriété du produit, appliquée deux fois, pour calculer $g''(x) + 2g(x)$.

CORRIGÉ

Dérivée première. Par la propriété du produit, avec la dérivée de $x \mapsto \sin\left(\sqrt{2}\,x\right)$ obtenue comme à la question 1, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g'(x) = &\sin\left(\sqrt{2}\,x\right) \\ &+ \sqrt{2}\,x\cos\left(\sqrt{2}\,x\right). \end{aligned}$$

Dérivée seconde. Par la propriété du produit, de nouveau, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g''(x) = &2\sqrt{2}\cos\left(\sqrt{2}\,x\right) \\ &- 2x\sin\left(\sqrt{2}\,x\right). \end{aligned}$$

Donc, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &g''(x) + 2g(x) \\ &= 2\sqrt{2}\cos\left(\sqrt{2}\,x\right). \end{aligned}$$

Conclusion. En $x = 0$, cette quantité vaut $2\sqrt{2} \neq 0$. La fonction g n'est donc pas solution de l'équation.