BURHAN

Dérivabilité

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/derivabilite/cours

Chapitre	Semestre
Dérivabilité	Semestre 2

Quelle est la pente d'une courbe en un point ?

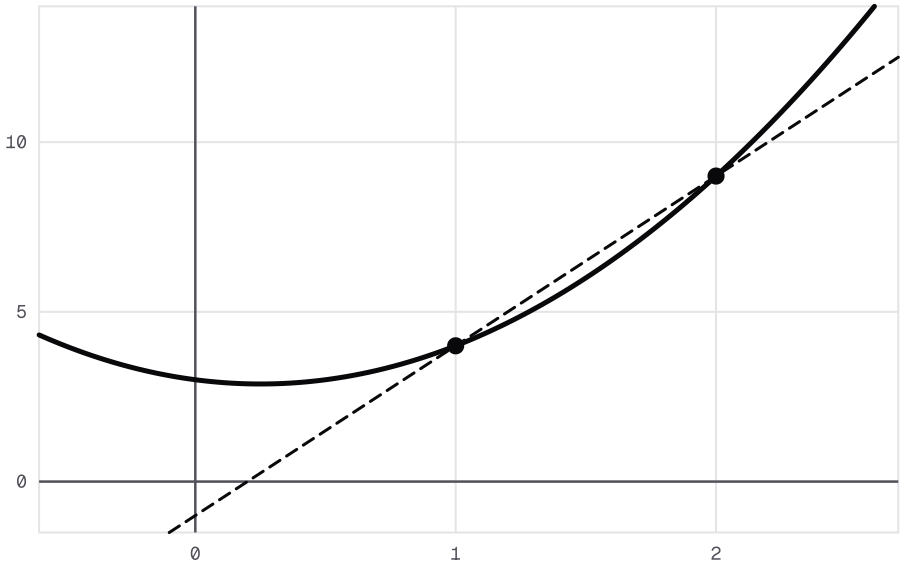
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - x + 3$. Le point $A(1, 4)$ de sa courbe a pour abscisse 1.

Pour un réel $h \neq 0$, on place le point M de la courbe d'abscisse $1 + h$. La droite (AM) est une **sécante**.

Sa pente vaut 5 pour $h = 1$. Elle vaut $3{,}2$ pour $h = 0{,}1$, puis $3{,}02$ pour $h = 0{,}01$.

De l'autre côté de A, pour $h = -0{,}1$, puis $h = -0{,}01$, elle vaut $2{,}8$, puis $2{,}98$.

Quand M glisse vers A, la sécante pivote autour de A.



Courbe de f : x ↦ 2x² − x + 3, le point A(1, 4) et, pour h = 1, le point M(2, 9) : la sécante (AM) a pour pente 5.

Devine : Une prédiction

D'après ces valeurs, de quel nombre la pente de (AM) semble-t-elle se rapprocher quand h se rapproche de 0 ?

A. De 4, car $f(1) = 4$.

Faux.

4 est l'ordonnée de A, pas une pente. Les pentes calculées restent proches de 3.

B. De 0, car h tend vers 0.

Faux.

La pente ne devient pas petite : pour $h = 0{,}01$, elle vaut $3{,}02$.

C. De 3, des deux côtés de A.

Juste.

Juste : à droite comme à gauche, les pentes se resserrent autour de 3.

D. D'aucun nombre, car (AA) n'existe pas.

Faux.

On ne trace jamais (AA) : on regarde les pentes pour $h \neq 0$, de plus en plus petit.

Correction

Les pentes $2{,}8$; $2{,}98$; $3{,}02$; $3{,}2$ se resserrent autour de 3.

La droite limite, de pente 3, sera la **tangente** en A. Le nombre 3 sera le **nombre dérivé** de f en 1.

Un tableau ne montre que quelques valeurs : ce chapitre donne un sens précis à cette limite.

Dans ce chapitre, tu apprends à calculer la pente d'une courbe en un point, puis à t'en servir.

Tu écris des tangentes et des valeurs approchées. Tu dérives des fonctions construites par opérations. Tu relies le signe de la dérivée au sens de variation, et tu cherches des extremums.

Tu emploies le taux de variation du chapitre « Généralités sur les fonctions numériques » et les limites du chapitre « Limite d'une fonction numérique ».

Rappels : taux de variation, limites, équation d'une droite

Le taux de variation

Petit rappel. Au chapitre « Généralités sur les fonctions numériques », le **taux de variation** de f entre deux réels distincts a et x de D_f est :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

C'est le coefficient directeur de la droite qui joint les points de la courbe d'abscisses a et x.

Sur un intervalle I, f est croissante si et seulement si tous ses taux sont positifs ou nuls. Elle est décroissante si et seulement s'ils sont tous négatifs ou nuls.

Vérifie : Un taux de variation

Quel est le taux de variation de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ entre 1 et 3 ?

A. $\dfrac{1}{3}$

Faux.

C'est la valeur en 3. Le taux est un quotient de deux différences.

B. $-\frac{2}{3}$

Faux.

C'est la différence $\frac{1}{3} - 1$: il reste à la diviser par $3 - 1$.

C. $-\frac{1}{3}$

Juste.

Juste : on divise $\frac{1}{3} - 1$ par $3 - 1 = 2$.

D. -3

Faux.

Tu as divisé dans le mauvais sens : le numérateur est la différence des images.

Correction

Le taux vaut :

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{3} - 1}{3 - 1} &= \frac{-\frac{2}{3}}{2} \\ &= -\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Il est négatif. Sur $]0, +\infty[$, la fonction inverse est décroissante : tous ses taux y sont négatifs.

Une droite ; poser x = a + h

Deux outils. La droite qui passe par le point $A(a, b)$ et qui a pour coefficient directeur m a pour équation :

$$y = m(x - a) + b.$$

Au chapitre « Limite d'une fonction numérique », tu as appris à **te ramener en** 0. En posant $x = a + h$, les limites $\lim_{x \to a} g(x)$ et $\lim_{h \to 0} g(a + h)$ existent ensemble, et elles sont égales.

À toi : Une droite, puis une limite

Écris une équation de la droite qui passe par $A(2, 3)$ et qui a pour coefficient directeur 9, sous la forme $y = mx + p$. Calcule ensuite $\lim_{h \to 0}(9 + 6h + h^2)$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Remplace a, b et m dans $y = m(x - a) + b$.

Indice 2

Développe $9(x - 2) + 3$.

Indice 3

Point délicat : nomme la règle de la limite ; ici, produit et somme, à partir de $\lim_{h \to 0} h = 0$.

Réponse

Équation de la droite. Elle a pour équation $y = 9(x - 2) + 3$, soit $y = 9x - 15$.

Contrôle : pour $x = 2$, on trouve $9 \times 2 - 15 = 3$.

Limite. On a $\lim_{h \to 0} h = 0$, donc $\lim_{h \to 0} h^2 = 0$, par produit. Par somme :

$$\lim_{h \to 0} (9 + 6h + h^2) = 9.$$

Ces deux calculs resserviront pour une tangente.

Nombre dérivé

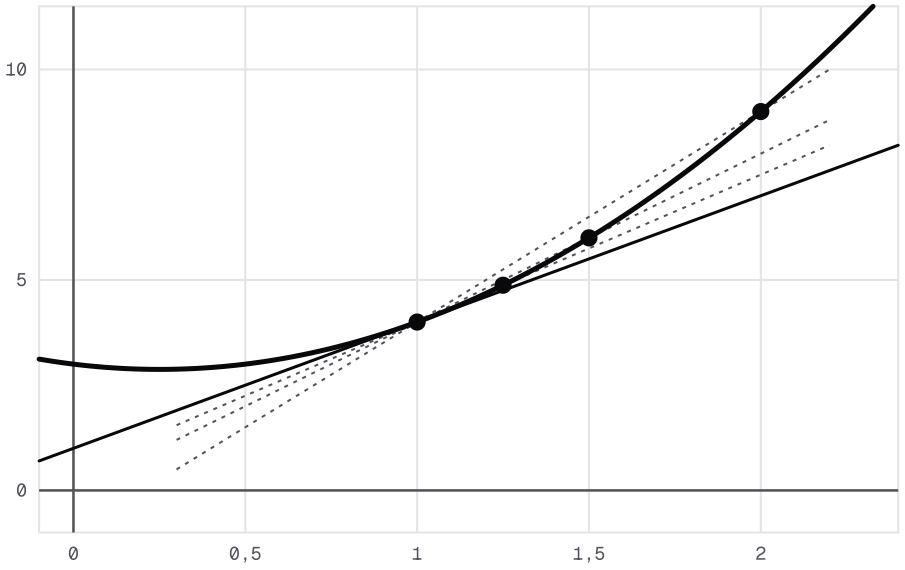
Des sécantes à la tangente

En clair. Reprends la fonction $f : x \mapsto 2x^2 - x + 3$ et le point $A(1, 4)$. Pour $h \neq 0$, on a $f(1 + h) = 4 + 3h + 2h^2$.

La pente de la sécante (AM) est donc le taux :

$$\frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = 3 + 2h.$$

Quand h devient petit, ce taux se rapproche de 3. On ne remplace jamais h par 0 : on cherche une **limite**.



$y = 2x^2 - x + 3$ $y = 3x + 1$ Point plein A Point du graphe

Même courbe et même point A(1, 4). Les sécantes (AM) pour h = 1, h = 1/2 et h = 1/4 ont pour pentes 5, 4 et 7/2 ; en trait plein fin, la droite de pente 3 vers laquelle elles pivotent.

Vérifie : Valeur ou limite ?

Pour $h \neq 0$, le taux de l'entrée vaut $3 + 2h$. Laquelle de ces affirmations est juste ?

A. Le taux vaut 3 pour $h = 0$.

Faux.

Pour $h = 0$, le taux s'écrirait $\frac{0}{0}$: il n'est pas défini.

B. Le taux tend vers $f(1) = 4$.

Faux.

Le taux tend vers 3, pas vers l'ordonnée de A.

C. Le taux n'a pas de limite, car $h \neq 0$.

Faux.

Une limite en 0 ne demande pas de valeur en 0 : elle regarde les h proches de 0.

D. Le taux tend vers 3 quand h tend vers 0.

Juste.

Juste : par somme, $\lim_{h \to 0}(3 + 2h) = 3$.

Correction

Le taux n'existe que pour $h \neq 0$. Sa limite existe pourtant, par somme :

$$\lim_{h \to 0}(3 + 2h) = 3.$$

C'est la situation du chapitre « Limite d'une fonction numérique » : une limite en un point où l'expression n'est pas définie.

La définition

Définition : Nombre dérivé, dérivabilité en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, et $a \in I$. On dit que f est **dérivable en** a si le taux de variation $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une **limite finie** ℓ quand x tend vers a. Ce réel ℓ est le **nombre dérivé** de f en a ; on le note $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Les deux écritures sont équivalentes : on pose $x = a + h$ (propriété « se ramener à une limite en 0 » du chapitre « Limite d'une fonction numérique »). Si la limite est infinie, ou n'existe pas, f n'est pas dérivable en a.

Exemple : Exemple guidé : un nombre dérivé par la définition

Énoncé. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - x + 3$. Montrons que f est dérivable en 1, et calculons $f'(1)$.

Taux de variation. Soit h un réel non nul. On développe :

$$\begin{aligned} f(1 + h) &= 2(1 + 2h + h^2) \\ &\quad - (1 + h) + 3 \\ &= 4 + 3h + 2h^2, \end{aligned}$$

et $f(1) = 4$. Donc :

$$\begin{aligned}\frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \frac{3h + 2h^2}{h} \\ &= 3 + 2h.\end{aligned}$$

Limite. Par somme, $\lim_{h \to 0}(3 + 2h) = 3$.

Conclusion. Le taux admet une limite finie : f est dérivable en 1, et $f'(1) = 3$.

Remarque : deux écritures du même nombre

On peut aussi écrire le taux en x. Pour $x \neq 1$:

$$\begin{aligned}f(x) - f(1) &= 2x^2 - x - 1 \\ &= (x - 1)(2x + 1).\end{aligned}$$

Donc $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2x + 1$, qui tend vers 3 quand x tend vers 1 (limite d'un polynôme). On retrouve $f'(1) = 3$.

Choisis l'écriture qui simplifie le mieux.

Méthode, puis à toi

Méthode : calculer un nombre dérivé par la définition

1. **Écrire** le taux $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ pour $h \neq 0$, avec $a + h$ dans D_f. On peut aussi écrire $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ pour $x \neq a$.
2. **Simplifier** par h : développer, factoriser, ou multiplier par la quantité conjuguée devant une racine.
3. **Calculer** la limite en 0, en nommant la règle : somme, produit, quotient, limite de référence.
4. **Conclure** : une limite finie ℓ donne $f'(a) = \ell$. Une limite infinie, ou pas de limite : f n'est pas dérivable en a.

À toi : Le cube en –1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. Montre, par la définition, que f est dérivable en -1, et calcule $f'(-1)$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Développe $(-1 + h)^3$, par exemple en écrivant $(-1 + h)^2(-1 + h)$.
Indice 2
Tu dois trouver $f(-1 + h) - f(-1) = 3h - 3h^2 + h^3$.

Indice 3

Point délicat : $f(-1) = -1$, et le signe moins se garde jusqu'au bout.

Réponse

Taux de variation. Soit h un réel non nul. On a $f(-1) = -1$ et :

$$(-1+h)^3 = -1 + 3h - 3h^2 + h^3.$$

Donc :

$$\frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = 3 - 3h + h^2.$$

Limite. Par produit et somme, ce taux tend vers 3 quand h tend vers 0.

Conclusion. f est dérivable en -1, et $f'(-1) = 3$.

Une écriture affine

Dans l'entrée, $f(1+h) = 4 + 3h + 2h^2$: une partie affine $4 + 3h$, plus un terme très petit. Est-ce vrai pour toute fonction dérivable ?

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve nomme $\varphi(h)$ l'écart entre le taux et $f'(a)$. Elle multiplie ensuite par h. Elle en déduit aussi que $f(x)$ tend vers $f(a)$.

Propriété : Dérivabilité et écriture affine au voisinage de a

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, et $a \in I$.

1. f est dérivable en a si et seulement s'il existe un réel ℓ et une fonction φ, définie pour les h tels que $a + h \in I$, avec $\lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$, $\varphi(0) = 0$ et, pour tous ces h :

   $$f(a+h) = f(a) + \ell h + h\varphi(h).$$

   Dans ce cas, $\ell = f'(a)$.

2. Si f est dérivable en a, alors $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Démonstration

Étape 1. Supposons f dérivable en a et posons $\ell = f'(a)$. Pour $h \neq 0$, posons $\varphi(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)$, et $\varphi(0) = 0$. D'après F01, le taux tend vers $f'(a)$ quand h tend vers 0 ; par différence, $\lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$. En multipliant par h, on obtient l'égalité pour $h \neq 0$; pour $h = 0$, elle se réduit à $f(a) = f(a)$.

Étape 2. Réciproquement, supposons l'égalité vraie. Pour $h \neq 0$, $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell + \varphi(h)$, qui tend vers ℓ quand h tend vers 0, par somme. Donc f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$ (F01).

Étape 3. Si f est dérivable en a, alors $\lim_{h\to 0}\big(\ell h + h\varphi(h)\big) = 0$, par produit et somme. Donc $\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$, et $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ en posant $x = a+h$ (chapitre « Limite d'une fonction numérique »).

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le reste $\varphi(h)$ est l'écart entre le taux et $f'(a)$. Dire que le taux tend vers $f'(a)$, c'est dire que $\varphi(h)$ tend vers 0.

Multiplier par h transforme cette limite en une écriture de $f(a+h)$. Enfin, $f'(a)h + h\varphi(h)$ tend vers 0 par produit et somme : $f(x)$ tend vers $f(a)$.

Vérifie : Le reste de l'exemple

Pour $f(x) = 2x^2 - x + 3$ et $a = 1$, on a $f(1+h) = 4 + 3h + 2h^2$. Quel est le reste $\varphi(h)$?

A. $\varphi(h) = 2h^2$

Faux.
C'est $h\varphi(h)$ qui vaut $2h^2$: il faut encore diviser par h.

B. $\varphi(h) = 2h$

Juste.
Juste : $f(1+h) = 4 + 3h + h \times 2h$, et $2h$ tend vers 0.

C. $\varphi(h) = 3 + 2h$

Faux.
C'est le taux tout entier ; le reste est l'écart entre le taux et $f'(1) = 3$.

D. $\varphi(h) = 3h$

Faux.
$3h$ est la partie affine $f'(1)h$, pas le reste.

Correction
Le taux vaut $3 + 2h$, et $f'(1) = 3$. Le reste est donc :

$$\varphi(h) = (3 + 2h) - 3 = 2h,$$

avec $\varphi(0) = 0$. On vérifie :

$$\begin{aligned} &f(1) + 3h + h\varphi(h) \\ &= 4 + 3h + 2h^2. \end{aligned}$$

Enfin, $\lim_{h\to 0} 2h = 0$, par produit.

Exemple : un reste très petit

Prenons $h = 0{,}01$. La partie affine donne $4 + 3 \times 0{,}01 = 4{,}03$. La vraie valeur est $f(1{,}01) = 4{,}0302$.

L'écart vaut $0{,}0002$, c'est-à-dire $h\varphi(h) = 0{,}01 \times 0{,}02$. Il est cinquante fois plus petit que h.

C'est le sens de l'écriture affine : près de a, f ressemble à une fonction affine, à un terme $h\varphi(h)$ près.

Dérivabilité à droite et à gauche

Une courbe cassée

En clair. Une courbe n'a pas toujours une tangente en chacun de ses points. Pense à la pointe d'un V.

À droite de la pointe, les sécantes montent ; à gauche, elles descendent. Elles ne pivotent pas vers une même droite.

Pour le voir, on sépare les deux côtés : $x > a$, puis $x < a$. Quand les deux pentes sont différentes, la courbe a un **point anguleux** : deux demi-droites tangentes, les **demi-tangentes**, définies dans la section suivante, y forment un angle.

Devine : Deux côtés, deux pentes ?

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x^2 - 4|$, et $A(2, 0)$. Pour $x > 2$, $f(x)$ vaut $x^2 - 4$; pour $0 < x < 2$, il vaut $4 - x^2$. Que deviennent les pentes des sécantes (AM) quand M s'approche de A ?

A. Elles se rapprochent de 4, des deux côtés.
Faux.
À gauche de 2, f décroît vers 0 : les sécantes y descendent.

B. Elles se rapprochent de 0, car $f(2) = 0$.
Faux.
$f(2)$ est une ordonnée, pas une pente : à droite, la pente vaut $x + 2$.

C. Elles deviennent plus grandes que tout nombre.
Faux.
Le taux se simplifie en $x + 2$ ou en $-(x + 2)$: il reste borné près de 2.

D. Elles se rapprochent de 4 à droite, de -4 à gauche.
Juste.
Juste : le taux vaut $x + 2$ à droite, et $-(x + 2)$ à gauche.

Correction
Pour $x > 2$, le taux vaut :

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2,$$

qui tend vers 4. Pour $0 < x < 2$, il vaut :

$$\frac{4-x^2}{x-2} = -(x+2),$$

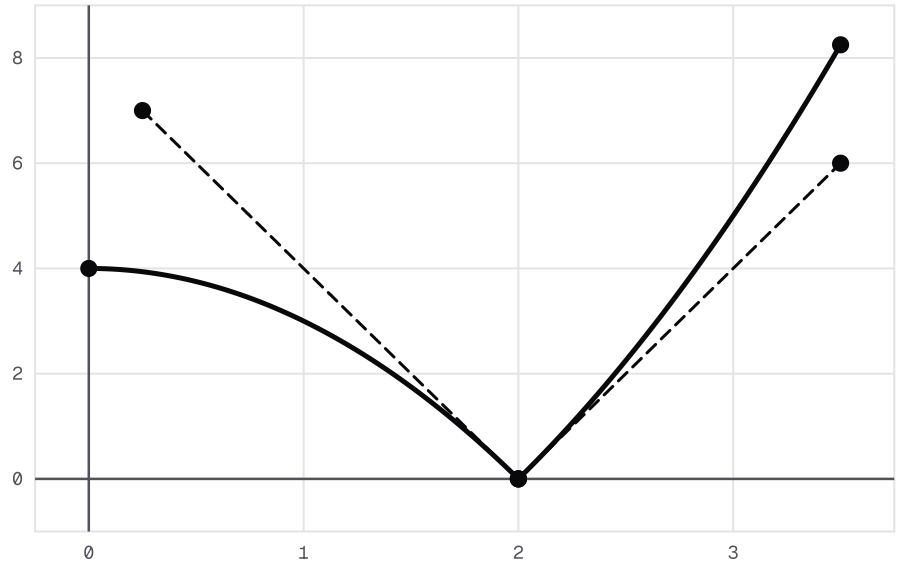
qui tend vers -4. Ces limites, obtenues par somme, sont différentes : il n'y a pas une seule pente en A.

Dérivabilité d'un seul côté

Définition : Dérivabilité à droite, à gauche

Soit a un réel et $r > 0$.

- Soit f une fonction définie sur $[a, a+r[$. On dit que f est **dérivable à droite en** a si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie quand x tend vers a à droite. Cette limite est le **nombre dérivé à droite** de f en a : $f'_d(a) = \lim_{x \to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
- Soit f une fonction définie sur $]a-r, a]$. On définit de même la **dérivabilité à gauche** en a et le **nombre dérivé à gauche** $f'_g(a) = \lim_{x \to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.



$y = |x^2 - 4|$ $y = 4(x-2)$ $y = -4(x-2)$ Point plein $(2, 0)$ Point du graphe

Avant de lire : la courbe a-t-elle une seule tangente au point (2, 0) ? Courbe de x ↦ |x² − 4| entre 0 et 7/2, avec en pointillés ses deux demi-tangentes en ce point, de pente 4 à droite et de pente −4 à gauche. Le point (2, 0) est marqué : c'est un point anguleux.

Recoller les deux côtés

En 2, les deux côtés donnent deux pentes différentes. Si elles étaient égales, f serait-elle dérivable ?

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve applique au taux de variation une propriété du chapitre « Limite d'une fonction numérique » : une limite en a existe si et seulement si les limites à droite et à gauche existent et sont égales.

Propriété : Dérivabilité et dérivabilités à droite et à gauche

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, et $a \in I$. Alors f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en a avec $f'_d(a) = f'_g(a)$. Dans ce cas, $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$.

Démonstration

Étape 1. Comme I est un intervalle ouvert contenant a, il existe $r > 0$ tel que $]a - r, a + r[\subset I$. La fonction $q : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est définie sur $]a - r, a[\cup]a, a + r[$.

Étape 2. D'après la propriété « limite et limites à droite et à gauche » du chapitre « Limite d'une fonction numérique », q admet une limite finie ℓ en a si et seulement si q admet ℓ pour limite à droite et à gauche en a.

Étape 3. Par F01, la limite de q en a est $f'(a)$; par F03, ses limites à droite et à gauche sont $f'_d(a)$ et $f'_g(a)$. L'équivalence de l'étape 2 est donc exactement celle de l'énoncé, avec $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le nombre dérivé est une limite : ce que l'on sait des limites latérales passe aux nombres dérivés.

Pour étudier f en a, on peut donc séparer les côtés, calculer $f'_d(a)$ et $f'_g(a)$, puis comparer. Deux nombres égaux donnent $f'(a)$. Deux nombres différents interdisent la dérivabilité.

Vérifie : L'argument de la preuve

Sur quel résultat du chapitre « Limite d'une fonction numérique » la preuve repose-t-elle ?

A. Une limite en a équivaut à deux limites latérales égales.

Juste.

Juste : appliqué au taux de variation, ce résultat donne l'équivalence.

B. Une fonction a au plus une limite en un point.

Faux.

L'unicité de la limite ne compare pas les deux côtés.

C. La limite d'un produit est le produit des limites.

Faux.

Aucun produit n'intervient : le taux est le même de chaque côté.

D. La limite de la racine carrée d'une fonction positive.

Faux.

Aucune racine n'apparaît dans cette preuve.

Correction

La preuve note q le taux de variation de f entre a et x. Le nombre dérivé est la limite de q en a. Les nombres dérivés à droite et à gauche sont ses limites latérales. La propriété « limite et limites à droite et à gauche » donne alors l'équivalence cherchée.

Exemple : un raccord sans cassure

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On a $f(1) = 1$.

À droite. Pour $x > 1$:

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{2x - 2}{x - 1} = 2.$$

Donc $f'_d(1) = 2$.

À gauche. Pour $x < 1$, le taux vaut $\dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$, qui tend vers 2 (limite d'un polynôme). Donc $f'_g(1) = 2$.

Conclusion. Les deux nombres sont égaux : f est dérivable en 1, et $f'(1) = 2$. Les deux morceaux se raccordent sans angle.

Méthode, piège, à toi

Méthode : étudier la dérivabilité en un point de raccord

1. **Écrire** le taux à droite ($x > a$) et le taux à gauche ($x < a$), avec l'expression de f valable de chaque côté.
2. **Calculer** les deux limites, en nommant les règles.
3. **Conclure** : deux limites finies égales, f est dérivable en a ; deux limites finies différentes, la courbe a un point anguleux. Une limite infinie donne une demi-tangente verticale, après avoir vérifié que $f(x)$ tend vers $f(a)$ de ce côté.
4. **Interpréter** sur la courbe : tangente ou demi-tangentes.

Attention : tendre vers f(a) ne suffit pas

✗ « $\lim_{x\to 0}|x| = 0$, donc $x \mapsto |x|$ est dérivable en 0. »

✓ Dérivable en a entraîne $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, mais la réciproque est fausse.

Pour $x > 0$, le taux $\dfrac{|x| - 0}{x - 0}$ vaut 1 ; pour $x < 0$, il vaut -1. Les nombres dérivés à droite et à gauche en 0 valent donc 1 et -1.

La valeur absolue n'est pas dérivable en 0, et l'origine est un point anguleux de sa courbe.

À toi : L'autre pointe

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x^2 - 4|$. Étudie la dérivabilité de f en -2, puis interprète sur la courbe. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Pour $x < -2$, $x^2 > 4$; pour $-2 < x < 2$, $x^2 < 4$. Écris $f(x)$ sans valeur absolue de chaque côté.
Indice 2
Factorise $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ et simplifie chaque taux par $x + 2$.
Indice 3
Point délicat : le taux s'écrit $\dfrac{f(x) - f(-2)}{x + 2}$, car $x - (-2) = x + 2$.

Réponse
On a $f(-2) = 0$.

À gauche. Pour $x < -2$, $f(x)$ vaut $x^2 - 4$, et le taux vaut :

$$\frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = x - 2,$$

qui tend vers -4. Donc $f'_g(-2) = -4$.

À droite. Pour $-2 < x < 2$, $f(x)$ vaut $4 - x^2$, et le taux vaut $2 - x$, qui tend vers 4. Donc $f'_d(-2) = 4$.

Conclusion. Ces nombres diffèrent : f n'est pas dérivable en -2, et le point $(-2, 0)$ est un point anguleux de la courbe.

Tangente, demi-tangentes, approximation affine

Zoomer sur une courbe

En clair. Prends la courbe de la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x + 1$ et son point $A(2, 3)$. Imagine un zoom de plus en plus fort, toujours centré sur A.

La fenêtre devient minuscule, mais on la regarde en plein écran. Que reste-t-il de la forme de la courbe ?

Devine : Ce que montre le zoom

Au plus fort du zoom, à quoi ressemble la courbe dans la fenêtre ?

A. À un morceau de droite qui passe par A.

Juste.

Juste : une courbe dérivable en A s'aplatit sur sa tangente.

B. À un point isolé, sans aucune direction.

Faux.

La fenêtre se réduit, mais on la voit en plein écran : la courbe garde une direction.

C. À une petite parabole centrée sur A.

Faux.

Plus on zoome, moins la courbure se voit.

D. À une droite horizontale, quelle que soit la courbe.

Faux.

La direction dépend du point : ici, la courbe monte nettement.

Correction

Pour $h \neq 0$:

$$f(2+h) = 3 + 9h + 6h^2 + h^3.$$

Près de A, les termes $6h^2$ et h^3 deviennent négligeables devant $9h$. La courbe ressemble donc à la droite d'équation $y = 3 + 9(x-2)$, de pente 9.

C'est la **tangente** en A.

Tangente et approximation affine

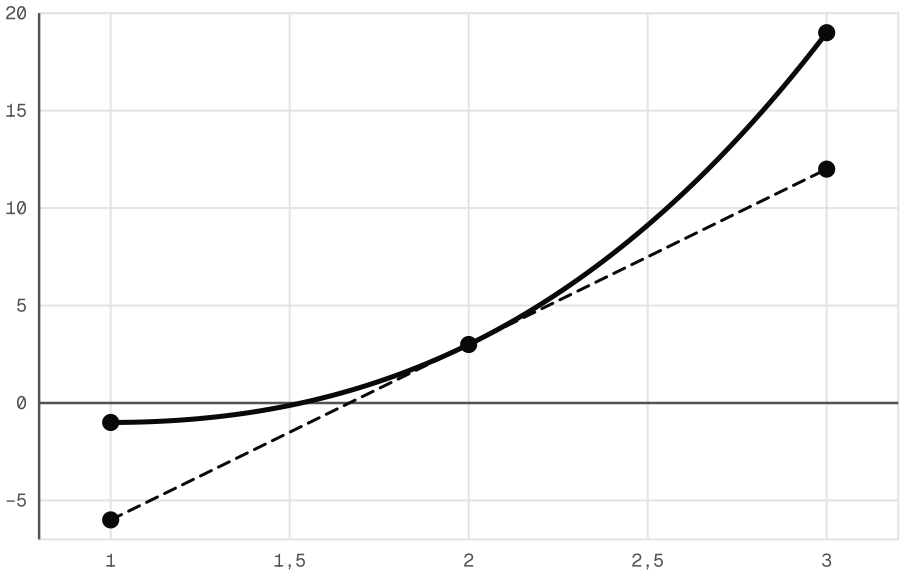
Définition : Tangente ; approximation affine

Soit f une fonction dérivable en a, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère.

- La **tangente** à $\mathcal{C}_f$ au point $A\big(a, f(a)\big)$ est la droite qui passe par A et a pour coefficient directeur $f'(a)$. Elle a pour équation :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

- La fonction affine $x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a)$ est l'**approximation affine** de f au voisinage de a. Pour h proche de 0, on écrit $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$: l'erreur commise est $h\varphi(h)$, avec $\lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$.



Courbe de f : x ↦ x³ − 3x + 1 entre 1 et 3, et en pointillés sa tangente au point A(2, 3), d'équation y = 9x − 15. Près de A, la courbe et la tangente se confondent ; plus loin, elles s'écartent. Le point (2, 3) est marqué.

Méthode : écrire une équation de la tangente

1. **Vérifier** que f est dérivable en a ; calculer $f(a)$ et $f'(a)$.
2. **Écrire** $y = f'(a)(x - a) + f(a)$, puis développer en $y = mx + p$.
3. **Contrôler** : le point $A\big(a, f(a)\big)$ vérifie l'équation, et la pente est $f'(a)$.
4. Pour une **valeur approchée** de $f(a + h)$, avec h proche de 0, écrire $f(a + h) \approx f(a) + f'(a)h$, jamais une égalité.

Deux exemples

Exemple : la tangente au point d'abscisse 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

Nombre dérivé. Pour $h \neq 0$:

$$\begin{aligned} &f(2 + h) - f(2) \\ &= 9h + 6h^2 + h^3. \end{aligned}$$

Le taux vaut donc $9 + 6h + h^2$. Par produit et somme, il tend vers 9 quand h tend vers 0. Donc f est dérivable en 2, et $f'(2) = 9$.

Tangente. Avec $f(2) = 3$, la tangente en $A(2, 3)$ a pour équation $y = 9(x - 2) + 3$, soit $y = 9x - 15$.

Contrôle : $9 \times 2 - 15 = 3$.

Exemple : une valeur approchée de $\sqrt{1{,}02}$

Appliquons la définition à la racine carrée, en 1. Soit h un réel non nul tel que $h > -1$.

Taux. Par la quantité conjuguée :

$$\frac{\sqrt{1+h}-1}{h} = \frac{1}{\sqrt{1+h}+1}.$$

Limite. Par la limite de la racine carrée d'une fonction, $\sqrt{1+h}$ tend vers 1. Par somme et quotient, le taux tend vers $\dfrac{1}{2}$: c'est le nombre dérivé de la racine carrée en 1.

Approximation. L'approximation affine en 1 s'écrit :

$$\sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{h}{2}.$$

Avec $h = 0{,}02$, on obtient $\sqrt{1{,}02} \approx 1{,}01$. La calculatrice affiche environ $1{,}00995$: l'erreur est inférieure à 10^{-4}.

Demi-tangentes

Définition : Demi-tangentes ; point anguleux

Soit f une fonction, a un réel, et $A\big(a, f(a)\big)$ le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a.

- Si f est dérivable à droite en a, la **demi-tangente à droite** à $\mathcal{C}_f$ en A est la demi-droite d'équation $y = f'_d(a)(x-a) + f(a)$, avec $x \geq a$. De même à gauche, avec $f'_g(a)$ et $x \leq a$.
- Si f est dérivable à droite et à gauche en a, avec $f'_d(a) \neq f'_g(a)$, le point A est un **point anguleux** de $\mathcal{C}_f$.
- Si $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ et si $\lim_{x \to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ ou $-\infty$, f n'est pas dérivable à droite en a, et $\mathcal{C}_f$ admet en A une **demi-tangente verticale**, portée par la droite d'équation $x = a$. De même à gauche.

Exemple : une demi-tangente verticale

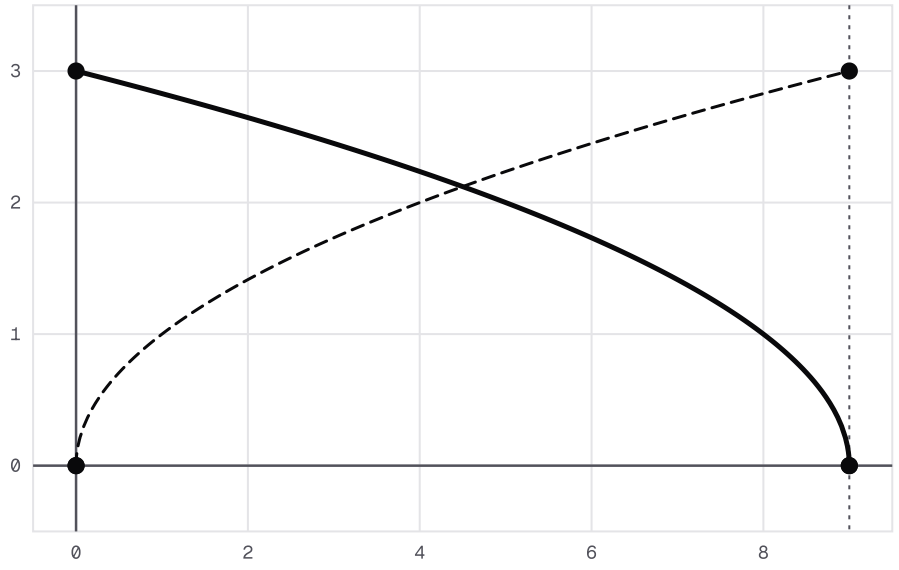
Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 9]$ par $f(x) = \sqrt{9-x}$, et $A(9, 0)$.

Taux à gauche. Pour $x < 9$:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{9-x}-0}{x-9} &= -\frac{\sqrt{9-x}}{9-x} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{9-x}}. \end{aligned}$$

Limite. Quand x tend vers 9 à gauche, $\sqrt{9-x}$ tend vers 0 en restant positif (racine carrée d'une fonction). Par la règle du quotient, le taux tend vers $-\infty$. Donc f n'est pas dérivable à gauche en 9.

Interprétation. Comme de plus $f(x)$ tend vers $0 = f(9)$, sa courbe admet en A une demi-tangente verticale, portée par la droite d'équation $x = 9$.



Avant de lire : en quel point chaque courbe devient-elle verticale ? Courbes de x ↦ √(9 − x) et, en pointillés, de x ↦ √x, entre 0 et 9. La première arrive à la verticale au point (9, 0), le long de la droite d'équation x = 9 ; la seconde part à la verticale de l'origine.

Attention : définie ne veut pas dire dérivable

✗ « La fonction racine carrée est définie en 0, donc elle est dérivable en 0. »

✓ Étudions-la par la définition. Pour $h > 0$, le taux de $x \mapsto \sqrt{x}$ entre 0 et h vaut :

$$\frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}.$$

Comme $\sqrt{h}$ tend vers 0 en restant positif, ce taux tend vers $+\infty$, par la règle du quotient. La racine carrée n'est donc pas dérivable à droite en 0.

Comme $\sqrt{h}$ tend vers $0 = \sqrt{0}$, sa courbe y admet une demi-tangente verticale. Ce résultat fait partie des dérivées usuelles, plus bas.

Là où une racine s'annule, étudie la dérivabilité par la définition.

À toi ; en devoir

À toi : Tangente à la courbe de l'inverse

Soit f la fonction inverse, $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Calcule $f'(2)$ par la définition, puis écris une équation de la tangente au point d'abscisse 2. Déduis-en une valeur approchée de $\dfrac{1}{2{,}02}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Réduis $\dfrac{1}{2+h} - \dfrac{1}{2}$ au même dénominateur.

Indice 2

Le taux vaut $-\dfrac{1}{2(2+h)}$; la tangente passe par le point $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$.

Indice 3

Point délicat : la valeur approchée s'écrit avec $\approx$, en prenant $h = 0{,}02$.

Réponse

Nombre dérivé. Soit $h \neq 0$, avec $h > -2$. On réduit au même dénominateur :

$$\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2} = \frac{-h}{2(2+h)}.$$

Le taux vaut donc $-\dfrac{1}{2(2+h)}$. Par somme et quotient, il tend vers $-\dfrac{1}{4}$: $f'(2) = -\dfrac{1}{4}$.

Tangente. Elle a pour équation $y = -\dfrac{1}{4}(x-2) + \dfrac{1}{2}$, soit $y = -\dfrac{x}{4} + 1$.

Valeur approchée. Avec $h = 0{,}02$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2{,}02} &\approx \frac{1}{2} - \frac{0{,}02}{4} \\ &= 0{,}495.\end{aligned}$$

Remarque : Coin devoir : la tangente

En devoir, donne les deux nombres, puis l'équation. Écris :

« f est dérivable en 2, avec $f(2) = 3$ et $f'(2) = 9$. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2 a pour équation $y = 9(x-2) + 3$, soit $y = 9x - 15$. »

Vérifie ensuite que le point de contact vérifie l'équation.

Fonction dérivée ; dérivées usuelles

Du nombre à la fonction

Devine : Un nombre dérivé en chaque point

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - x + 3$, et a un réel. Pour $h \neq 0$, le taux de f entre a et $a+h$ vaut $4a - 1 + 2h$. Que vaut $f'(a)$?

A. 3, pour tout réel a.
Faux.

3 est la valeur en $a = 1$ seulement : en $a = 0$, on trouve -1.

B. $4a - 1 + 2h$

Faux.

C'est le taux : sa limite quand h tend vers 0 ne contient plus h.

C. $4a - 1$

Juste.

Juste : par somme, le taux tend vers $4a - 1$.

D. $4a^2 - 1$

Faux.

Le taux est affine en a : aucun carré n'apparaît.

Correction

Par somme, $\lim_{h \to 0}(4a - 1 + 2h) = 4a - 1$. Donc f est dérivable en tout réel a, et $f'(a) = 4a - 1$.

Pour $a = 1$, on retrouve 3. Le nombre dérivé dépend de a : c'est une nouvelle **fonction**, $a \mapsto 4a - 1$.

Définition : Fonction dérivée

- Une fonction f est **dérivable sur un intervalle ouvert** I si elle est dérivable en tout point de I.
- f est **dérivable sur** $[a, b]$ si elle est dérivable sur $]a, b[$, dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b ; de même pour $[a, b[$, $]a, b]$, $[a, +\infty[$ et $]-\infty, b]$.
- Si f est dérivable sur un intervalle I, la **fonction dérivée** de f est la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$, définie sur I ; aux bornes de I qui lui appartiennent, $f'(x)$ désigne le nombre dérivé à droite ou à gauche.

f' est une fonction ; $f'(a)$ est un nombre.

Exemple : une fonction, des nombres

Pour $f : x \mapsto 2x^2 - x + 3$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa fonction dérivée est $f' : x \mapsto 4x - 1$.

Ne confonds pas les deux objets : f' est une fonction ; $f'(1) = 3$ et $f'(-2) = -9$ sont des nombres.

Une dérivée se donne toujours avec son intervalle : ici, $\mathbb{R}$.

Dérivées usuelles

Faut-il refaire un calcul de limite pour chaque fonction ? Non : on établit une fois pour toutes les dérivées de quelques fonctions simples.

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve calcule chaque taux, puis sa limite. Pour l'inverse, elle réduit au même dénominateur. Pour la racine carrée, elle multiplie par la quantité conjuguée.

Propriété : Dérivées de fonctions usuelles

- Pour tout réel c, la fonction constante $x \mapsto c$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto 0$.
- La fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto 1$.
- La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, de dérivée $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Elle n'est **pas** dérivable à droite en 0.

Démonstration

Étape 1. Soit a réel et $h \neq 0$. Les taux $\dfrac{c-c}{h}$ et $\dfrac{(a+h)-a}{h}$ valent 0 et 1 : leurs limites sont 0 et 1 (FO1).

Étape 2. Soit $a \neq 0$, et $h \neq 0$ tel que $a+h$ soit du signe de a. Alors $\dfrac{1}{h}\left(\dfrac{1}{a+h} - \dfrac{1}{a}\right) = -\dfrac{1}{a(a+h)}$; comme $a+h$ tend vers a et $a^2 \neq 0$, ce quotient tend vers $-\dfrac{1}{a^2}$.

Étape 3. Soit $a > 0$ et $h \neq 0$ tel que $a+h > 0$. Par la quantité conjuguée, $\dfrac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$. Par la limite de la racine carrée d'une fonction (chapitre « Limite d'une fonction numérique »), $\sqrt{a+h}$ tend vers $\sqrt{a}$; par somme et quotient, le taux tend vers $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

Étape 4. En 0, pour $h > 0$: $\dfrac{\sqrt{h}-0}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$; comme $\sqrt{h}$ tend vers 0 en restant strictement positif, $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ tend vers $+\infty$ (règle du quotient) : pas de nombre dérivé à droite (FO3).

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Trois gestes, déjà vus dans les exemples. Pour un quotient, réduire au même dénominateur fait apparaître h en facteur. Pour une racine, la quantité conjuguée chasse la racine du numérateur.

En 0, le taux de la racine carrée vaut $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ et tend vers $+\infty$: pas de nombre dérivé à droite.

Vérifie : Une condition cachée

Dans la preuve pour $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, pourquoi prend-on $a+h$ du signe de a ?

A. Pour que $\dfrac{1}{a+h}$ existe, dans le même intervalle.

Juste.

Juste : $a+h$ ne doit ni valoir 0, ni passer de l'autre côté de 0.

B. Pour que le taux soit positif.

Faux.
Le taux vaut $-\dfrac{1}{a(a+h)}$: il est négatif quand a et $a+h$ ont le même signe.

C. Pour que h soit plus petit que a.

Faux.
Rien n'impose cette comparaison ; seul le signe de $a+h$ compte.

D. Pour que la limite de h en 0 soit nulle.

Faux.
$\lim_{h\to 0} h = 0$ est toujours vrai : aucune condition n'est utile pour cela.

Correction
La fonction inverse n'est définie ni en 0, ni sur un intervalle qui contient 0.

En prenant $a+h$ du signe de a, on reste dans $]-\infty, 0[$ ou dans $]0, +\infty[$, où $\dfrac{1}{a+h}$ existe. C'est pourquoi la dérivée de l'inverse est donnée sur chacun de ces deux intervalles.

S'en servir

Exemple : lire un nombre dérivé

Par les dérivées usuelles, la racine carrée est dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. En 9, son nombre dérivé vaut :

$$\frac{1}{2\times 3} = \frac{1}{6}.$$

La fonction inverse est dérivable sur $]-\infty, 0[$, de dérivée $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$. En -2, son nombre dérivé vaut $-\dfrac{1}{4}$.

Aucun calcul de limite n'est à refaire.

À toi : Tangente à la courbe de la racine carrée

Au point d'abscisse 4, la courbe de la racine carrée a une tangente. Donne une équation de cette droite. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Calcule $\sqrt{4}$, puis le nombre dérivé en 4 par la dérivée usuelle.

Indice 2
Le nombre dérivé vaut $\dfrac{1}{2\sqrt{4}} = \dfrac{1}{4}$.

Indice 3
Point délicat : vérifie que 4 appartient à $]0, +\infty[$, où la formule s'applique.

Réponse

Par les dérivées usuelles, la racine carrée est dérivable sur $]0, +\infty[$, qui contient 4. Son nombre dérivé en 4 vaut :

$$\frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4},$$

et $\sqrt{4} = 2$. La tangente a pour équation $y = \frac{1}{4}(x - 4) + 2$, soit $y = \frac{x}{4} + 1$.

Somme, produit, inverse, quotient

Un rectangle qui grandit

Devine : L'aire d'un rectangle qui grandit

Un rectangle a pour côtés u et v. Le premier côté devient $u + p$, le second $v + q$, avec p et q petits. De combien l'aire augmente-t-elle ?

A. De pq

Faux.

pq n'est que le petit coin ajouté ; il manque deux bandes.

B. De $p + q$

Faux.

Une aire n'est pas une somme de longueurs.

C. De $pv + uq + pq$

Juste.

Juste : deux bandes, pv et uq, plus un petit coin pq.

D. De $uv + pq$

Faux.

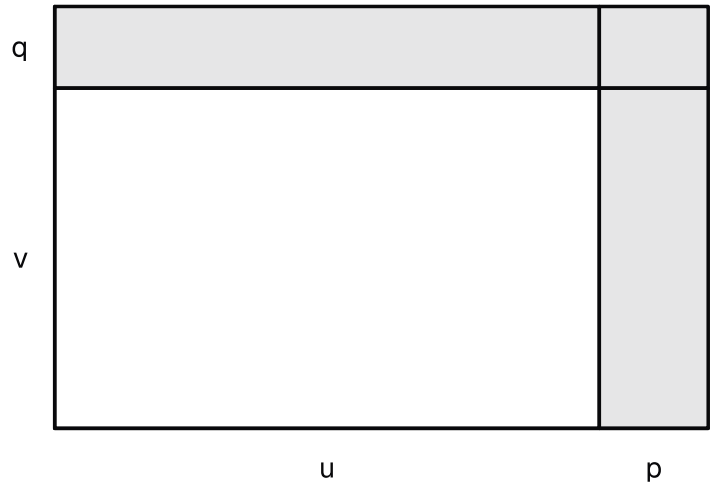
uv est l'aire de départ : elle ne fait pas partie de l'augmentation.

Correction

On développe :

$$\begin{aligned}&(u + p)(v + q) - uv \\ &= pv + uq + pq.\end{aligned}$$

Pour p et q petits, le coin pq est négligeable devant les deux bandes. Cela suggère que la dérivée d'un produit fait intervenir $u'v$ et uv', et non $u'v'$.



Le rectangle de côtés u et v, agrandi en un rectangle de côtés u + p et v + q. L'aire gagnée est faite de trois zones teintées : une bande p × v à droite, une bande u × q en haut, et le petit coin p × q.

Somme et produit par un réel se traitent taux par taux. Le produit demande une astuce, celle des deux bandes du rectangle.

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve ajoute et retranche un même terme. Elle fait ainsi apparaître le taux de u et le taux de v.

Somme et produit

Propriété : Somme, produit par un réel, produit

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I, et k un réel. Alors $u+v$, ku et uv sont dérivables sur I, et :

$$(u+v)' = u' + v', \qquad (ku)' = ku', \qquad (uv)' = u'v + uv'.$$

Démonstration

Étape 1. Soit $a \in I$ et $x \in I$, $x \neq a$. Le taux de variation de $u+v$ entre a et x est la somme des taux de u et de v ; celui de ku est k fois celui de u. Par somme et par produit par un réel, ils tendent vers $u'(a)+v'(a)$ et $ku'(a)$ (F01).

Étape 2. Pour le produit, on ajoute et on retranche $u(a)v(x)$:

$$\frac{u(x)v(x)-u(a)v(a)}{x-a} = \frac{u(x)-u(a)}{x-a}\,v(x) + u(a)\,\frac{v(x)-v(a)}{x-a}.$$

Étape 3. v est dérivable en a, donc $\lim_{x\to a} v(x) = v(a)$ (F02). Par produit et somme, le taux tend vers $u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Ajouter et retrancher $u(a)v(x)$ coupe le taux du produit en deux taux connus.

On utilise ensuite $\lim_{x\to a} v(x) = v(a)$, conséquence de la dérivabilité de v en a. Ce geste, ajouter et retrancher un même terme, resservira.

Vérifie : Le terme ajouté

Dans la preuve, quel terme ajoute-t-on et retranche-t-on au numérateur $u(x)v(x) - u(a)v(a)$?

A. $u(a)v(x)$

Juste.
Juste : on obtient $\big(u(x) - u(a)\big)v(x) + u(a)\big(v(x) - v(a)\big)$.

B. $u(x)v(x)$

Faux.
Ce terme figure déjà ; l'ajouter ne change rien.

C. $u(a)v(a)$

Faux.
Ce terme figure déjà ; il faut un terme « croisé ».

D. $u'(a)v'(a)$

Faux.
La preuve n'introduit aucune dérivée avant de passer à la limite.

Correction
On fait apparaître le terme croisé $u(a)v(x)$:

$$\begin{aligned} &u(x)v(x) - u(a)v(a) \\ &= u(x)v(x) - u(a)v(x) \\ &\quad + u(a)v(x) - u(a)v(a) \\ &= \big(u(x) - u(a)\big)v(x) \\ &\quad + u(a)\big(v(x) - v(a)\big). \end{aligned}$$

Après division par $x - a$, on reconnaît le taux de u et celui de v.

Exemple : la dérivée d'un produit

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + 1)(3x - 2)$.

Dérivée du carré. On a $x^2 = x \times x$. Par la propriété du produit, $(x^2)' = 1 \times x + x \times 1 = 2x$.

Dérivée de f. Posons $u : x \mapsto x^2 + 1$ et $v : x \mapsto 3x - 2$, dérivables sur $\mathbb{R}$, avec $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 3$. Par la propriété du produit, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x(3x-2) \\ &\quad + 3(x^2+1) \\ &= 9x^2 - 4x + 3. \end{aligned}$$

Garde les noms u et v visibles : chaque terme se contrôle.

Inverse et quotient

Pour l'inverse $\dfrac{1}{v}$, on refait le calcul de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, avec $v(x)$ à la place de x.

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve réduit au même dénominateur, puis passe à la limite. Le quotient s'écrit ensuite comme le produit de u par $\dfrac{1}{v}$.

Propriété : Inverse et quotient

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I, v ne s'annulant pas sur I. Alors $\dfrac{1}{v}$ et $\dfrac{u}{v}$ sont dérivables sur I, et :

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}, \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Démonstration

Étape 1. Soit $a \in I$ et $x \in I$, $x \neq a$. En réduisant au même dénominateur :

$$\frac{1}{x-a}\left(\frac{1}{v(x)} - \frac{1}{v(a)}\right) = -\frac{v(x)-v(a)}{x-a} \times \frac{1}{v(x)\,v(a)}.$$

Étape 2. v est dérivable en a, donc $\lim_{x\to a} v(x) = v(a)$ (F02), et $v(a)^2 \neq 0$. Par produit et quotient, le taux tend vers $-\dfrac{v'(a)}{v(a)^2}$.

Étape 3. On écrit $\dfrac{u}{v} = u \times \dfrac{1}{v}$. Par F09 : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'}{v} - \dfrac{uv'}{v^2} = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Réduire au même dénominateur fait apparaître le taux de v. L'hypothèse « v ne s'annule pas » sert deux fois : pour définir $\dfrac{1}{v}$, et pour diviser par $v(a)^2$.

Le quotient n'exige aucune limite nouvelle : $\dfrac{u}{v} = u \times \dfrac{1}{v}$, puis la propriété du produit.

Vérifie : Où sert l'hypothèse ?

Dans la preuve de l'inverse, à quoi sert l'hypothèse « v ne s'annule pas sur I » ?

A. À garantir que v est positive sur I.

Faux.
v peut être négative : seule la valeur 0 est interdite.

B. À garantir que v est dérivable sur I.
Faux.
La dérivabilité de v est une autre hypothèse de l'énoncé.

C. À garantir que $v(x)$ tend vers $v(a)$.
Faux.
Cette limite vient de la dérivabilité de v en a.

D. À pouvoir diviser par $v(x)$ et par $v(a)^2$.
Juste.
Juste : $\dfrac{1}{v(x)}$ doit exister, et la limite $-\dfrac{v'(a)}{v(a)^2}$ aussi.

Correction
L'hypothèse rend $\dfrac{1}{v(x)}$ défini pour tout x de I. Elle donne aussi $v(a)^2 \neq 0$: la règle du quotient s'applique, et la limite vaut $-\dfrac{v'(a)}{v(a)^2}$.

Exemple : la dérivée d'un quotient

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ par $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$.

Posons $u : x \mapsto 2x-1$ et $v : x \mapsto x+3$. La fonction v ne s'annule ni sur $]-\infty, -3[$ ni sur $]-3, +\infty[$.

Par la propriété du quotient, sur chacun de ces intervalles :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x+3) - (2x-1)\times 1}{(x+3)^2} \\ &= \frac{7}{(x+3)^2}. \end{aligned}$$

Cette dérivée est strictement positive.

Méthode, piège, entraînement

Méthode : dériver une fonction

1. **Préciser** l'intervalle : ensemble de définition, sans les points où une formule ne s'applique pas.
2. **Reconnaître** la forme : somme, produit, inverse, quotient ; plus loin, puissance, $x \mapsto f(ax+b)$, racine carrée.
3. **Nommer** u et v, appliquer la formule, puis **simplifier** : même dénominateur, factorisation.

4. Aux points exclus, **revenir** à la définition du nombre dérivé.

Attention : la dérivée d'un produit

✗ « La dérivée de uv est $u'v'$. »

✓ Prends u et v toutes deux égales à $x \mapsto x$. Le produit uv est $x \mapsto x^2$, de dérivée $x \mapsto 2x$ par la propriété du produit. Or $u'v'$ vaut $1 \times 1 = 1$.

La bonne formule est $(uv)' = u'v + uv'$. De même, la dérivée de $\dfrac{u}{v}$ n'est pas $\dfrac{u'}{v'}$.

À toi : La dérivée d'un inverse

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^2}$. Justifie que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis calcule $f'(x)$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Écris $f = \dfrac{1}{v}$, avec $v : x \mapsto (x^2+1)^2$, qui ne s'annule pas.

Indice 2

Dérive $v = (x^2+1)(x^2+1)$ par la propriété du produit : $v'(x) = 4x(x^2+1)$.

Indice 3

Point délicat : simplifie $\dfrac{4x(x^2+1)}{(x^2+1)^4}$ par x^2+1.

Réponse

Le dénominateur. Posons $v : x \mapsto (x^2+1)^2$. Pour tout réel x, $x^2+1 \geq 1$, donc $v(x) \geq 1 > 0$: v ne s'annule pas.

Dérivée de v. Par la propriété du produit, v est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x :

$$\begin{aligned} v'(x) &= 2x(x^2+1) \\ &\quad + (x^2+1) \times 2x \\ &= 4x(x^2+1). \end{aligned}$$

Dérivée de f. Par la propriété de l'inverse, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{4x(x^2+1)}{(x^2+1)^4} \\ &= -\frac{4x}{(x^2+1)^3}. \end{aligned}$$

Remarque : Coin devoir : dériver un quotient

En devoir, commence par l'intervalle et les fonctions. Écris :

« Sur $]-3,+\infty[$, $f=\dfrac{u}{v}$ avec $u : x \mapsto 2x-1$ et $v : x \mapsto x+3$, dérivables, et v ne s'annule pas. Par la propriété du quotient, $f'(x)=\dfrac{7}{(x+3)^2}$. »

Écris le numérateur $u'v-uv'$ avant de simplifier.

Puissances ; sinus, cosinus, tangente

Un motif dans les puissances

Devine : Un motif à deviner

Par la propriété du produit, $(x^2)'=2x$ et :

$$\begin{aligned}(x^3)' &= (x^2\times x)'\\ &= 2x\times x + x^2\\ &= 3x^2.\end{aligned}$$

Selon toi, quelle est la dérivée de $x \mapsto x^5$?

A. $x \mapsto 5x^4$

Juste.

Juste : l'exposant passe devant, puis diminue de 1.

B. $x \mapsto 5x^5$

Faux.

L'exposant diminue : $(x^3)'=3x^2$, pas $3x^3$.

C. $x \mapsto x^4$

Faux.

Le facteur manque : $(x^3)'=3x^2$, pas x^2.

D. $x \mapsto 6x^4$

Faux.

Le facteur est l'exposant de départ, 5.

Correction

Le motif $(x^n)'=nx^{n-1}$ se voit sur $n=2$ et $n=3$. Il donne $(x^5)'=5x^4$.

Un motif n'est pas une preuve : la propriété qui suit le démontre par récurrence.

Le passage de x^2 à x^3 se répète d'un exposant au suivant.

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve raisonne par récurrence sur n. L'initialisation est le cas $n=1$. L'hérédité écrit $u^{n+1}=u^n\times u$, puis applique la propriété du produit. Les exposants négatifs viennent ensuite de l'inverse.

Puissances entières

Propriété : Puissances entières, polynômes, fonctions rationnelles

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, et n un entier naturel non nul.

- u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$, avec la convention $u^0 = 1$.
- Si u ne s'annule pas sur I, la même formule vaut pour l'exposant $-n$: $(u^{-n})' = -n\,u'\,u^{-n-1}$.
- En particulier, $x \mapsto x^n$ a pour dérivée $x \mapsto nx^{n-1}$ sur $\mathbb{R}$. Tout polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$. Toute fonction rationnelle est dérivable sur chaque intervalle ouvert inclus dans son ensemble de définition.

Démonstration

Étape 1. Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ que u^n est dérivable sur I et que $(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$. Initialisation : pour $n = 1$, $(u^1)' = u' = 1 \times u' \times u^0$.

Étape 2. Hérédité : supposons la formule vraie pour un entier $n \geq 1$. Par F09, appliquée au produit $u^n \times u$: $(u^{n+1})' = n\,u'\,u^{n-1} \times u + u^n \times u' = (n+1)\,u'\,u^n$. Conclusion : la formule est vraie pour tout $n \geq 1$.

Étape 3. Si u ne s'annule pas, $u^{-n} = \dfrac{1}{u^n}$. Par F10 : $(u^{-n})' = -\dfrac{n\,u'\,u^{n-1}}{u^{2n}} = -n\,u'\,u^{-n-1}$.

Étape 4. Avec $u : x \mapsto x$ (F08), $(x^n)' = nx^{n-1}$. Un polynôme est une somme de fonctions $x \mapsto kx^n$ et d'une constante : F08, et F09 appliquée de proche en proche. Une fonction rationnelle est un quotient de deux polynômes : F10.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

L'hérédité repose sur une écriture : $u^{n+1} = u^n \times u$, qui ramène le rang $n+1$ au rang n.

Une puissance négative est l'inverse d'une puissance positive. Polynômes et fonctions rationnelles en découlent : sommes, produits et quotients de fonctions déjà dérivées.

Vérifie : Le pas de l'hérédité

Dans l'hérédité, la propriété du produit donne $n\,u'\,u^{n-1} \times u + u^n \times u'$. Pourquoi est-ce égal à $(n+1)\,u'\,u^n$?

A. Car $u^{n-1} \times u = u^{n-1}$.

Faux.
Multiplier par u augmente l'exposant de 1.

B. Car $u^{n-1} \times u = u^n$, puis on factorise.

Juste.
Juste : on obtient $n\,u'\,u^n + u'\,u^n = (n+1)\,u'\,u^n$.

C. Car $u' \times u = u^n$, quel que soit n.

Faux.

$u' \times u$ n'a aucune raison de valoir u^n.

D. Car on l'a supposé vrai au rang $n+1$.

Faux.

L'hypothèse porte sur le rang n ; supposer le rang $n+1$ serait tourner en rond.

Correction

On a $u^{n-1} \times u = u^n$. Les deux termes valent donc $n\,u'\,u^n$ et $u'\,u^n$.

En factorisant par $u'\,u^n$, on obtient $(n+1)\,u'\,u^n$: c'est la formule au rang $n+1$.

Exemple : une puissance d'un polynôme

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2-3)^4$. Posons $u : x \mapsto x^2-3$, dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $u'(x) = 2x$.

Par la propriété des puissances, pour tout réel x :

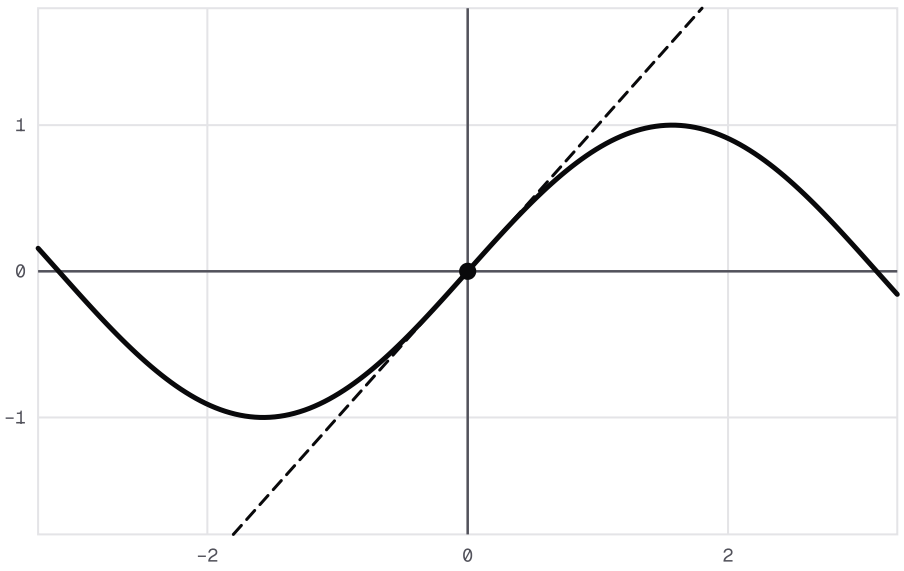
$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \times 2x \times (x^2-3)^3 \\ &= 8x(x^2-3)^3. \end{aligned}$$

Développer $(x^2-3)^4$ serait long et inutile. La forme factorisée sert aussi pour le signe.

Sinus, cosinus, tangente

Près de 0, $\sin h$ est très proche de h : la courbe du sinus part de l'origine avec la pente 1, et $1 = \cos 0$.

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve développe $\sin(x+h)$ par la formule d'addition. Elle emploie ensuite les deux limites trigonométriques usuelles en 0. La tangente suit par la propriété du quotient.



Courbe du sinus et, en pointillés, la droite d'équation y = x : près de l'origine, les deux tracés se confondent, et la courbe part de O avec la pente 1.

Propriété : Dérivées de sinus, cosinus et tangente

Le réel x désignant une mesure d'angle en radians :

- les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$;
- la fonction $\tan$ est dérivable sur chaque intervalle $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$, où $k \in \mathbb{Z}$, et $\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$.

Démonstration

Étape 1. Soit x un réel et $h \neq 0$. Par la formule d'addition (chapitre « Calcul trigonométrique ») : $\sin(x+h) - \sin x = \sin x\,(\cos h - 1) + \cos x \sin h$.

Étape 2. On a $\frac{\cos h - 1}{h} = -h \times \frac{1 - \cos h}{h^2}$, qui tend vers $0 \times \frac{1}{2} = 0$, et $\frac{\sin h}{h}$ tend vers 1 (limites trigonométriques usuelles, chapitre « Limite d'une fonction numérique »). Par produit et somme, $\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$ tend vers $\cos x$.

Étape 3. De même, $\cos(x+h) - \cos x = \cos x\,(\cos h - 1) - \sin x \sin h$, donc le taux tend vers $-\sin x$.

Étape 4. Sur chaque intervalle de l'énoncé, $\cos$ ne s'annule pas et $\tan = \frac{\sin}{\cos}$. Par F10 : $\tan' = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La formule d'addition sépare x et h. Deux limites usuelles en 0 font le reste : celle de $\dfrac{\sin h}{h}$, égale à 1, et celle de $\dfrac{1-\cos h}{h^2}$, égale à $\dfrac{1}{2}$.

Ces limites ne valent qu'en radians : les dérivées de $\sin$ et de $\cos$ aussi.

Vérifie : La formule d'addition

Dans la preuve, quelle formule développe $\sin(x+h)$?

A. $\sin(x+h) = \sin x + \sin h$

Faux.

Faux : pour $x = h = \dfrac{\pi}{2}$, on aurait $0 = 2$.

B. $\sin(x+h) = \sin x \cos h - \cos x \sin h$

Faux.

C'est la formule de $\sin(x-h)$.

C. $\sin(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h$

Faux.

C'est la formule de $\cos(x+h)$.

D. $\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$

Juste.

Juste : c'est la formule d'addition du chapitre « Calcul trigonométrique ».

Correction

La formule d'addition donne $\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$. Donc :

$$\begin{aligned}&\sin(x+h) - \sin x\\ &= \sin x\,(\cos h - 1)\\ &\quad + \cos x \sin h.\end{aligned}$$

Divisé par h, chaque terme contient l'une des deux limites usuelles.

S'en servir

Exemple : un produit avec un sinus

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x \sin x$. Les fonctions $x \mapsto x$ et $\sin$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Par la propriété du produit, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}f'(x) &= 1 \times \sin x + x \cos x\\ &= \sin x + x \cos x.\end{aligned}$$

En particulier, $f'(\pi) = 0 + \pi \times (-1) = -\pi$.

À toi : Le carré du cosinus

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos^2 x$. Justifie que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calcule $f'(x)$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Écris $f = u^2$, avec $u = \cos$.
Indice 2
Par la propriété des puissances, $f' = 2u'u$, avec $u' = -\sin$.
Indice 3
Point délicat : le signe moins vient de la dérivée du cosinus ; ne l'oublie pas.

Réponse
Posons $u = \cos$, dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $u' = -\sin$. Par la propriété des puissances, $f = u^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &f'(x) \\ &= 2 \times (-\sin x) \times \cos x \\ &= -2 \sin x \cos x. \end{aligned}$$

Par la formule de duplication, c'est aussi $-\sin(2x)$.

Dérivée de x ↦ f(ax + b) et de √u

Un facteur qui apparaît

Devine : Un facteur 3 ?

La fonction $x \mapsto (3x)^2$ s'écrit aussi $x \mapsto 9x^2$. Quelle est sa dérivée ?

A. $x \mapsto 2 \times 3x = 6x$
Faux.
C'est la dérivée de $t \mapsto t^2$, prise en $t = 3x$: il manque un facteur 3.

B. $x \mapsto 9x$
Faux.
La dérivée de $x \mapsto 9x^2$ est $x \mapsto 18x$.

C. $x \mapsto 2x$
Faux.
C'est la dérivée de $x \mapsto x^2$, pas de $x \mapsto 9x^2$.

D. $x \mapsto 18x = 3 \times (2 \times 3x)$
Juste.
Juste : la dérivée du carré, prise en $3x$, puis multipliée par 3.

Correction
Par la propriété des puissances, $(9x^2)' = 18x$. Or la dérivée de $t \mapsto t^2$, prise en $t = 3x$, vaut $6x$.

> Le facteur 3 manquant vient du coefficient de x dans $3x$. Plus généralement, la dérivée de $x \mapsto f(ax+b)$ fait apparaître le facteur a.

Quand x avance de h, le réel $ax+b$ avance de ah.

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve multiplie et divise le taux par a. Elle fait ainsi apparaître le taux de f entre $ax+b$ et $ax+b+ah$. Elle conclut par un changement de variable du chapitre « Limite d'une fonction numérique ».

Fonction de ax + b

Propriété : Dérivée de x ↦ f(ax + b)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert J, et a, b deux réels, avec $a \neq 0$. Soit I l'intervalle ouvert des réels x tels que $ax+b \in J$. Alors la fonction $g : x \mapsto f(ax+b)$ est dérivable sur I, et :

$$\forall x \in I, \quad g'(x) = a\, f'(ax+b).$$

Démonstration

Étape 1. Soit $x_0 \in I$ et $y_0 = ax_0 + b \in J$. Pour $t \neq 0$ tel que $y_0 + t \in J$, posons $\tau(t) = \dfrac{f(y_0+t)-f(y_0)}{t}$. Comme f est dérivable en y_0, $\lim_{t\to 0} \tau(t) = f'(y_0)$ (FO1).

Étape 2. Pour $h \neq 0$ tel que $x_0 + h \in I$, on a $g(x_0+h) = f(y_0+ah)$ et $ah \neq 0$, donc :

$$\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} = a \times \frac{f(y_0+ah)-f(y_0)}{ah} = a\,\tau(ah).$$

Étape 3. D'après la propriété « se ramener à une limite en 0 » (chapitre « Limite d'une fonction numérique »), appliquée avec le réel non nul a, $\lim_{h\to 0} \tau(ah) = f'(y_0)$. Par produit, le taux de g tend vers $a\, f'(ax_0+b)$.

> **À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve**
>
> Multiplier et diviser par a, réel non nul, transforme le taux de g en a fois un taux de f, d'écart ah.
>
> Quand h tend vers 0, ah tend vers 0 aussi : c'est la propriété « se ramener à une limite en 0 ». Le facteur a reste devant.

> **Vérifie : Le rôle de l'hypothèse**
>
> Dans la preuve, à quoi sert l'hypothèse $a \neq 0$?
>
> **A.** À diviser par ah, non nul pour $h \neq 0$.
> **Juste.**

Juste : on écrit le taux de g comme a fois le taux de f entre y_0 et $y_0 + ah$.

B. À garantir que g est croissante.

Faux.

Le sens de variation n'intervient pas dans la preuve.

C. À garantir que f est définie en b.

Faux.

La fonction g est étudiée sur I, pas seulement en 0.

D. À rien : pour $a = 0$, la preuve marche aussi.

Faux.

Pour $a = 0$, la preuve diviserait par $ah = 0$.

Correction

Pour $h \neq 0$, le réel ah n'est pas nul, car $a \neq 0$. On peut donc écrire le taux de g comme a fois le taux de f entre y_0 et $y_0 + ah$.

Si $a = 0$, g est constante : sa dérivée est nulle, mais par la dérivée des constantes.

Exemple : un cosinus décalé

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)$. Le cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $-\sin$.

Par la propriété de $x \mapsto f(ax + b)$, appliquée au cosinus avec $a = 3$ et $b = -\dfrac{\pi}{4}$, pour tout réel x :

$$g'(x) = -3\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Par exemple, $g'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -3\sin\dfrac{\pi}{2} = -3$.

Un piège ; la racine d'une fonction

Attention : le facteur a

✗ « La dérivée de $x \mapsto \sin(4x)$ est $x \mapsto \cos(4x)$. »

✓ Par la propriété de $x \mapsto f(ax + b)$, avec $a = 4$, la dérivée est $x \mapsto 4\cos(4x)$.

Le facteur peut être négatif : pour $x \mapsto (2 - x)^5$, on a $a = -1$, et la dérivée est $x \mapsto -5(2 - x)^4$. Écris toujours a avant de dériver.

La racine carrée d'une fonction se dérive comme $\sqrt{x}$, avec le même outil.

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve multiplie le taux par la quantité conjuguée. Elle utilise ensuite que $u(x)$ tend vers $u(a)$, puis la limite de la racine carrée d'une fonction.

Racine carrée d'une fonction

Propriété : Dérivée de la racine carrée d'une fonction

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, telle que $u(x) > 0$ pour tout $x \in I$. Alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I, et :

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

Démonstration

Étape 1. Soit $a \in I$ et $x \in I$, $x \neq a$. Par la quantité conjuguée, avec $\sqrt{u(x)} + \sqrt{u(a)} > 0$:

$$\frac{\sqrt{u(x)} - \sqrt{u(a)}}{x - a} = \frac{u(x) - u(a)}{x - a} \times \frac{1}{\sqrt{u(x)} + \sqrt{u(a)}}.$$

Étape 2. u est dérivable en a, donc $\lim_{x \to a} u(x) = u(a)$ (F02). Par la limite de la racine carrée d'une fonction positive (chapitre « Limite d'une fonction numérique »), $\sqrt{u(x)}$ tend vers $\sqrt{u(a)}$.

Étape 3. Comme $2\sqrt{u(a)} \neq 0$, par produit et quotient, le taux tend vers $\dfrac{u'(a)}{2\sqrt{u(a)}}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La quantité conjuguée transforme le taux de $\sqrt{u}$ en taux de u, divisé par $\sqrt{u(x)} + \sqrt{u(a)}$.

L'hypothèse $u > 0$ garantit que la limite de ce dénominateur, $2\sqrt{u(a)}$, n'est pas nulle.

Vérifie : Pourquoi strictement positive ?

Pourquoi la propriété exige-t-elle $u(x) > 0$, et pas seulement $u(x) \geq 0$?

A. Pour que $\sqrt{u(x)}$ existe pour tout x de I.

Faux.

$u(x) \geq 0$ suffirait pour cela.

B. Pour que $2\sqrt{u(a)}$, au dénominateur, ne soit pas nul.

Juste.

Juste : la limite du taux est un quotient par $2\sqrt{u(a)}$.

C. Pour que la fonction $\sqrt{u}$ soit croissante sur I.

Faux.

Le sens de variation n'intervient pas.

D. Pour que la dérivée u' soit positive sur I.

Faux.

Le signe de u' ne joue aucun rôle.

Correction

Si $u(a) = 0$, le dénominateur $\sqrt{u(x)} + \sqrt{u(a)}$ tend vers 0, et le taux peut devenir plus grand que tout nombre. C'est le cas de $\sqrt{x}$ en 0.

Là où u s'annule, on revient à la définition.

Exemple : la racine d'un trinôme

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$.

Signe du trinôme. Le trinôme $x^2 + x + 1$ a pour discriminant $1 - 4 = -3 < 0$, et son coefficient de x^2 est positif. Il est donc strictement positif sur $\mathbb{R}$, et f est définie sur $\mathbb{R}$.

Dérivée. Par la propriété de la racine carrée d'une fonction, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

À toi : Une racine qui s'annule en 9

Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 9]$ par $f(x) = \sqrt{9 - x}$. Sur quel intervalle ouvert peux-tu appliquer la propriété de la racine carrée d'une fonction ? Calcule $f'(x)$ sur cet intervalle. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Cherche les réels x tels que $9 - x > 0$.

Indice 2

Avec $u : x \mapsto 9 - x$, on a $u'(x) = -1$.

Indice 3

Point délicat : en 9, u s'annule ; la formule ne s'y applique pas, et f n'y est pas dérivable.

Réponse

Intervalle. On a $9 - x > 0$ si et seulement si $x < 9$. Posons $u : x \mapsto 9 - x$, dérivable et strictement positive sur $]-\infty, 9[$, avec $u'(x) = -1$.

Dérivée. Par la propriété de la racine carrée d'une fonction, pour tout $x < 9$:

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{9 - x}}.$$

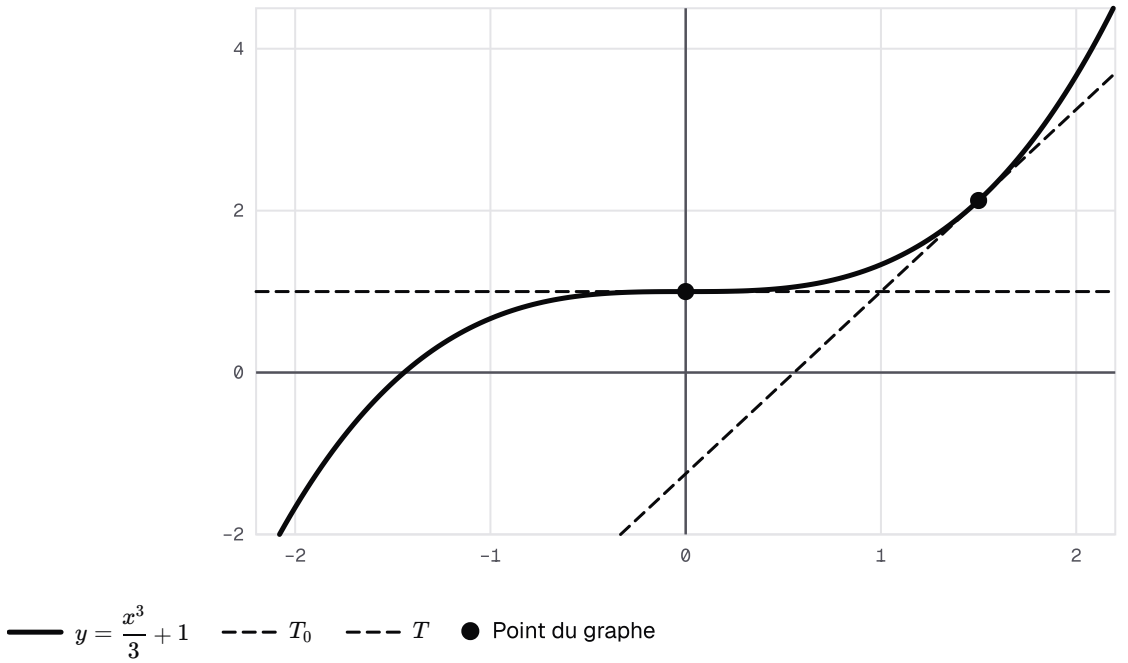
En 9. La formule ne s'applique pas. Par la définition, on a vu que le taux y tend vers $-\infty$ et que $f(x)$ tend vers $f(9) = 0$: la courbe y admet une demi-tangente verticale.

Ce que le sens de variation impose à la dérivée

Une courbe qui monte

En clair. Suis du doigt une courbe qui monte. En chaque point, la tangente monte aussi, ou bien elle est horizontale. Elle ne descend jamais.

On attend donc : si f est croissante, alors $f' \geq 0$. Pour le démontrer, on part du taux de variation, dont on connaît le signe.



Courbe croissante de x ↦ x³/3 + 1 et deux de ses tangentes, en pointillés : horizontale au point d'abscisse 0, de pente 9/4 au point d'abscisse 3/2. Aucune ne descend.

Devine : Le signe du taux

Soit f croissante sur un intervalle ouvert I, et $a \in I$. Que sais-tu du taux $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, pour $x \in I$ et $x \neq a$?

A. Il est strictement positif.

Faux.

Une fonction constante est croissante, et son taux est nul.

B. Il est positif à droite de a, négatif à gauche.

Faux.

Si $x < a$, le numérateur est négatif ou nul, et $x - a$ est strictement négatif.

C. Il est positif ou nul.

Juste.

Juste : c'est la caractérisation de la croissance par le taux de variation.

D. Rien : son signe dépend de f.

Faux.

Le chapitre « Généralités sur les fonctions numériques » relie ce signe à la croissance.

Correction

Pour $x > a$, on a $f(x) - f(a) \geq 0$ et $x - a > 0$. Pour $x < a$, on a $f(x) - f(a) \leq 0$ et $x - a < 0$.

Dans les deux cas, le taux est positif ou nul. Reste à faire passer ce signe à sa limite, $f'(a)$.

Un taux positif a-t-il forcément une limite positive ?

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve raisonne par l'absurde. Si la limite ℓ était strictement négative, la tolérance $\varepsilon = -\ell$ forcerait $q(x) < 0$ près de a. Cela contredirait $q(x) \geq 0$.

Le signe d'une limite

Propriété : Signe d'une limite à droite ou à gauche

Soit a un réel, $r > 0$, et q une fonction définie sur $]a, a + r[$ telle que $\lim_{x \to a^+} q(x) = \ell$, où ℓ est un réel.

- Si $q(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a, a + r[$, alors $\ell \geq 0$.
- Si $q(x) \leq 0$ pour tout $x \in]a, a + r[$, alors $\ell \leq 0$.

De même pour une limite à gauche, avec q définie sur $]a - r, a[$.

Démonstration

Étape 1. Supposons $q(x) \geq 0$ sur $]a, a + r[$ et, par l'absurde, $\ell < 0$. Posons $\varepsilon = -\ell$; alors $\varepsilon > 0$.

Étape 2. Par la définition de la limite à droite (chapitre « Limite d'une fonction numérique »), il existe $\alpha > 0$ tel que, pour $a < x < a + \alpha$, $|q(x) - \ell| < \varepsilon$, donc $q(x) < \ell + \varepsilon = 0$.

Étape 3. Soit β le plus petit des réels α et r, et $x = a + \dfrac{\beta}{2}$. Alors $x \in]a, a + r[$ et $a < x < a + \alpha$: donc $q(x) \geq 0$ et $q(x) < 0$. C'est une contradiction : $\ell \geq 0$.

Étape 4. Si $q(x) \leq 0$, la fonction $-q$ est positive et tend vers $-\ell$: donc $-\ell \geq 0$, c'est-à-dire $\ell \leq 0$. À gauche, même preuve avec $x = a - \dfrac{\beta}{2} \in]a - r, a[$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour contredire $\ell < 0$, on choisit la tolérance $\varepsilon = -\ell$, distance de ℓ à 0. La définition de la limite place alors $q(x)$ sous 0, près de a.

On prend enfin un réel précis, $a + \dfrac{\beta}{2}$, qui vérifie les deux conditions à la fois.

Vérifie : Le choix de la tolérance

Dans la preuve, pourquoi pose-t-on $\varepsilon = -\ell$?

A. Parce qu'une tolérance doit être inférieure à 1.

Faux.

Rien n'impose $\varepsilon < 1$: toute tolérance strictement positive convient.

B. Pour obtenir $q(x) < \ell + \varepsilon = 0$ près de a.

Juste.

Juste : $q(x)$ serait à la fois positif ou nul, et strictement négatif.

C. Pour que la limite ℓ devienne positive.

Faux.

ℓ est fixé ; c'est ε que la preuve choisit.

D. Parce que la définition impose ce réel.

Faux.

La définition vaut pour tout $\varepsilon > 0$: la preuve choisit celui-ci.

Correction

Comme $\ell < 0$, le réel $\varepsilon = -\ell$ est strictement positif. Près de a, à droite, $|q(x) - \ell| < \varepsilon$ donne $q(x) < \ell + \varepsilon = 0$. Or $q(x) \geq 0$: c'est la contradiction cherchée.

Exemple **: Contre-exemple : le strict devient large**

Le lemme ne dit pas « $q > 0$ entraîne $\ell > 0$ ».

La fonction $x \mapsto x$ est strictement positive sur $]0, 1[$. Pourtant, sa limite à droite en 0 vaut 0, qui n'est pas strictement positif.

Le passage à la limite transforme une inégalité stricte en inégalité large.

Sens de variation et dérivée

On sait que le taux d'une fonction croissante est positif ou nul, et que sa limite est $f'(a)$.

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve écrit $f'(a)$ comme la limite à droite du taux. Elle applique ensuite le lemme du signe d'une limite.

Propriété **: Sens de variation et signe de la dérivée**

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.

1. Si f est constante sur I, alors $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.
2. Si f est croissante sur I, alors $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.
3. Si f est décroissante sur I, alors $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$.

Démonstration

Étape 1. Soit $a \in I$, et $r > 0$ tel que $]a, a+r[\subset I$ (I est ouvert). Pour $x \in]a, a+r[$, notons $q(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, le taux de variation de f entre a et x. Par F04, $\lim_{x \to a^+} q(x) = f'(a)$.

Étape 2. Si f est constante, $q(x) = 0$ pour tout x, donc $f'(a) = 0$.

Étape 3. Si f est croissante sur I, le taux de variation est positif : $q(x) \geq 0$ (propriété « taux de variation et monotonie » du chapitre « Généralités sur les fonctions numériques »). Par F15, $f'(a) \geq 0$.

Étape 4. Si f est décroissante, $q(x) \leq 0$, donc $f'(a) \leq 0$ par F15. Comme a est quelconque dans I, la conclusion vaut sur tout I.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le nombre dérivé est une limite de taux : ce que l'on sait du signe du taux passe à $f'(a)$, en large. Une seule limite, à droite, suffit.

Le cas « constante » est le plus simple : le taux est nul, donc sa limite aussi.

Vérifie : Un seul côté suffit

La preuve n'étudie que les $x > a$. Pourquoi cela suffit-il ?

A. Car $f'(a)$ est aussi la limite à droite du taux.
Juste.
Juste : si f est dérivable en a, alors $f'_d(a) = f'(a)$.

B. Car à gauche de a, le taux n'est pas défini.
Faux.
I est ouvert : le taux est défini des deux côtés de a.

C. Car f n'est croissante qu'à droite de a.
Faux.
f est croissante sur tout I.

D. Car le taux est négatif à gauche de a.
Faux.
À gauche aussi, le taux d'une fonction croissante est positif ou nul.

Correction
Par la propriété des dérivabilités à droite et à gauche, f dérivable en a entraîne $f'_d(a) = f'(a)$. La limite à droite du taux suffit donc pour connaître le signe de $f'(a)$.

Un contre-exemple, puis à toi

Exemple : Contre-exemple : strictement croissante, dérivée nulle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$: si $x < y$, alors $x^3 < y^3$.

Pourtant, par la propriété des puissances, $f'(x) = 3x^2$, et $f'(0) = 0$.

Une fonction strictement croissante n'a donc pas forcément une dérivée strictement positive : la propriété ne donne que $f' \geq 0$.

À toi : Une dérivée négative en un point

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f'(1) = -2$. Montre, par l'absurde, que f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Suppose que f est croissante sur $\mathbb{R}$.
Indice 2
$\mathbb{R}$ est un intervalle ouvert : applique la propriété du sens de variation.
Indice 3
Point délicat : la contradiction porte sur le signe de $f'(1)$.

Réponse
Supposons, par l'absurde, que f soit croissante sur $\mathbb{R}$.

Comme f est dérivable sur l'intervalle ouvert $\mathbb{R}$, la propriété du sens de variation donne $f'(x) \geq 0$ pour tout réel x. En particulier, $f'(1) \geq 0$.

Or $f'(1) = -2 < 0$: c'est une contradiction.

Conclusion. f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.

Du signe de la dérivée au sens de variation

Du signe au sens

Devine : Et dans l'autre sens ?

Une fonction croissante a une dérivée positive ou nulle. Inversement, si $f'(x) \geq 0$ en tout point d'un intervalle, que prévois-tu ?

A. f est décroissante sur cet intervalle.
Faux.
Une dérivée positive correspond à des tangentes qui montent.

B. Rien : le signe de f' ne dit rien de f.
Faux.
Des tangentes qui montent partout suggèrent une courbe qui monte.

C. f est croissante sur cet intervalle.

Juste.
Juste : c'est la propriété qui suit, admise dans ce chapitre.

D. f est constante sur cet intervalle.
Faux.
C'est le cas où f' est nulle partout, seulement.

Correction
On attend que f soit croissante : des tangentes qui montent partout dessinent une courbe qui monte.

Démontrer ce sens demande un outil qui dépasse ce chapitre : on l'admet. L'hypothèse « intervalle » y est indispensable.

Théorème : Signe de la dérivée et sens de variation

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

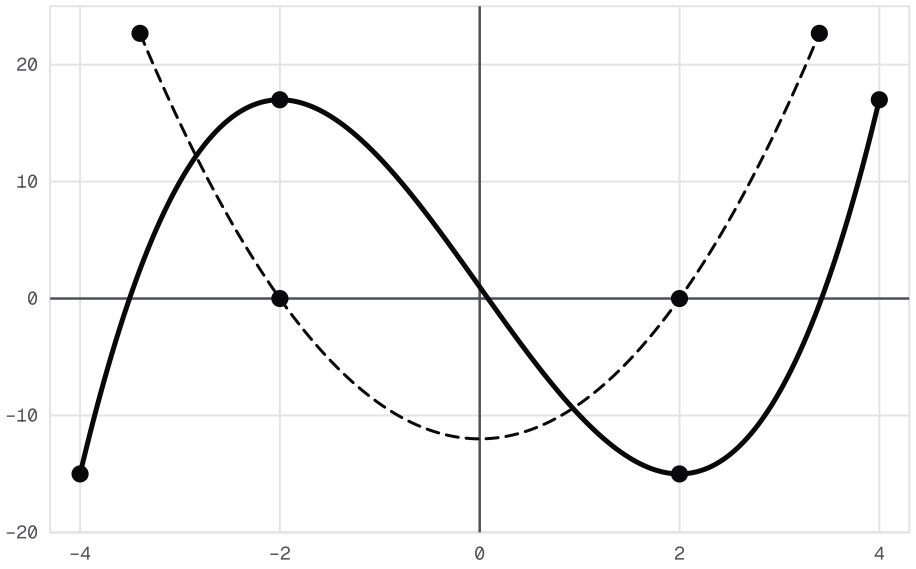
1. Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est croissante sur I.
2. Si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est décroissante sur I.
3. Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$, alors f est constante sur I.
4. Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, sauf en un nombre fini de points où f' s'annule, alors f est strictement croissante sur I. De même, avec $f'(x) < 0$, f est strictement décroissante sur I.

L'hypothèse « I est un **intervalle** » est indispensable.

Remarque

Ce résultat est admis.

Lire, et éviter un piège



$y = f(x)$ $y = f'(x)$ Point plein $(-2, 17)$ Point plein $(2, -15)$ Point plein $(-2, 0)$ Point plein $(2, 0)$ Point du graphe

Avant de lire : où la courbe de f monte-t-elle, et où f' est-elle positive ? Courbe de f : x ↦ x³ − 12x + 1 entre −4 et 4 et, en pointillés, celle de sa dérivée f' : x ↦ 3x² − 12. La courbe de f monte là où celle de f' est au-dessus de l'axe des abscisses. Les points (−2, 17) et (2, −15) sont marqués.

Attention : un intervalle, pas une réunion

✗ « Pour $x \neq 0$, la dérivée de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ vaut $-\dfrac{1}{x^2} < 0$, donc la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^*$. »

✓ $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle. On a $-1 < 1$, et pourtant $\dfrac{1}{-1} = -1 < 1 = \dfrac{1}{1}$: la fonction n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

Elle est décroissante sur $]-\infty, 0[$, et sur $]0, +\infty[$, séparément. Conclus toujours intervalle par intervalle.

Méthode : étudier les variations

1. **Déterminer** l'ensemble de définition et les intervalles où f est dérivable.
2. **Calculer** $f'(x)$ et l'écrire sous forme factorisée.
3. **Étudier le signe** de $f'(x)$: signe de chaque facteur, signe d'un trinôme, valeurs qui annulent f'.
4. **Conclure** sur chaque intervalle par le théorème du signe de la dérivée, puis dresser le tableau de variations avec les valeurs aux points remarquables.

Un tableau de variations

Exemple : Exemple guidé : un tableau de variations

Énoncé. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 12x + 1$. Étudions les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Dérivée. f est un polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 12 \\ &= 3(x-2)(x+2). \end{aligned}$$

Signe. Ce trinôme est strictement positif sur $]-\infty, -2[$ et sur $]2, +\infty[$, strictement négatif sur $]-2, 2[$. Il ne s'annule qu'en -2 et en 2.

Conclusion. Par le théorème du signe de la dérivée, f est strictement croissante sur $]-\infty, -2]$, strictement décroissante sur $[-2, 2]$, puis strictement croissante sur $[2, +\infty[$. Enfin, $f(-2) = 17$ et $f(2) = -15$.

À toi : Une fonction toujours croissante

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x$. Étudie le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$. Déduis-en que 0 est la seule solution réelle de l'équation $x^3 + x = 0$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Calcule $f'(x)$ et compare-le à 0.
Indice 2
Pour tout réel x, $3x^2 + 1 \geq 1 > 0$.
Indice 3
Point délicat : une fonction strictement croissante ne prend jamais deux fois la même valeur.

Réponse
Variations. f est un polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x :

$$f'(x) = 3x^2 + 1 \geq 1 > 0.$$

Par le théorème du signe de la dérivée, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Équation. Or $f(0) = 0$. Si $x < 0$, alors $f(x) < f(0) = 0$; si $x > 0$, alors $f(x) > 0$.

Conclusion. 0 est la seule solution réelle de l'équation $x^3 + x = 0$.

Remarque : Coin devoir : le tableau de variations

En devoir, la conclusion cite le signe et l'intervalle. Écris :

« Pour tout réel x, $f'(x) = 3(x-2)(x+2)$. Sur $[-2, 2]$, $f'(x) \leq 0$, et f' ne s'annule qu'en -2 et en 2 : donc f est strictement décroissante sur $[-2, 2]$. »

Calcule ensuite les valeurs de f aux points du tableau.

Extremums

Au sommet, une tangente horizontale

En clair. Au sommet d'une colline, la route n'est ni en montée ni en descente : elle est horizontale.

De même, en un maximum situé à l'intérieur d'un intervalle, la tangente doit être horizontale. Sinon, la courbe monterait d'un côté du point, et dépasserait le sommet.

Rappel du chapitre « Généralités sur les fonctions numériques » : f admet un **maximum local** en a s'il existe un intervalle ouvert contenant a, inclus dans D_f, sur lequel $f(x) \leq f(a)$. Avec $f(x) \geq f(a)$, c'est un **minimum local**. Un **extremum local** est un maximum ou un minimum local.

Vérifie : Où la tangente est-elle horizontale ?

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f'(x) = 3x^2 - 3$. En quels réels la tangente à $\mathcal{C}_f$ est-elle horizontale ?

A. En 0 seulement.
Faux.
$f'(0) = -3$: la tangente en 0 descend.

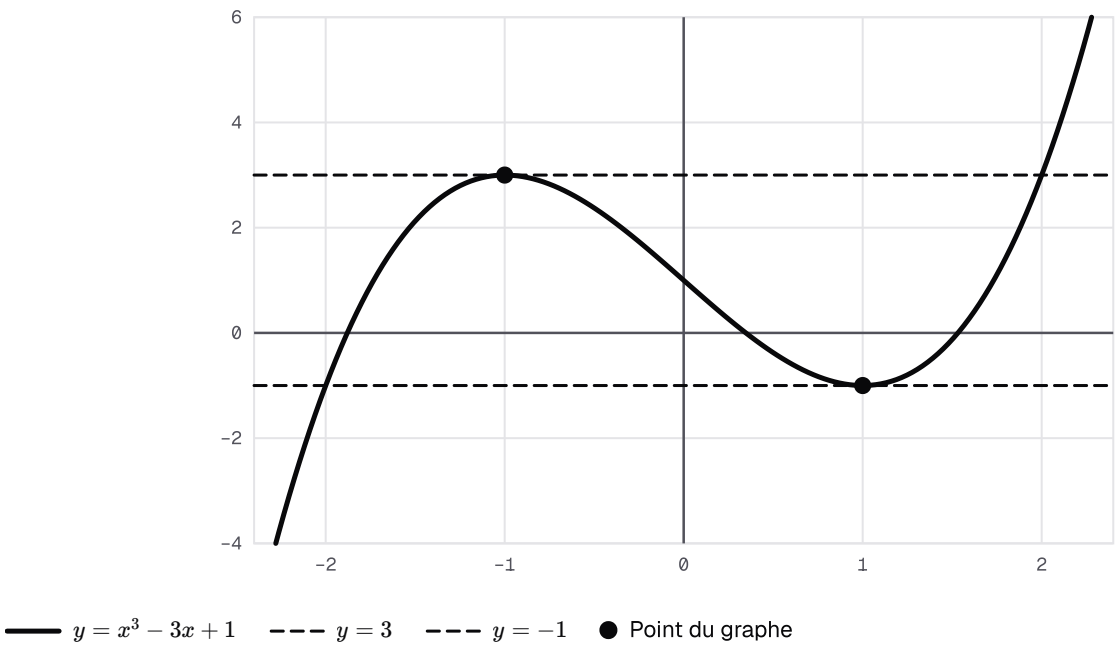
B. En -1 et en 1.
Juste.
Juste : $3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$ s'annule en -1 et en 1.

C. En 1 seulement.
Faux.
On a aussi $f'(-1) = 3 - 3 = 0$.

D. En 3 seulement.
Faux.
$f'(3) = 24$: la tangente monte fortement.

Correction
On factorise : $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$, qui s'annule en -1 et en 1. Or $f(-1) = 3$ et $f(1) = -1$.

Sur la courbe, le point $(-1, 3)$ est un sommet local, et $(1, -1)$ un creux local. Ce lien entre extremum et tangente horizontale est l'objet de cette section.



Courbe de f : x ↦ x³ − 3x + 1 et, en pointillés, ses tangentes horizontales aux points d'abscisses −1 et 1 : au maximum local f(−1) = 3 et au minimum local f(1) = −1.

Un extremum à l'intérieur d'un intervalle annule-t-il toujours la dérivée ?

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve regarde le signe du taux de part et d'autre de a. En un maximum, il est négatif ou nul à droite, positif ou nul à gauche. Le lemme du signe d'une limite conclut.

Une condition nécessaire

Propriété : Extremum local et dérivée nulle

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, et $a \in I$. Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.

La réciproque est fausse.

Démonstration

Étape 1. Supposons que f admette un maximum local en a : il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que $f(x) \leq f(a)$ pour tout $x \in J$ (chapitre « Généralités sur les fonctions numériques »). Comme J et I sont des intervalles ouverts contenant a, il existe $r > 0$ tel que $]a - r, a + r[\subset J \cap I$. Notons $q(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ pour $x \neq a$.

Étape 2. Pour $a < x < a + r$: $f(x) - f(a) \leq 0$ et $x - a > 0$, donc $q(x) \leq 0$. Par F04 et F15, $f'(a) = \lim_{x \to a^+} q(x) \leq 0$.

Étape 3. Pour $a - r < x < a$: $f(x) - f(a) \leq 0$ et $x - a < 0$, donc $q(x) \geq 0$, et de même $f'(a) = \lim_{x \to a^-} q(x) \geq 0$. Donc $f'(a) = 0$.

Étape 4. Si f admet un minimum local en a, $-f$ admet un maximum local en a et a pour dérivée $-f'$ (F09). Les étapes 1 à 3, appliquées à $-f$, donnent $-f'(a) = 0$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Près d'un maximum, $f(x) - f(a) \leq 0$: le signe du taux est celui de $-(x - a)$. Les deux côtés donnent $f'(a) \leq 0$ et $f'(a) \geq 0$.

Il faut donc pouvoir s'approcher de a des deux côtés : a doit être intérieur à l'intervalle.

Vérifie : Pourquoi un intervalle ouvert ?

Pourquoi la propriété suppose-t-elle que I est un intervalle ouvert ?

A. Pour que f soit dérivable en a.

Faux.
La dérivabilité est une autre hypothèse de l'énoncé.

B. Pour que f admette un extremum.

Faux.
L'extremum est supposé ; l'intervalle n'en garantit pas l'existence.

C. Pour étudier le taux à droite et à gauche de a.

Juste.
Juste : la preuve a besoin des deux côtés pour obtenir $f'(a) = 0$.

D. Pour que f' soit nulle aux bornes de I.

Faux.
Aux bornes, la dérivée n'a aucune raison d'être nulle.

Correction
La preuve compare deux limites, à droite et à gauche de a. Il faut donc des points de I des deux côtés de a.

Dans un intervalle ouvert, c'est vrai pour tout a ; à une borne d'un intervalle fermé, un seul côté existe.

Exemple : Contre-exemple : une borne, une pointe

Sur $[0, 1]$, la fonction $x \mapsto x$ atteint son maximum en 1. Pourtant, sa dérivée vaut 1, et non 0 : ce maximum est à une borne, et la propriété ne s'applique pas.

La fonction $x \mapsto |x|$ atteint son minimum en 0, mais elle n'y est pas dérivable.

Les deux hypothèses, a intérieur et f dérivable, sont nécessaires.

La réciproque de la propriété précédente est fausse. Il faut une hypothèse de plus : un changement de signe de f'.

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve applique, de chaque côté de a, le théorème du signe de la dérivée. Celui-ci est admis : la preuve est complète, à ce résultat admis près.

Une condition suffisante

Propriété : Dérivée qui s'annule en changeant de signe

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, $a \in I$, et $r > 0$ tel que $]a-r, a+r[\subset I$.

- Si $f'(x) \geq 0$ pour $x \in]a-r, a]$ et $f'(x) \leq 0$ pour $x \in [a, a+r[$, alors f admet un maximum local en a.
- Si $f'(x) \leq 0$ pour $x \in]a-r, a]$ et $f'(x) \geq 0$ pour $x \in [a, a+r[$, alors f admet un minimum local en a.

Dans les deux cas, $f'(a) = 0$.

Démonstration

Étape 1. Plaçons-nous dans le premier cas. Sur l'intervalle $]a-r, a]$, f est dérivable, à gauche en a avec $f'_g(a) = f'(a)$ (F04), et $f' \geq 0$: par F17, f y est croissante. Donc $f(x) \leq f(a)$ pour tout $x \in]a-r, a]$.

Étape 2. De même, sur l'intervalle $[a, a+r[$, f est dérivable (à droite en a, F04) et $f' \leq 0$: par F17, f y est décroissante, donc $f(x) \leq f(a)$ pour tout $x \in [a, a+r[$.

Étape 3. Ainsi $f(x) \leq f(a)$ pour tout x de l'intervalle ouvert $]a-r, a+r[$, qui contient a : f admet un maximum local en a (chapitre « Généralités sur les fonctions numériques »). Enfin $f'(a) \geq 0$ et $f'(a) \leq 0$, donc $f'(a) = 0$.

Étape 4. Le second cas se traite de même, les inégalités étant renversées.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Un changement de signe de f' donne deux monotonies, de part et d'autre de a.

Chaque intervalle, $]a-r, a]$ ou $[a, a+r[$, contient a : la monotonie compare donc $f(x)$ à $f(a)$. Les deux comparaisons réunies donnent l'extremum.

Vérifie : Pourquoi fermer en a ?

Dans la preuve, pourquoi utilise-t-on l'intervalle $]a-r, a]$, fermé en a ?

A. Parce qu'un intervalle doit toujours être fermé.

Faux.
Un intervalle peut être ouvert ; ici, le crochet en a a un rôle précis.

B. Pour que f' soit nulle en $a - r$.

Faux.
Rien n'est dit de f' en $a - r$, qui n'appartient pas à l'intervalle.

C. Pour que f soit dérivable en a.

Faux.
La dérivabilité en a est une hypothèse de l'énoncé.

D. Pour que la croissance compare $f(x)$ à $f(a)$.

Juste.
Juste : a appartient à l'intervalle, donc $x \leq a$ donne $f(x) \leq f(a)$.

Correction
Le théorème du signe de la dérivée donne la croissance sur $]a - r, a]$. Comme a appartient à cet intervalle, $x \leq a$ y entraîne $f(x) \leq f(a)$.

Sur $]a - r, a[$, on n'aurait aucune comparaison avec $f(a)$.

Exemple : un minimum sur $\left]0, +\infty\right[$

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{x}$.

Dérivée. Par les propriétés de la somme et de l'inverse, f est dérivable sur $]0, +\infty[$, et pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{4} - \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{(x-2)(x+2)}{4x^2}. \end{aligned}$$

Signe. Pour $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $x - 2$: négatif ou nul sur $]0, 2]$, positif ou nul sur $[2, +\infty[$.

Extremum. La dérivée s'annule en 2 en changeant de signe : f admet un minimum local en 2, égal à $f(2) = 1$.

Inégalité. Par le théorème du signe de la dérivée, f est décroissante sur $]0, 2]$ et croissante sur $[2, +\infty[$. Donc $f(x) \geq f(2) = 1$ pour tout $x > 0$.

On a montré une inégalité en étudiant une fonction et en lisant son minimum.

Méthode, piège, entraînement

Attention : une dérivée nulle ne suffit pas

X « $f'(0) = 0$, donc $f : x \mapsto x^3$ admet un extremum en 0. »

✓ Pour $x \neq 0$, $f'(x) = 3x^2 > 0$: f' s'annule en 0 sans changer de signe. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et $f(x) < 0 < f(y)$ dès que $x < 0 < y$. Elle n'a donc pas d'extremum en 0.

Une dérivée nulle ne suffit pas : il faut un changement de signe.

Méthode : chercher les extremums

1. **Chercher** les réels a de l'intervalle ouvert où $f'(a) = 0$: un extremum en un point intérieur y annule la dérivée.
2. **Étudier le signe** de f' de part et d'autre de chaque a : s'il change, c'est un maximum ou un minimum local ; si f' garde un signe strict de part et d'autre de a, f est strictement monotone autour de a : pas d'extremum.
3. **Examiner à part** les bornes d'un intervalle fermé. Sur $[\alpha, \beta]$, le tableau de variations montre les valeurs atteintes : le maximum et le minimum, quand ils existent, se cherchent parmi les extremums locaux et les valeurs $f(\alpha)$ et $f(\beta)$.
4. **Donner** la valeur de l'extremum et le réel où il est atteint.
5. **Pour montrer** $f(x) \geq g(x)$ sur un intervalle : poser $h = f - g$, étudier son signe par ses variations, lire son minimum.

À toi : Sommet et creux

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Détermine les extremums locaux de f sur $\mathbb{R}$: leur nature, leur valeur, et le réel où chacun est atteint. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Factorise $f'(x) = 3x^2 - 3$.
Indice 2
Étudie le signe de $3(x-1)(x+1)$ autour de -1, puis autour de 1.
Indice 3
Point délicat : donne la valeur de f, pas celle de f', qui est nulle.

Réponse
Dérivée. f est un polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$.

Signe. Ce trinôme est positif sur $]-\infty, -1]$, négatif sur $[-1, 1]$, positif sur $[1, +\infty[$.

Extremums. En -1, f' s'annule en passant du positif au négatif : maximum local, égal à $f(-1) = 3$. En 1, f' passe du négatif au positif : minimum local, égal à $f(1) = -1$.

Remarque : Coin devoir : justifier un extremum

En devoir, une dérivée nulle ne suffit pas : cite le changement de signe. Écris :

« f' s'annule en 2 en changeant de signe : $f'(x) \leq 0$ sur $]0, 2]$ et $f'(x) \geq 0$ sur $[2, +\infty[$. Donc f admet en 2 un minimum local, égal à $f(2) = 1$. »

Dérivées successives ; l'équation y'' + a²y = 0

Dérivées successives ; une équation

Méthode : calculer des dérivées successives

1. **Dériver** f sur un intervalle où elle est dérivable. f'' est la dérivée de f' quand f' est dérivable ; on définit de même $f^{(3)}, \ldots, f^{(n)}$.
2. **Simplifier** chaque dérivée avant de la dériver à nouveau.
3. **Conjecturer** une formule pour $f^{(n)}$ à partir des premières dérivées.
4. **Démontrer** la formule par récurrence : initialisation, hérédité, conclusion.

Devine : Dériver deux fois

Soit $g(x) = \sin(2x)$. Par la propriété de $x \mapsto f(ax + b)$, $g'(x) = 2\cos(2x)$. Que vaut la dérivée de g', notée g'' ?

A. $g''(x) = -4\sin(2x)$

Juste.

Juste : la dérivée de $2\cos(2x)$ est $2 \times \big(-2\sin(2x)\big)$.

B. $g''(x) = 4\sin(2x)$

Faux.

La dérivée du cosinus est $-\sin$: un signe moins apparaît.

C. $g''(x) = -2\sin(2x)$

Faux.

Le facteur 2 sort à chaque dérivation : $2 \times 2 = 4$.

D. $g''(x) = -4\cos(2x)$

Faux.

Dériver un cosinus donne un sinus.

Correction

On dérive $x \mapsto 2\cos(2x)$ par la même propriété :

$$\begin{aligned} g''(x) &= 2 \times \big(-2\sin(2x)\big) \\ &= -4\sin(2x). \end{aligned}$$

Ainsi $g''(x) = -4g(x)$ pour tout réel x : la fonction g vérifie $g'' + 4g = 0$.

> Les fonctions qui vérifient une telle égalité sont l'objet de cette section.

Définition : Équation différentielle y" + a²y = 0

- Une fonction y est **deux fois dérivable** sur $\mathbb{R}$ si y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et si sa dérivée y' est dérivable sur $\mathbb{R}$. La dérivée de y' est la **dérivée seconde** de y, notée y''.
- Soit a un réel non nul. Une **solution sur** $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + a^2 y = 0$ est une fonction y deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + a^2\, y(x) = 0.$$

Exemple : toutes les dérivées de $x \mapsto \sin(2x)$

Reprenons $g : x \mapsto \sin(2x)$.

Premières dérivées. Par la propriété de $x \mapsto f(ax+b)$, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2\cos(2x) \\ &= 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

puis :

$$\begin{aligned} g''(x) &= -4\sin(2x) \\ &= 4\sin(2x+\pi). \end{aligned}$$

Conjecture. On conjecture que, pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x :

$$g^{(n)}(x) = 2^n \sin\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Démontrons-le par récurrence.

Initialisation. Pour $n = 1$, on a $2\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 2\cos(2x)$: c'est $g'(x)$.

Hérédité. Supposons la formule vraie au rang n. On la dérive par la propriété de $x \mapsto f(ax+b)$, avec $a = 2$. Comme $\cos t = \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$ pour tout réel t :

$$\begin{aligned} &g^{(n+1)}(x) \\ &= 2^{n+1}\cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right) \\ &= 2^{n+1}\sin\left(2x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

C'est la formule au rang $n+1$.

Conclusion. La formule est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

Des solutions à vérifier

On a vu que $x \mapsto \sin(2x)$ est solution de $y'' + 4y = 0$. Qu'en est-il de toutes les fonctions $x \mapsto \alpha\cos(ax) + \beta\sin(ax)$?

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve dérive deux fois, par la propriété de $x \mapsto f(ax+b)$ et celle de la somme. Elle regroupe ensuite les termes.

Propriété : Les fonctions x ↦ α cos(ax) + β sin(ax) sont solutions

Soit a un réel non nul, et α, β deux réels. La fonction $y : x \mapsto \alpha\cos(ax) + \beta\sin(ax)$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + a^2 y = 0$.

Démonstration

Étape 1. Par F12 et F13, appliquée avec le réel non nul a et $b = 0$, les fonctions $x \mapsto \cos(ax)$ et $x \mapsto \sin(ax)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, de dérivées $x \mapsto -a\sin(ax)$ et $x \mapsto a\cos(ax)$.

Étape 2. Par F09, y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $y'(x) = -a\alpha\sin(ax) + a\beta\cos(ax)$.

Étape 3. Par les mêmes propriétés, y' est dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$$y''(x) = -a^2\alpha\cos(ax) - a^2\beta\sin(ax) = -a^2\, y(x).$$

Donc y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $y''(x) + a^2 y(x) = 0$ pour tout réel x (F20).

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Chaque dérivation de $\cos(ax)$ ou de $\sin(ax)$ fait sortir un facteur a, et échange sinus et cosinus. Deux dérivations font sortir a^2 et un signe moins : $y'' = -a^2 y$.

Vérifier qu'une fonction est solution, c'est calculer y'', puis $y'' + a^2 y$.

Vérifie : Laquelle est solution ?

Laquelle de ces fonctions est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y'' + 9y = 0$?

A. $x \mapsto \sin(9x)$

Faux.
Sa dérivée seconde vaut $-81\sin(9x)$: il faudrait $a^2 = 81$.

B. $x \mapsto 3\cos x$

Faux.
Sa dérivée seconde vaut $-3\cos x$: c'est une solution de $y'' + y = 0$.

C. $x \mapsto 4\sin(3x)$

Juste.
Juste : ici $a = 3$, $\alpha = 0$ et $\beta = 4$.

D. $x \mapsto \cos(3x) + 1$

Faux.
La constante 1 donne $y'' + 9y = 9$, et non 0.

Correction
L'équation $y'' + 9y = 0$ s'écrit $y'' + 3^2 y = 0$, avec $a = 3$.

La fonction $x \mapsto 4\sin(3x)$ est de la forme $x \mapsto \alpha\cos(3x) + \beta\sin(3x)$, avec $\alpha = 0$ et $\beta = 4$. Par la propriété précédente, elle est solution.

Exemple : vérifier une solution

Soit $y : x \mapsto 2\cos(3x) - \sin(3x)$. Par la propriété de $x \mapsto f(ax+b)$ et celle de la somme, y est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &y'(x) \\ &= -6\sin(3x) - 3\cos(3x). \end{aligned}$$

De même, y' est dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$$\begin{aligned} &y''(x) \\ &= -18\cos(3x) + 9\sin(3x) \\ &= -9\big(2\cos(3x) - \sin(3x)\big) \\ &= -9y(x). \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $y''(x) + 9y(x) = 0$: y est solution de $y'' + 9y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Toutes les solutions

Théorème : Solutions de l'équation y" + a²y = 0

Soit a un réel non nul.

1. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + a^2 y = 0$ sont **exactement** les fonctions $x \mapsto \alpha\cos(ax) + \beta\sin(ax)$, où α et β sont des réels.
2. Pour tous réels x_0, y_0 et y_1, il existe une **unique** solution y telle que $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$.

Remarque

Ce résultat est admis.

Exemple : Exemple guidé : deux conditions

Énoncé. Déterminons la solution y de $y'' + 4y = 0$ telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = -2$.

Forme des solutions. L'équation s'écrit $y'' + 2^2 y = 0$. Par la propriété admise, y est de la forme $x \mapsto \alpha\cos(2x) + \beta\sin(2x)$, avec α et β réels. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} y'(x) = &-2\alpha\sin(2x) \\ &+ 2\beta\cos(2x). \end{aligned}$$

Conditions. La condition $y(0) = 1$ donne $\alpha = 1$. La condition $y'(0) = -2$ donne $2\beta = -2$, soit $\beta = -1$.

Conclusion. La solution cherchée, unique, est $x \mapsto \cos(2x) - \sin(2x)$.

Méthode, à toi, en devoir

Méthode : résoudre $y" + a^{2}y = 0$ avec deux conditions

1. **Identifier** a : écrire l'équation sous la forme $y'' + a^2 y = 0$, avec $a \neq 0$.
2. **Écrire** les solutions $x \mapsto \alpha\cos(ax) + \beta\sin(ax)$, puis leur dérivée $x \mapsto -a\alpha\sin(ax) + a\beta\cos(ax)$.
3. **Traduire** chaque condition en une équation d'inconnues α et β, puis résoudre.
4. **Conclure** : la solution est unique ; vérifie les deux conditions.

À toi : Une solution sous deux conditions

Détermine la solution y de l'équation $y'' + 9y = 0$ telle que $y(0) = -1$ et $y'(0) = 6$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Ici $a = 3$: écris y sous la forme $x \mapsto \alpha\cos(3x) + \beta\sin(3x)$.
Indice 2
Calcule $y'(x)$, puis remplace x par 0 : $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$.
Indice 3
Point délicat : $y'(0) = 3\beta$, et non β ; le facteur a apparaît.

Réponse
Forme des solutions. L'équation s'écrit $y'' + 3^2 y = 0$. Par la propriété admise, y est de la forme $x \mapsto \alpha\cos(3x) + \beta\sin(3x)$, et pour tout réel x :

$$\begin{aligned} y'(x) = &-3\alpha\sin(3x) \\ &+ 3\beta\cos(3x). \end{aligned}$$

Conditions. La condition $y(0) = -1$ donne $\alpha = -1$. La condition $y'(0) = 6$ donne $3\beta = 6$, soit $\beta = 2$.

Conclusion. La solution cherchée est $x \mapsto -\cos(3x) + 2\sin(3x)$.

Remarque : Coin devoir : deux conditions

En devoir, écris la forme des solutions avant toute condition. Écris :

« L'équation s'écrit $y'' + 2^2 y = 0$; ses solutions sont les fonctions $x \mapsto \alpha\cos(2x) + \beta\sin(2x)$, où α et β sont réels. »

Traduis ensuite chaque condition, résous, puis vérifie ta solution.

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir : quelle méthode pour quelle question

- Nombre dérivé en un point, ou point de raccord : le taux de variation et sa limite, à droite et à gauche au besoin.
- Tangente : $f(a)$ et $f'(a)$, puis $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. Valeur approchée : $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$.
- Dérivée : l'intervalle, la forme, la règle nommée, puis une forme factorisée.
- Variations : le signe de f', intervalle par intervalle.
- Extremum : f' s'annule en changeant de signe ; les bornes à part.
- Inégalité par étude de fonction : pour $f(x) \geq g(x)$, étudier $f - g$ et lire son minimum.
- Équation $y'' + a^2 y = 0$: les solutions $x \mapsto \alpha\cos(ax) + \beta\sin(ax)$, puis les conditions.

Le mot du prof. Tu sais maintenant ce qu'est la pente d'une courbe en un point, et comment la calculer. Tu sais dériver en nommant chaque règle.

Surtout, tu sais lire le sens de variation dans le signe de la dérivée. Le chapitre « Étude et représentation des fonctions » s'appuie sur tout cela.

Garde l'habitude : l'intervalle d'abord, la règle ensuite.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Dérivabilité » (1bac · sciences-mathematiques · mathematiques)