BURHAN

Résumé : Dénombrement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/denombrement/resume

Chapitre	Semestre
Dénombrement	Semestre 2

Ensembles finis, cardinal

À retenir : Le réflexe : nommer l'ensemble avant de compter

Compter, c'est numéroter. Dénombrer un ensemble E, c'est trouver $\mathrm{card}(E)$ sans forcément écrire la liste de ses éléments.

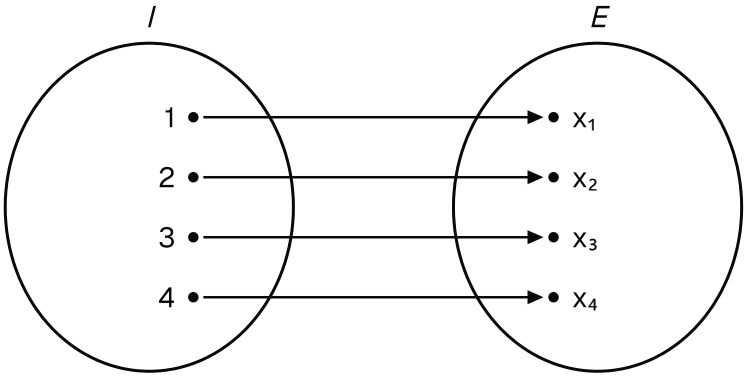
Trois outils servent dans tout le chapitre : une bijection vers un ensemble connu, un découpage en cas disjoints, des choix successifs.

Avant tout calcul, écris en une phrase quel est l'ensemble que tu dénombres.

Définition : Ensemble fini, cardinal

Soit E un ensemble et $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que E est **fini de cardinal** n s'il existe une bijection de $\{1, 2, \ldots, n\}$ sur E : on peut numéroter les éléments de E sous la forme $x_1, x_2, \ldots, x_n$, deux à deux distincts. On note alors $\mathrm{card}(E) = n$, le **cardinal** de E, c'est-à-dire son nombre d'éléments. Ce nombre ne dépend pas de la numérotation choisie : c'est le premier point d'un résultat admis, énoncé plus loin.

L'ensemble vide est fini, de cardinal 0 : $\mathrm{card}(\varnothing) = 0$. Un ensemble qui n'est pas fini est dit **infini**.



Un ensemble E de cardinal 4 : la bijection depuis l'ensemble I des entiers de 1 à 4 donne à ses éléments les noms x_1 à x_4.

Propriété : Cardinal et bijection

Soit E un ensemble fini et F un ensemble. S'il existe une bijection de E sur F, alors F est fini et $\mathrm{card}(F) = \mathrm{card}(E)$.

Propriété : Unicité du cardinal ; parties d'un ensemble fini

- Le cardinal d'un ensemble fini est bien défini : si n et m sont deux entiers naturels non nuls et s'il existe une bijection de $\{1, 2, \ldots, n\}$ sur E et une bijection de $\{1, 2, \ldots, m\}$ sur E, alors $n = m$.
- Toute partie d'un ensemble fini est un ensemble fini.

Méthode : dénombrer par une bijection

1. **Nomme** l'ensemble F à dénombrer et décris ses éléments.
2. **Choisis** un ensemble E dont tu connais le cardinal.
3. **Définis** une application de E dans F, ou de F dans E, et vérifie qu'elle arrive au bon endroit.
4. **Prouve** qu'elle est bijective : injectivité et surjectivité, ou réciproque explicite.
5. **Conclus** : $\mathrm{card}(F) = \mathrm{card}(E)$, d'après le résultat « cardinal et bijection ».

Exemple

Énoncé. Dénombre l'ensemble P des entiers pairs compris entre 1 et 200.

Bijection. Soit $\varphi : \{1, 2, \ldots, 100\} \to P$, $k \mapsto 2k$. Elle est bien définie : $2k$ est pair et $2 \leq 2k \leq 200$.

Réciproque. L'application $m \mapsto \dfrac{m}{2}$ envoie P dans $\{1, 2, \ldots, 100\}$; c'est la réciproque de φ.

Conclusion. φ est bijective. D'après le résultat « cardinal et bijection », $\mathrm{card}(P) = 100$.

Réunion, complémentaire

Propriété : Réunion de parties disjointes (principe additif)

Soit A et B deux ensembles finis disjoints ($A \cap B = \varnothing$). Alors $A \cup B$ est fini et :

$$\begin{aligned}&\mathrm{card}(A \cup B)\\ &= \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B).\end{aligned}$$

Plus généralement, soit $p \geq 2$ et $A_1, A_2, \ldots, A_p$ des ensembles finis deux à deux disjoints. Alors leur réunion est finie et :

$$\begin{aligned}&\mathrm{card}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p)\\ &= \mathrm{card}(A_1) + \mathrm{card}(A_2)\\ &\quad + \cdots + \mathrm{card}(A_p).\end{aligned}$$

Propriété : Cardinal du complémentaire et d'une réunion

Soit E un ensemble fini, et A et B deux parties de E. Le complémentaire est pris dans E. Alors :

- $\mathrm{card}(\overline{A}) = \mathrm{card}(E) - \mathrm{card}(A)$; en particulier, $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(E)$, avec égalité si et seulement si $A = E$;
- $\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) - \mathrm{card}(A \cap B)$.

Méthode : cas disjoints, complémentaire, réunion

1. **Par cas** : sépare les objets en familles deux à deux disjointes, sans en oublier aucun. Additionne les cardinaux des familles.
2. **Par le complémentaire** : pour « au moins un », compte plutôt « aucun ». Retranche ce nombre du total.
3. **Réunion quelconque** : retranche le cardinal de l'intersection, comptée deux fois.
4. **Précise** l'ensemble E dans lequel tu prends le complémentaire.

Exemple

Énoncé. Dans $E = \{1, 2, \ldots, 120\}$, on note A l'ensemble des multiples de 4 et B celui des multiples de 6. Combien d'éléments de E sont multiples de 4 ou de 6 ? Combien ne sont multiples ni de l'un ni de l'autre ?

Cardinaux. $\mathrm{card}(A) = 30$ et $\mathrm{card}(B) = 20$. Un entier est multiple de 4 et de 6 si et seulement s'il est multiple de 12 : $\mathrm{card}(A \cap B) = 10$.

Réunion. D'après la formule de la réunion :

$$\begin{aligned}\mathrm{card}(A \cup B) &= 30 + 20 - 10 \\ &= 40.\end{aligned}$$

Complémentaire dans E. D'après la formule du complémentaire :

$$\mathrm{card}(\overline{A \cup B}) = 120 - 40 = 80.$$

Conclusion. 40 éléments de E sont multiples de 4 ou de 6, et 80 ne sont multiples ni de l'un ni de l'autre.

Attention : Des parties qui se chevauchent

Dans l'exemple ci-dessus, additionner 30 et 20 donnerait 50, et non 40. Les dix multiples de 12 seraient comptés deux fois : une fois dans A, une fois dans B.

On additionne les cardinaux de parties disjointes seulement. Sinon, on retranche le cardinal de l'intersection.

Produit cartésien

Propriété : Cardinal d'un produit cartésien

Soit E et F deux ensembles finis. Alors $E \times F$ est fini et :

$$\begin{aligned}&\operatorname{card}(E \times F)\\&= \operatorname{card}(E) \times \operatorname{card}(F).\end{aligned}$$

Plus généralement, soit $p \geq 2$ et $E_1, E_2, \ldots, E_p$ des ensembles finis. L'ensemble $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$ des p-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, où $x_i \in E_i$ pour tout i, est fini et :

$$\begin{aligned}&\operatorname{card}(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p)\\&= \operatorname{card}(E_1) \times \operatorname{card}(E_2)\\&\quad \times \cdots \times \operatorname{card}(E_p).\end{aligned}$$

À retenir : Un tableau à double entrée

Pour visualiser $E \times F$, imagine un tableau : une ligne pour chaque élément de E, une colonne pour chaque élément de F. Chaque case contient un couple.

Le tableau a $\operatorname{card}(E)$ lignes et $\operatorname{card}(F)$ colonnes, donc $\operatorname{card}(E) \times \operatorname{card}(F)$ cases.

Exemple

Énoncé. On lance un dé rouge puis un dé vert, chacun à six faces numérotées de 1 à 6. On note le résultat sous la forme d'un couple (r, v).

Dénombrement. L'ensemble des résultats est $D \times D$, avec $D = \{1, 2, \ldots, 6\}$. D'après le cardinal d'un produit cartésien, il compte $6 \times 6 = 36$ couples.

Avec une condition. Les résultats formés de deux numéros pairs constituent $\{2, 4, 6\} \times \{2, 4, 6\}$: $3 \times 3 = 9$ couples.

L'ordre compte. $(1, 5)$ et $(5, 1)$ sont deux résultats distincts.

Le principe multiplicatif

Théorème : Principe multiplicatif

On réalise un choix en p étapes successives ($p \geq 2$). On suppose que la première étape offre n_1 possibilités et que, pour $2 \leq k \leq p$, l'étape k offre n_k possibilités, **quels que soient les choix faits aux étapes précédentes**. Alors le nombre de choix complets (suites des p choix) est

$$n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_p.$$

Méthode : appliquer le principe multiplicatif

1. **Découpe** la construction de l'objet en étapes, dans un ordre que tu choisis.
2. **Compte** les possibilités offertes par chaque étape.
3. **Vérifie** que ce nombre ne dépend pas des choix déjà faits, même si les possibilités elles-mêmes changent.
4. **Vérifie** qu'un objet correspond à une seule suite de choix.
5. **Multiplie** les nombres obtenus.

Exemple

Énoncé. Combien d'entiers compris entre 100 et 999 ont trois chiffres deux à deux distincts ?

Étapes. Le chiffre des centaines n'est pas nul : 9 possibilités. Le chiffre des dizaines diffère de celui des centaines : 9 possibilités. Le chiffre des unités diffère des deux premiers : 8 possibilités. Ces nombres ne dépendent pas des chiffres déjà choisis.

Conclusion. D'après le principe multiplicatif, il y a $9 \times 9 \times 8 = 648$ tels entiers.

Attention : Un objet, une seule suite de choix

Combien de parties à deux éléments a l'ensemble $\{0, 1, \dots, 9\}$? Choisir un premier élément, puis un second, donne $10 \times 9 = 90$ suites de choix.

Mais la partie $\{2, 7\}$ est obtenue deux fois : 2 puis 7, ou 7 puis 2. Chaque partie est comptée deux fois : il y en a 45.

Le principe multiplicatif exige une seule suite de choix par objet.

p-listes, arrangements, permutations

Définition : p-listes d'un ensemble fini

Soit E un ensemble fini non vide et $p \in \mathbb{N}^*$. Une **p-liste** d'éléments de E (on dit aussi un **arrangement avec répétition**) est un p-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ d'éléments de E, c'est-à-dire un élément de $E^p = E \times E \times \cdots \times E$ (p facteurs).

Dans une p-liste, l'**ordre compte** et un même élément peut **apparaître plusieurs fois**.

Propriété : Nombre de p-listes

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Le nombre de p-listes d'éléments de E est

$$\operatorname{card}(E^p) = n^p.$$

Définition : Factorielle ; arrangements ; permutations

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la **factorielle** de n est $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$. Par convention, $0! = 1$.

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$ et p un entier tel que $1 \leq p \leq n$.

- Un **arrangement** de p éléments de E est une p-liste d'éléments de E **deux à deux distincts**. On note A_n^p le nombre de ces arrangements.
- Une **permutation** de E est un arrangement des n éléments de E.

Propriété : Nombre d'arrangements et de permutations

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et p un entier tel que $1 \leq p \leq n$. Alors

$$\begin{aligned} &A_n^p \\ &= n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1) \\ &= \frac{n!}{(n-p)!}, \end{aligned}$$

le produit comptant p facteurs. En particulier, le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est $A_n^n = n!$.

Factorielle

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$$
$$0! = 1$$

D'une factorielle à la suivante

$$(n+1)! = (n+1) \times n!$$

Premières valeurs

$$4! = 24, \quad 5! = 120,$$
$$6! = 720, \quad 7! = 5040$$

Nombre de p-listes

$$\operatorname{card}(E^p) = n^p$$

Nombre d'arrangements

$$\begin{aligned} A_n^p &= n(n-1)\cdots(n-p+1) \\ &= \frac{n!}{(n-p)!} \end{aligned}$$

Nombre de permutations

$$A_n^n = n!$$

Exemple

Calculs. $A_8^3 = 8 \times 7 \times 6 = 336$: trois facteurs, en partant de 8 et en descendant.

Ensuite, $10! = 10 \times 9 \times 8!$, donc $\dfrac{10!}{8!} = 10 \times 9 = 90$. On reconnaît A_{10}^2.

Interprétation. 336 est le nombre de façons d'attribuer trois rôles différents à trois personnes distinctes choisies parmi huit.

Attention : Conventions et cas limites

$0! = 1$, et non 0. Le nombre A_n^p suppose $1 \leq p \leq n$: on ne choisit pas 5 éléments distincts parmi 3.

Le produit qui donne A_n^p compte exactement p facteurs, de n jusqu'à $n - p + 1$. Par exemple, $A_9^4 = 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$; s'arrêter à 5 ajouterait un facteur de trop.

Combinaisons

Définition : Combinaisons

Soit E un ensemble fini de cardinal n ($n \in \mathbb{N}$) et p un entier tel que $0 \leq p \leq n$. Une **combinaison** de p éléments de E est une **partie** de E à p éléments. On note C_n^p le nombre de ces parties.

Dans une combinaison, l'**ordre ne compte pas** et les éléments sont **distincts**.

Propriété : Calcul du nombre de combinaisons

Soit $n \in \mathbb{N}$ et p un entier tel que $0 \leq p \leq n$. Alors

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!},$$

et, si $p \geq 1$, $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$.

Exemple

Énoncé. Un fleuriste compose un bouquet de 4 fleurs de variétés différentes, choisies parmi 9 variétés. Combien de bouquets différents peut-il composer ?

Modèle. Un bouquet est une partie à 4 éléments de l'ensemble des 9 variétés : l'ordre ne compte pas, il n'y a pas de répétition.

Calcul. D'après le calcul du nombre de combinaisons :

$$\begin{aligned} C_9^4 &= \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4!} \\ &= \frac{3024}{24} = 126. \end{aligned}$$

Conclusion. Le fleuriste peut composer 126 bouquets différents.

Attention : L'ordre compte-t-il ?

Choisir 3 photos parmi 8 pour un album donne $C_8^3 = 56$ choix. Les placer en page un, deux et trois donne $A_8^3 = 336$ choix, soit $56 \times 3!$.

Demande-toi : échanger deux éléments choisis donne-t-il un autre résultat ? Si oui, l'ordre compte. Sinon, ce sont des combinaisons.

Choisir le bon modèle

Méthode : Quel modèle pour quel dénombrement ?

Pose-toi deux questions : l'ordre compte-t-il ? Un même élément peut-il revenir ? On choisit p éléments dans un ensemble à n éléments.

Situation	Ordre	Répétition	Modèle	Nombre
tirages successifs avec remise, mots, suites de réponses	oui	oui	p-listes	n^p
tirages successifs sans remise, rôles distincts	oui	non	arrangements	A_n^p
ranger tous les éléments	oui	non	permutations	$n!$
tirages simultanés, groupes, mains de cartes	non	non	combinaisons	C_n^p
une image pour chaque élément d'un ensemble à p éléments	oui	oui	applications	n^p
une partie quelconque	non	non	parties	2^n

Si plusieurs contraintes se combinent, découpe en étapes ou en cas disjoints.

Méthode : choisir le modèle et contrôler

1. **Repère** l'ensemble dans lequel on choisit, son cardinal n, et le nombre p d'éléments choisis.
2. **Teste l'ordre** : échanger deux éléments choisis change-t-il le résultat ?
3. **Teste la répétition** : un même élément peut-il être choisi deux fois ?
4. **Lis le modèle** dans la fiche, puis cite l'énoncé qui donne le nombre.
5. **Contrôle** ta formule sur un petit cas que tu peux lister.

Exemple

Énoncé. Une application musicale propose 7 titres. On en écoute 3, l'un après l'autre.

Avec répétition. Si un titre peut repasser, une écoute est une 3-liste de titres : $7^3 = 343$ écoutes.

Sans répétition. Une écoute est un arrangement : $A_7^3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$.

Sans ordre. Télécharger 3 titres distincts, c'est choisir une partie : $C_7^3 = 35$.

Contrôle. $210 = 35 \times 3!$: chaque choix de 3 titres donne 6 ordres d'écoute.

Applications et parties d'un ensemble fini

Propriété : Nombre d'applications, d'injections, de bijections

Soit E et F deux ensembles finis non vides, $p = \mathrm{card}(E)$ et $n = \mathrm{card}(F)$. On note $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble des applications de E dans F.

- $\mathrm{card}(\mathcal{F}(E, F)) = n^p$.
- Si $p \leq n$, le nombre d'applications injectives de E dans F est A_n^p ; si $p > n$, aucune application de E dans F n'est injective.
- Si $p = n$, toute injection de E dans F est une bijection, et le nombre de bijections de E sur F est $n!$.

Propriété : Nombre de parties d'un ensemble fini

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors

$$\mathrm{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$$

et

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n.$$

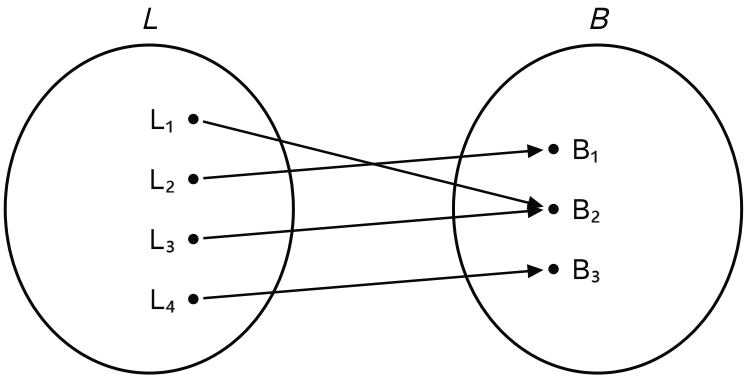
Exemple

Énoncé. On glisse des lettres distinctes dans des boîtes aux lettres.

Applications. Une répartition de 4 lettres dans 3 boîtes est une application de l'ensemble des lettres dans l'ensemble des boîtes : $3^4 = 81$ répartitions.

Injections. Avec 3 lettres et 5 boîtes, les répartitions où deux lettres ne partagent jamais une boîte sont les injections : $A_5^3 = 60$.

Bijections. Avec 3 lettres et 3 boîtes, une lettre par boîte : $3! = 6$ répartitions.



Une des 81 répartitions de quatre lettres dans trois boîtes : chaque lettre reçoit une boîte, et une boîte peut en accueillir plusieurs.

Exemple

Énoncé. Un ensemble G a 7 éléments. Combien a-t-il de parties ? Combien de ses parties ont exactement 2 éléments ?

Réponse. D'après le nombre de parties, $\mathrm{card}(\mathcal{P}(G)) = 2^7 = 128$, et G a $C_7^2 = 21$ parties à deux éléments.

Contrôle. En rangeant les parties selon leur nombre d'éléments :

$$1 + 7 + 21 + 35 \\ + 35 + 21 + 7 + 1 = 128.$$

Attention : Qui est en exposant ?

Pour 4 lettres et 3 boîtes, il y a $3^4 = 81$ répartitions, et non $4^3 = 64$.

On choisit une boîte pour chaque lettre : l'exposant est le nombre d'éléments de l'ensemble de départ. Demande-toi qui choisit, et parmi quoi.

Coefficients binomiaux, formule du binôme

Propriété : Symétrie et relation de Pascal

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- $C_n^0 = C_n^n = 1$ et, si $n \geq 1$, $C_n^1 = n$.
- Pour tout entier p tel que $0 \leq p \leq n$: $C_n^{n-p} = C_n^p$.
- **Relation de Pascal** : si $n \geq 2$, pour tout entier p tel que $1 \leq p \leq n-1$,

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p.$$

Méthode : calculer un coefficient binomial

1. **Simplifie** avant de multiplier : $C_n^p = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}$, avec p facteurs au numérateur.
2. **Réduis** p grâce à la symétrie : $C_n^p = C_n^{n-p}$.
3. **Pour une ligne entière** du triangle de Pascal, pars de la ligne précédente et additionne deux voisins.
4. **Contrôle** : la somme des nombres de la ligne n vaut 2^n.

Exemple

Calcul. D'après le calcul du nombre de combinaisons :

$$C_{10}^3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3!} = \frac{720}{6} = 120.$$

Symétrie. $C_{10}^7 = C_{10}^3 = 120$: choisir les 7 éléments gardés revient à choisir les 3 éléments laissés.

Relation de Pascal. $C_9^2 = 36$ et $C_9^3 = 84$, et l'on retrouve $C_{10}^3 = 36 + 84 = 120$.

Triangle de Pascal, lignes 0 à 6. 1 ; $1, 1$; $1, 2, 1$; $1, 3, 3, 1$; $1, 4, 6, 4, 1$; $1, 5, 10, 10, 5, 1$; $1, 6, 15, 20, 15, 6, 1$.

n \ p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Tableau de Pascal jusqu'à n = 10 : la case de la ligne 10 en colonne 3 vaut la somme des deux cases teintées de la ligne 9, 36 et 84.

Théorème : Formule du binôme

Soit a et b deux nombres réels et $n \in \mathbb{N}^*$. Avec la convention $x^0 = 1$ pour tout réel x :

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{p=0}^{n} C_n^p\, a^{n-p} b^p \\ &= C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots \\ &\quad + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n.\end{aligned}$$

La notation $\sum_{p=0}^{n}$ désigne la somme des termes obtenus pour p allant de 0 à n.

Méthode : utiliser la formule du binôme

1. **Identifie** a, b avec leur signe, et l'exposant n.
2. **Écris** le terme d'indice p, soit $C_n^p\, a^{n-p} b^p$, puis simplifie-le.
3. **Pour un coefficient**, cherche l'indice p qui donne la puissance demandée.
4. **Pour une somme** de coefficients binomiaux, donne à a et b des valeurs bien choisies, comme $a = b = 1$.

Symétrie

$$C_n^{n-p} = C_n^p \quad (0 \le p \le n)$$

Relation de Pascal

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p \quad (n \ge 2,\ 1 \le p \le n-1)$$

Terme d'indice p

$$C_n^p\, a^{n-p} b^p$$

Avec a = b = 1

$$\sum_{p=0}^{n} C_n^p = 2^n$$

Avec a = 1 et b = -1, pour n non nul

$$\sum_{p=0}^{n} (-1)^p C_n^p = 0$$

Une différence

$$(a-b)^n = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p C_n^p\, a^{n-p} b^p$$

Exemple

Énoncé. Dans le développement de $(3x+1)^5$, trouve le coefficient de x^2.

Terme d'indice p. Avec $a = 3x$, $b = 1$ et $n = 5$, il vaut

$$C_5^p (3x)^{5-p} = C_5^p\, 3^{5-p} x^{5-p}.$$

Coefficient. La puissance x^2 correspond à $5 - p = 2$, soit $p = 3$. Le coefficient vaut

$$C_5^3 \times 3^2 = 10 \times 9 = 90.$$

Contrôle. Pour $x = 1$, la somme de tous les coefficients vaut $(3+1)^5 = 1024$.

Attention : Termes, exposants, signes

Le développement de $(a+b)^n$ compte $n+1$ termes, et non n : p va de 0 à n. Dans chaque terme, les exposants de a et de b ont pour somme n.

Pour $(x-5)^n$, pose $b=-5$: le terme d'indice p contient $(-5)^p$, et les signes alternent.

Rédiger un dénombrement

À retenir : Rédiger en devoir

Commence par nommer l'ensemble que tu dénombres. Annonce le modèle : p-listes, arrangements, combinaisons, applications ou parties.

Cite l'énoncé employé : « d'après le principe multiplicatif », « par le complémentaire dans E ».

Pour une bijection, prouve l'injectivité et la surjectivité, ou donne la réciproque. Dans une récurrence, titre chaque étape : initialisation, hérédité, conclusion.

Remarque : Contrôler un résultat

Un résultat de dénombrement se contrôle. Sur un petit cas, liste tous les objets et compare avec ta formule.

Compte aussi par une seconde voie : le complémentaire, une somme de cas, un autre ordre de choix.

Ces modèles resservent en 2BAC SM, et à l'examen de 2BAC SM.