BURHAN

Dénombrement : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/denombrement/exercices/examen

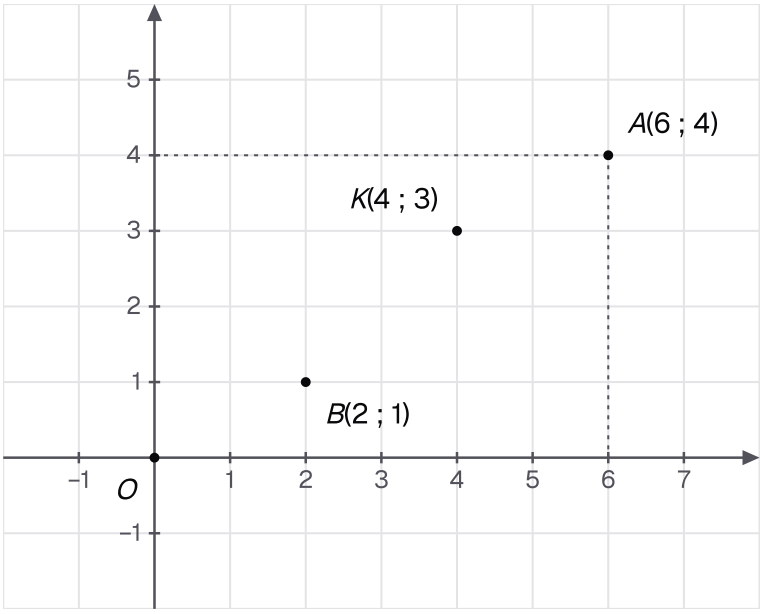
Chapitre	Palier	Exercices
Dénombrement	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Chemins sur un quadrillage

Dans un repère du plan, un pion part du point $O(0,0)$ et doit atteindre le point $A(6,4)$. À chaque pas, il avance d'une unité, soit vers la droite (pas D), soit vers le haut (pas H).

On appelle **chemin** la suite des pas qui mène de O à A. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des chemins.



Le quadrillage du pion : départ en O, arrivée en A, et les deux points B et K dont parlent les questions 4 et 6.

1. 0,5 pts

Justifier qu'un chemin compte exactement 10 pas, dont 6 pas D et 4 pas H.

INDICE

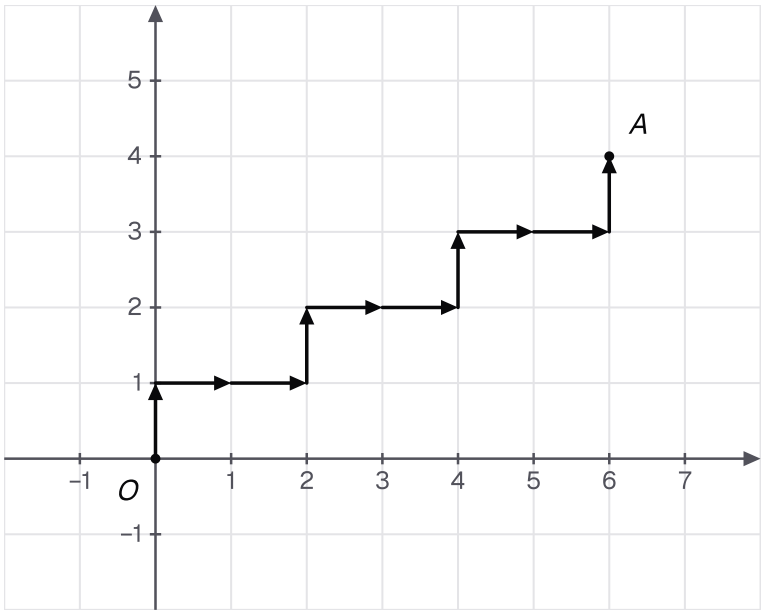
Outil : suis l'abscisse et l'ordonnée du pion. **Début :** seul un pas D modifie l'abscisse.

2. 1 pts

On note $\mathcal{P}_4$ l'ensemble des parties à 4 éléments de $\{1, 2, \ldots, 10\}$. À un chemin c, on associe l'ensemble $N(c)$ des rangs de ses pas H.

Par exemple, le chemin $HDDHDDHDDH$ donne $N(c) = \{1, 4, 7, 10\}$.

Montrer que N est une bijection de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{P}_4$.



Le chemin HDDHDDHDDH tracé pas à pas : quatre montées et six pas vers la droite mènent de O à A.

INDICE

Outil : une réciproque explicite. **Début :** à une partie X de $\mathcal{P}_4$, associe la suite de 10 pas dont le pas de rang k est H si $k \in X$. **Point délicat :** vérifie que cette suite est bien un chemin, puis les deux composées.

3. 0,5 pts

En déduire le nombre de chemins.

INDICE

Outil : le résultat « cardinal et bijection », puis le nombre de combinaisons.

4. 1 pts

Dénombrer les chemins qui passent par le point $B(2, 1)$.

INDICE

Outil : le principe multiplicatif. **Début :** découpe un tel chemin en un trajet de O à B, puis un trajet de B à A. **Point délicat :** compte les pas de chaque trajet comme en 1. et 2.

5. 0,5 pts

En déduire le nombre de chemins qui évitent le point B.

INDICE

Outil : le complémentaire dans $\mathcal{C}$.

6. 1,5 pts

Dénombrer les chemins qui passent par B ou par le point $K(4,3)$.

INDICE

Outil : le cardinal d'une réunion de deux parties qui se chevauchent. **Début :** compte les chemins par K comme en 4. **Point délicat :** un chemin qui passe par B et par K se découpe en trois trajets.

Exercice 2 5 pts

Une somme pondérée de coefficients binomiaux

1. 0,75 pts

Calculer C_8^3, C_8^4 et C_8^5. Vérifier que $C_9^4 = C_8^3 + C_8^4$.

INDICE

Outil : la formule du nombre de combinaisons, simplifiée. **Point délicat :** la symétrie évite un calcul.

2. 1 pts

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et p un entier tel que $1 \leq p \leq n$. Montrer que :

$$p\,C_n^p = n\,C_{n-1}^{p-1}.$$

INDICE

Outil : la formule $C_n^p = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$. **Début :** simplifie $\dfrac{p}{p!}$. **Point délicat :** fais apparaître $(n-1)!$ et $\big((n-1)-(p-1)\big)!$.

3. 1,25 pts

En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{p=1}^{n} p\,C_n^p = n\,2^{n-1}.$$

Contrôler pour $n = 4$.

INDICE

Outil : la question 2, puis la somme d'une ligne du triangle de Pascal. **Début :** remplace chaque terme $p\,C_n^p$. **Point délicat :** pose $q = p - 1$.

4. 1 pts

On note x un réel. Dans le développement de $(x+2)^6$, déterminer les coefficients de x^4 et de x^3.

INDICE

Outil : la formule du binôme avec $a = x$, $b = 2$, $n = 6$. **Début :** écris le terme d'indice p.

5. 1 pts

Calculer la somme de tous les coefficients de ce développement. En déduire la somme des coefficients des puissances paires de x, c'est-à-dire de x^6, x^4, x^2 et x^0.

INDICE

Outil : des valeurs particulières de x. **Début :** pour $x = 1$, chaque terme vaut son coefficient. **Point délicat :** pour $x = -1$, les puissances impaires changent de signe.

Exercice 3 5 pts

Couples de parties emboîtées

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des couples (A, B) de parties de E tels que $A \subset B$.

1. 0,75 pts

Dans cette question seulement, $E = \{u, v\}$. Écrire $\mathcal{C}$ en extension et donner son cardinal.

INDICE

Outil : range les couples selon la partie B. **Début :** pour chaque B, liste les parties A de B.

2. 1,5 pts

Revenons au cas général et posons $T = \{0, 1, 2\}$.

À un couple (A, B) de $\mathcal{C}$, on associe l'application $g_{A,B} : E \to T$ qui vaut 2 sur A, 1 sur $B \setminus A$ et 0 sur $\overline{B}$ (complémentaire dans E).

À une application $g \in \mathcal{F}(E, T)$, on associe le couple :

$$\Psi(g) = \big(g^{-1}(\{2\}),\ g^{-1}(\{1, 2\})\big).$$

Montrer que $\Psi(g)$ est bien un élément de $\mathcal{C}$, puis que $(A, B) \mapsto g_{A,B}$ et Ψ sont réciproques l'une de l'autre. En déduire que $\Phi : (A, B) \mapsto g_{A,B}$ est une bijection de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{F}(E, T)$.

INDICE

Outil : vérifier les deux composées. **Début :** pour $(A, B) \in \mathcal{C}$, que valent $g^{-1}(\{2\})$ et $g^{-1}(\{1, 2\})$ quand $g = g_{A,B}$? **Point délicat :** pour la seconde composée, raisonne élément par élément.

3. 0,5 pts

En déduire $\operatorname{card}(\mathcal{C})$ en fonction de n. Contrôler avec la question 1.

INDICE

Outil : le résultat « cardinal et bijection », puis le nombre d'applications.

4. 1,25 pts

Dénombrer autrement $\mathcal{C}$ en regroupant les couples selon le nombre k d'éléments de B. En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \, 2^k = 3^n,$$

puis retrouver cette égalité par la formule du binôme.

INDICE

Outil : des cas disjoints et le principe multiplicatif. **Début :** pour k fixé, choisis B, puis A. **Point délicat :** le nombre de choix de A ne dépend que de k.

5. 1 pts

Dans cette question, $n = 4$. Combien de couples (A, B) de $\mathcal{C}$ vérifient $B \neq E$?

INDICE

Outil : le complémentaire. **Début :** compte d'abord les couples tels que $B = E$.

Exercice 4 5 pts

Relevés croissants et relevés en pic

Une station relève, à trois moments successifs d'une journée, un niveau de pollution codé par un entier de 1 à 8. On note $F = \{1, 2, \dots, 8\}$.

Un **relevé** est le triplet (x_1, x_2, x_3) des trois niveaux, dans l'ordre des mesures : c'est un élément de F^3.

Un relevé est **croissant** si $x_1 \leq x_2 \leq x_3$, et **strictement croissant** si $x_1 < x_2 < x_3$.

1. 0,75 pts

Combien y a-t-il de relevés ? Combien de relevés ont trois niveaux deux à deux distincts ?

INDICE

Outil : le choix du modèle (ordre, répétition). **Début :** un relevé est une 3-liste d'éléments de F.

2. 1,25 pts

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des relevés strictement croissants et $\mathcal{P}_3$ l'ensemble des parties à 3 éléments de F. Montrer que l'application suivante est une bijection de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{P}_3$:

$$\varphi : (x_1, x_2, x_3) \mapsto \{x_1, x_2, x_3\}.$$

En déduire $\operatorname{card}(\mathcal{S})$.

INDICE

Outil : une réciproque explicite. **Début :** à une partie X de $\mathcal{P}_3$, associe le relevé formé de ses éléments rangés dans l'ordre croissant. **Point délicat :** vérifie les deux composées.

3. 0,5 pts

Un relevé est **strictement décroissant** si $x_1 > x_2 > x_3$. En déduire le nombre de relevés à trois niveaux deux à deux distincts qui ne sont ni strictement croissants, ni strictement décroissants.

INDICE

Outil : lire un relevé à l'envers. **Début :** que devient un relevé strictement croissant quand on écrit ses niveaux dans l'ordre inverse ? **Point délicat :** un relevé ne peut pas être à la fois strictement croissant et strictement décroissant.

4. 1,25 pts

Dénombrer les relevés croissants, en les classant selon le nombre de niveaux distincts qu'ils contiennent. Vérifier que l'on obtient C_{10}^3.

INDICE

Outil : des cas disjoints, puis le principe multiplicatif. **Début :** un relevé croissant contient un, deux ou trois niveaux distincts. **Point délicat :** avec exactement deux niveaux $a < b$, écris tous les relevés croissants possibles.

5. 1,25 pts

Un relevé est **en pic** si $x_1 < x_2$ et $x_2 > x_3$. Dénombrer les relevés en pic de deux façons :

a) en fixant la valeur k de x_2 ;

b) en distinguant les cas $x_1 = x_3$ et $x_1 \neq x_3$.

INDICE

Outil : le principe multiplicatif, puis le principe additif. **Début (a) :** pour $x_2 = k$, combien de choix pour x_1, puis pour x_3 ? **Point délicat (b) :** si $x_1 \neq x_3$, les trois niveaux sont distincts et le plus grand est x_2.

Exercice 5 5 pts

Points fixes et involutions

On note $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $\mathcal{F}(E, E)$ l'ensemble des applications de E dans E. Un **point fixe** d'une application f de E dans E est un élément x de E tel que $f(x) = x$.

1. 0,5 pts

Calculer $\mathrm{card}(\mathcal{F}(E, E))$, puis le nombre de bijections de E sur E.

INDICE

Outil : le nombre d'applications et le nombre de bijections entre deux ensembles finis.

2. 1 pts

Dénombrer les applications de E dans E sans point fixe, puis celles qui ont exactement deux points fixes.

INDICE

Outil : le principe multiplicatif. **Début :** pour chaque x, combien d'images $f(x)$ différentes de x ? **Point délicat :** pour exactement deux points fixes, choisis d'abord l'ensemble des points fixes.

3. 1 pts

Une application f de E dans E est une **involution** si $f(f(x)) = x$ pour tout $x \in E$. Soit f une involution.

Montrer que f est une bijection de E sur E.

Montrer que, si x n'est pas un point fixe de f, alors $y = f(x)$ n'est pas un point fixe et $f(y) = x$.

En déduire que f a 1, 3 ou 5 points fixes.

INDICE

Outil : une réciproque explicite. **Début :** f est sa propre réciproque. **Point délicat :** les éléments non fixes se regroupent par paires $\{x, f(x)\}$ deux à deux disjointes.

4. 1 pts

En déduire le nombre d'involutions de E.

INDICE

Outil : des cas disjoints selon le nombre de points fixes. **Début :** une involution à 3 points fixes échange deux éléments. **Point délicat :** avec un seul point fixe, regarde avec quel élément est échangé le plus petit élément non fixe.

5. 1,5 pts

On s'intéresse aux applications f de E dans E telles que $f(f(x)) = f(x)$ pour tout $x \in E$.

a) Montrer que f vérifie cette condition si et seulement si tout élément de $f(E)$ est un point fixe de f.

b) Soit A une partie de E à k éléments, avec $1 \leq k \leq 5$. Combien d'applications vérifiant la condition ont pour image $f(E) = A$?

c) En déduire le nombre d'applications de E dans E qui vérifient la condition.

INDICE

Outil : une caractérisation, puis le nombre d'applications. **Début (b) :** une telle application fixe chaque élément de A ; que reste-t-il à choisir ? **Point délicat (c) :** classe ces applications selon le cardinal de leur image, qui n'est jamais vide.