BURHAN

Dénombrement : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/denombrement/exercices/examen

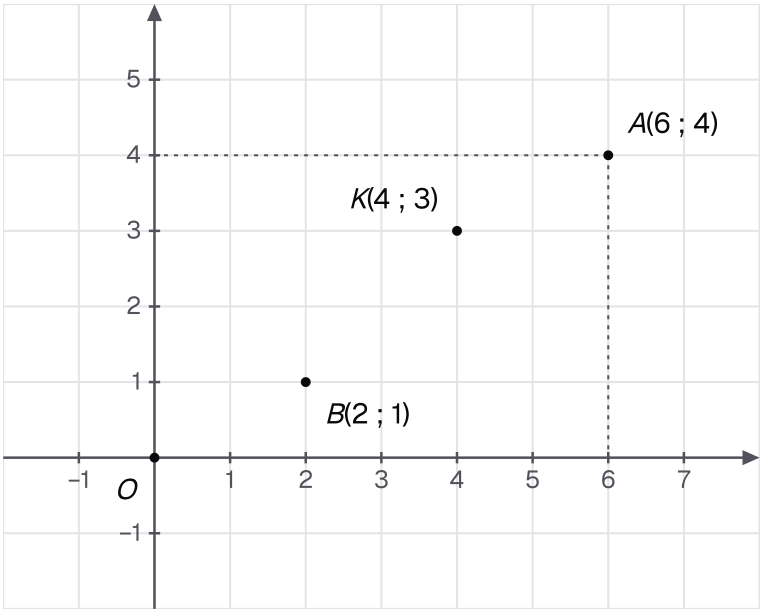
Chapitre	Palier	Exercices
Dénombrement	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Chemins sur un quadrillage

Dans un repère du plan, un pion part du point $O(0,0)$ et doit atteindre le point $A(6,4)$. À chaque pas, il avance d'une unité, soit vers la droite (pas D), soit vers le haut (pas H).

On appelle **chemin** la suite des pas qui mène de O à A. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des chemins.



Le quadrillage du pion : départ en O, arrivée en A, et les deux points B et K dont parlent les questions 4 et 6.

1. 0,5 pts

Justifier qu'un chemin compte exactement 10 pas, dont 6 pas D et 4 pas H.

INDICE

Outil : suis l'abscisse et l'ordonnée du pion. **Début :** seul un pas D modifie l'abscisse.

CORRIGÉ

Les pas D. L'abscisse du pion augmente de 1 à chaque pas D et ne change pas lors d'un pas H. Elle passe de 0 à 6 : un chemin compte exactement 6 pas D.

Les pas H. De même, l'ordonnée augmente de 1 à chaque pas H et à ce seul type de pas. Elle passe de 0 à 4 : un chemin compte exactement 4 pas H.

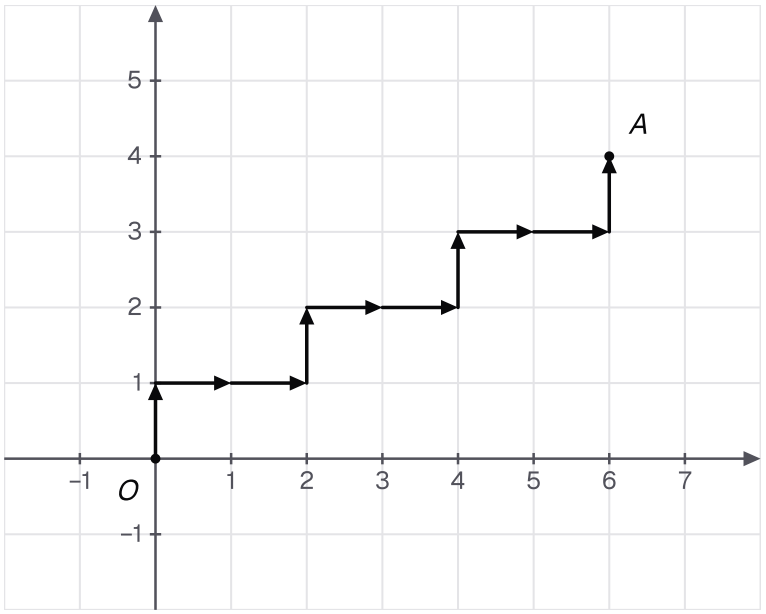
Conclusion. Un chemin compte exactement $6+4=10$ pas, dont 6 pas D et 4 pas H.

2. 1 pts

On note $\mathcal{P}_4$ l'ensemble des parties à 4 éléments de $\{1, 2, \ldots, 10\}$. À un chemin c, on associe l'ensemble $N(c)$ des rangs de ses pas H.

Par exemple, le chemin $HDDHDDHDDH$ donne $N(c) = \{1, 4, 7, 10\}$.

Montrer que N est une bijection de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{P}_4$.



Le chemin HDDHDDHDDH tracé pas à pas : quatre montées et six pas vers la droite mènent de O à A.

INDICE

Outil : une réciproque explicite. **Début :** à une partie X de $\mathcal{P}_4$, associe la suite de 10 pas dont le pas de rang k est H si $k \in X$. **Point délicat :** vérifie que cette suite est bien un chemin, puis les deux composées.

CORRIGÉ

On construit une application réciproque de N.

N arrive dans $\mathcal{P}_4$. Soit $c \in \mathcal{C}$. D'après la question 1, c a 10 pas dont 4 pas H, à des rangs distincts : $N(c)$ est une partie à 4 éléments de $\{1, 2, \ldots, 10\}$.

Une réciproque. Soit $X \in \mathcal{P}_4$. Notons $M(X)$ la suite de 10 pas dont le pas de rang k est H si $k \in X$, et D sinon. Elle compte 4 pas H et 6 pas D : partie de $O(0, 0)$, elle mène au point $(6, 4)$, c'est-à-dire en A. Donc $M(X) \in \mathcal{C}$.

Première composée. Soit $X \in \mathcal{P}_4$. Les rangs des pas H de $M(X)$ sont exactement les éléments de X, donc $N(M(X)) = X$.

Seconde composée. Soit $c \in \mathcal{C}$. Un chemin est déterminé par les rangs de ses pas H, les autres pas étant des pas D. Les chemins $M(N(c))$ et c ont les mêmes rangs de pas H, donc $M(N(c)) = c$.

Conclusion. N est une bijection de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{P}_4$, de réciproque M.

3. 0,5 pts

En déduire le nombre de chemins.

INDICE

Outil : le résultat « cardinal et bijection », puis le nombre de combinaisons.

CORRIGÉ

D'après la question 2 et le résultat « cardinal et bijection », $\mathrm{card}(\mathcal{C}) = \mathrm{card}(\mathcal{P}_4) = C_{10}^4$.

D'après le nombre de combinaisons :

$$\begin{aligned} C_{10}^4 &= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4!} \\ &= \frac{5040}{24} = 210. \end{aligned}$$

Conclusion. Il y a 210 chemins de O à A.

4. 1 pts

Dénombrer les chemins qui passent par le point $B(2, 1)$.

INDICE

Outil : le principe multiplicatif. **Début :** découpe un tel chemin en un trajet de O à B, puis un trajet de B à A. **Point délicat :** compte les pas de chaque trajet comme en 1. et 2.

CORRIGÉ

Passage en B. La somme des coordonnées du pion augmente de 1 à chaque pas. Le pion ne peut donc être en B qu'après $2 + 1 = 3$ pas. Un chemin passant par B se découpe ainsi, d'une seule façon, en un trajet de O à B suivi d'un trajet de B à A.

De O à B. Un tel trajet compte 3 pas, dont 1 pas H. Il est déterminé par le rang de son pas H : par une bijection analogue à celle de la question 2, il y a $C_3^1 = 3$ trajets.

De B à A. Un tel trajet compte 4 pas D et 3 pas H, soit 7 pas. Il est déterminé par les rangs de ses 3 pas H : de même, il y a $C_7^3 = 35$ trajets, quel que soit le premier trajet.

Conclusion. D'après le principe multiplicatif, $3 \times 35 = 105$ chemins passent par le point B.

5. 0,5 pts

En déduire le nombre de chemins qui évitent le point B.

INDICE

Outil : le complémentaire dans $\mathcal{C}$.

CORRIGÉ

Les chemins qui évitent B forment le complémentaire, dans $\mathcal{C}$, de l'ensemble des chemins passant par B.

D'après la formule du cardinal du complémentaire et les questions 3 et 4, il y en a $210 - 105 = 105$.

Conclusion. 105 chemins évitent le point B.

6. 1,5 pts

Dénombrer les chemins qui passent par B ou par le point $K(4,3)$.

INDICE

Outil : le cardinal d'une réunion de deux parties qui se chevauchent. **Début :** compte les chemins par K comme en 4. **Point délicat :** un chemin qui passe par B et par K se découpe en trois trajets.

CORRIGÉ

Notons $\mathcal{B}$ et $\mathcal{K}$ les ensembles des chemins passant par B et par K. On cherche $\mathrm{card}(\mathcal{B}\cup\mathcal{K})$, et l'on sait que $\mathrm{card}(\mathcal{B})=105$.

Chemins par K. Comme à la question 4, le pion ne peut être en K qu'après $4+3=7$ pas.

- De O à K : 7 pas dont 3 pas H. Un tel trajet est déterminé par les rangs de ses pas H : par une bijection analogue à celle de la question 2, il y a $C_7^3=35$ trajets.
- De K à A : 2 pas D et 1 pas H. De même, il y a $C_3^1=3$ trajets.

D'après le principe multiplicatif, $\mathrm{card}(\mathcal{K})=35\times 3=105$.

Chemins par B et par K. Le pion passe en B après 3 pas et en K après 7 pas. Un tel chemin se découpe en trois trajets.

- De O à B : 3 trajets.
- De B à K : 2 pas D et 2 pas H, soit $C_4^2=6$ trajets.
- De K à A : 3 trajets.

D'après le principe multiplicatif, $\mathrm{card}(\mathcal{B}\cap\mathcal{K})=3\times 6\times 3=54$.

Réunion. D'après la formule du cardinal d'une réunion :

$$\begin{aligned}&\mathrm{card}(\mathcal{B}\cup\mathcal{K})\\&=105+105-54\\&=156.\end{aligned}$$

Conclusion. 156 chemins passent par B ou par K.

Exercice 2 5 pts

Une somme pondérée de coefficients binomiaux

1. 0,75 pts

Calculer C_8^3, C_8^4 et C_8^5. Vérifier que $C_9^4 = C_8^3 + C_8^4$.

INDICE

Outil : la formule du nombre de combinaisons, simplifiée. **Point délicat :** la symétrie évite un calcul.

CORRIGÉ

Calculs. D'après le nombre de combinaisons :

$$C_8^3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3!} = 56,$$
$$C_8^4 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4!} = \frac{1680}{24} = 70.$$

Par symétrie, $C_8^5 = C_8^3 = 56$.

Relation de Pascal. D'une part :

$$C_9^4 = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4!} = \frac{3024}{24} = 126.$$

D'autre part, $C_8^3 + C_8^4 = 56 + 70 = 126$.

Conclusion. $C_8^3 = 56$, $C_8^4 = 70$ et $C_8^5 = 56$; de plus $C_9^4 = C_8^3 + C_8^4 = 126$, conformément à la relation de Pascal.

2. 1 pts

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et p un entier tel que $1 \leq p \leq n$. Montrer que :

$$p\,C_n^p = n\,C_{n-1}^{p-1}.$$

INDICE

Outil : la formule $C_n^p = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$. **Début :** simplifie $\dfrac{p}{p!}$. **Point délicat :** fais apparaître $(n-1)!$ et $\big((n-1)-(p-1)\big)!$.

CORRIGÉ

Comme $0 \leq p-1 \leq n-1$, le nombre C_{n-1}^{p-1} est défini.

Membre de gauche. D'après la formule $C_n^p = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$, et puisque $\dfrac{p}{p!} = \dfrac{1}{(p-1)!}$:

$$\begin{aligned} p\,C_n^p &= \frac{p \times n!}{p!\,(n-p)!} \\ &= \frac{n!}{(p-1)!\,(n-p)!}. \end{aligned}$$

Expression de C_{n-1}^{p-1}. Comme $(n-1)-(p-1) = n-p$, la même formule donne :

$$C_{n-1}^{p-1} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-p)!}.$$

Comparaison. Avec $n! = n \times (n-1)!$:

$$\begin{aligned} &p\,C_n^p \\ &= n \times \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-p)!} \\ &= n\,C_{n-1}^{p-1}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout entier p tel que $1 \leq p \leq n$, $p\,C_n^p = n\,C_{n-1}^{p-1}$.

3. 1,25 pts

En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{p=1}^{n} p\, C_n^p = n\, 2^{n-1}.$$

Contrôler pour $n = 4$.

INDICE

Outil : la question 2, puis la somme d'une ligne du triangle de Pascal. **Début :** remplace chaque terme $p\, C_n^p$. **Point délicat :** pose $q = p - 1$.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Transformation de chaque terme. Pour $1 \leq p \leq n$, la question 2 donne $p\, C_n^p = n\, C_{n-1}^{p-1}$. Donc :

$$\sum_{p=1}^{n} p\, C_n^p = n \sum_{p=1}^{n} C_{n-1}^{p-1}.$$

Changement d'indice. On pose $q = p - 1$: quand p va de 1 à n, q va de 0 à $n - 1$. Ainsi :

$$\sum_{p=1}^{n} C_{n-1}^{p-1} = \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^{q}.$$

Somme d'une ligne. D'après le nombre de parties d'un ensemble à $n - 1$ éléments, cette somme vaut 2^{n-1}. Donc $\sum_{p=1}^{n} p\, C_n^p = n\, 2^{n-1}$.

Contrôle pour $n = 4$. Les coefficients de la ligne 4 sont $1, 4, 6, 4, 1$:

$$\begin{aligned} &1 \times 4 + 2 \times 6 \\ &\quad + 3 \times 4 + 4 \times 1 \\ &= 32, \end{aligned}$$

et $4 \times 2^3 = 32$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{p=1}^{n} p\, C_n^p = n\, 2^{n-1}$; pour $n = 4$, les deux membres valent 32.

4. 1 pts

On note x un réel. Dans le développement de $(x + 2)^6$, déterminer les coefficients de x^4 et de x^3.

INDICE

Outil : la formule du binôme avec $a = x$, $b = 2$, $n = 6$. **Début :** écris le terme d'indice p.

CORRIGÉ

D'après la formule du binôme, avec $a = x$, $b = 2$ et $n = 6$, le terme d'indice p vaut $C_6^p\, x^{6-p}\, 2^p$, pour $0 \leq p \leq 6$.

Coefficient de x^4. On a $6 - p = 4$ pour $p = 2$. Le coefficient vaut $C_6^2 \times 2^2 = 15 \times 4 = 60$.

Coefficient de x^3. On a $6 - p = 3$ pour $p = 3$. Le coefficient vaut $C_6^3 \times 2^3 = 20 \times 8 = 160$.

Conclusion. Dans le développement de $(x + 2)^6$, le coefficient de x^4 vaut 60 et celui de x^3 vaut 160.

5. 1 pts

Calculer la somme de tous les coefficients de ce développement. En déduire la somme des coefficients des puissances paires de x, c'est-à-dire de x^6, x^4, x^2 et x^0.

INDICE

Outil : des valeurs particulières de x. **Début :** pour $x = 1$, chaque terme vaut son coefficient. **Point délicat :** pour $x = -1$, les puissances impaires changent de signe.

CORRIGÉ

Pour $0 \leq k \leq 6$, notons c_k le coefficient de x^k. Pour tout réel x, $(x+2)^6 = c_0 + c_1 x + \cdots + c_6 x^6$.

Valeur en $x = 1$. Chaque terme se réduit à son coefficient :

$$\begin{aligned} &c_0 + c_1 + \cdots + c_6 \\ &= (1+2)^6 = 729. \end{aligned}$$

Valeur en $x = -1$. On a $(-1)^k = 1$ si k est pair et $(-1)^k = -1$ sinon. Donc :

$$\begin{aligned} &(c_0 + c_2 + c_4 + c_6) \\ &\quad - (c_1 + c_3 + c_5) \\ &= (-1+2)^6 = 1. \end{aligned}$$

Puissances paires. En additionnant ces deux égalités, les coefficients d'indice impair s'éliminent :

$$\begin{aligned} &2(c_0 + c_2 + c_4 + c_6) \\ &= 729 + 1 = 730. \end{aligned}$$

Conclusion. La somme de tous les coefficients vaut 729, et celle des coefficients de x^6, x^4, x^2 et x^0 vaut 365.

Exercice 3 5 pts

Couples de parties emboîtées

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des couples (A, B) de parties de E tels que $A \subset B$.

1. 0,75 pts

Dans cette question seulement, $E = \{u, v\}$. Écrire $\mathcal{C}$ en extension et donner son cardinal.

INDICE

Outil : range les couples selon la partie B. **Début :** pour chaque B, liste les parties A de B.

CORRIGÉ

Rangeons les couples selon la partie B ; pour chaque B, la partie A parcourt les parties de B.

- $B = \varnothing$: $(\varnothing, \varnothing)$.
- $B = \{u\}$: $(\varnothing, \{u\})$ et $(\{u\}, \{u\})$.
- $B = \{v\}$: $(\varnothing, \{v\})$ et $(\{v\}, \{v\})$.
- $B = E$: $(\varnothing, E)$, $(\{u\}, E)$, $(\{v\}, E)$ et (E, E).

Ces cas sont disjoints. D'après le principe additif, $\operatorname{card}(\mathcal{C}) = 1 + 2 + 2 + 4 = 9$.

Conclusion. $\mathcal{C}$ est formé des 9 couples écrits ci-dessus, donc $\operatorname{card}(\mathcal{C}) = 9$.

2. 1,5 pts

Revenons au cas général et posons $T = \{0, 1, 2\}$.

À un couple (A, B) de $\mathcal{C}$, on associe l'application $g_{A,B} : E \to T$ qui vaut 2 sur A, 1 sur $B \setminus A$ et 0 sur $\overline{B}$ (complémentaire dans E).

À une application $g \in \mathcal{F}(E, T)$, on associe le couple :

$$\Psi(g) = \big(g^{-1}(\{2\}),\ g^{-1}(\{1, 2\})\big).$$

Montrer que $\Psi(g)$ est bien un élément de $\mathcal{C}$, puis que $(A, B) \mapsto g_{A,B}$ et Ψ sont réciproques l'une de l'autre. En déduire que $\Phi : (A, B) \mapsto g_{A,B}$ est une bijection de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{F}(E, T)$.

INDICE

Outil : vérifier les deux composées. **Début :** pour $(A, B) \in \mathcal{C}$, que valent $g^{-1}(\{2\})$ et $g^{-1}(\{1, 2\})$ quand $g = g_{A,B}$? **Point délicat :** pour la seconde composée, raisonne élément par élément.

CORRIGÉ

$g_{A,B}$ est bien définie. Soit $(A, B) \in \mathcal{C}$. Comme $A \subset B$, les parties A, $B \setminus A$ et $\overline{B}$ sont deux à deux disjointes et leur réunion est E. Chaque élément de E reçoit donc exactement une valeur.

$\Psi(g)$ est dans $\mathcal{C}$. Soit $g \in \mathcal{F}(E, T)$. Les ensembles $g^{-1}(\{2\})$ et $g^{-1}(\{1, 2\})$ sont des parties de E. Comme $\{2\} \subset \{1, 2\}$, on a $g^{-1}(\{2\}) \subset g^{-1}(\{1, 2\})$, donc $\Psi(g) \in \mathcal{C}$.

Première composée. Soit $(A, B) \in \mathcal{C}$ et $g = g_{A,B}$. L'application g prend la valeur 2 exactement sur A, et une valeur de $\{1, 2\}$ exactement sur $A \cup (B \setminus A) = B$. Donc $g^{-1}(\{2\}) = A$ et $g^{-1}(\{1, 2\}) = B$, c'est-à-dire $\Psi(\Phi(A, B)) = (A, B)$.

Seconde composée. Soit $g \in \mathcal{F}(E, T)$ et $(A, B) = \Psi(g)$. Soit $x \in E$.

- $x \in A$ équivaut à $g(x) = 2$.
- $x \in B \setminus A$ équivaut à : $g(x) \in \{1, 2\}$ et $g(x) \neq 2$, c'est-à-dire $g(x) = 1$.
- $x \notin B$ équivaut à $g(x) \notin \{1, 2\}$, c'est-à-dire $g(x) = 0$.

Ainsi $g_{A,B}(x) = g(x)$ pour tout $x \in E$, donc $\Phi(\Psi(g)) = g$.

Conclusion. $\Psi(g)$ appartient à $\mathcal{C}$, et Φ et Ψ sont réciproques l'une de l'autre : Φ est une bijection de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{F}(E, T)$, de réciproque Ψ.

3. 0,5 pts

En déduire $\mathrm{card}(\mathcal{C})$ en fonction de n. Contrôler avec la question 1.

INDICE

Outil : le résultat « cardinal et bijection », puis le nombre d'applications.

CORRIGÉ

D'après la question 2 et le résultat « cardinal et bijection », $\mathrm{card}(\mathcal{C}) = \mathrm{card}(\mathcal{F}(E, T))$.

D'après le nombre d'applications, avec $\mathrm{card}(E) = n$ et $\mathrm{card}(T) = 3$:

$$\mathrm{card}(\mathcal{C}) = 3^n.$$

Contrôle. Pour $n = 2$, on retrouve $3^2 = 9$, comme à la question 1.

Conclusion. Pour tout $n \geq 1$, $\mathrm{card}(\mathcal{C}) = 3^n$.

4. 1,25 pts

Dénombrer autrement $\mathcal{C}$ en regroupant les couples selon le nombre k d'éléments de B. En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \, 2^k = 3^n,$$

puis retrouver cette égalité par la formule du binôme.

INDICE

Outil : des cas disjoints et le principe multiplicatif. **Début :** pour k fixé, choisis B, puis A. **Point délicat :** le nombre de choix de A ne dépend que de k.

CORRIGÉ

Découpage. Pour $0 \leq k \leq n$, notons $\mathcal{C}_k$ l'ensemble des couples de $\mathcal{C}$ dont la partie B a k éléments. Ces ensembles sont deux à deux disjoints et recouvrent $\mathcal{C}$.

Cardinal de $\mathcal{C}_k$. On construit un couple de $\mathcal{C}_k$ en deux étapes.

- On choisit B, partie à k éléments de E : C_n^k choix.
- On choisit A, partie quelconque de B : 2^k choix d'après le nombre de parties, quel que soit B.

Un couple (A, B) détermine B, puis A : il provient d'une seule suite de choix. D'après le principe multiplicatif, $\operatorname{card}(\mathcal{C}_k) = C_n^k \, 2^k$.

Identité. D'après le principe additif et la question 3 :

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \, 2^k = \operatorname{card}(\mathcal{C}) = 3^n.$$

Par la formule du binôme. Avec $a = 1$ et $b = 2$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, 1^{n-k} \, 2^k &= (1+2)^n \\ &= 3^n. \end{aligned}$$

Conclusion. Le regroupement selon le cardinal de B donne $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \, 2^k = 3^n$, et la formule du binôme confirme cette égalité.

5. 1 pts

Dans cette question, $n = 4$. Combien de couples (A, B) de $\mathcal{C}$ vérifient $B \neq E$?

INDICE

Outil : le complémentaire. **Début :** compte d'abord les couples tels que $B = E$.

CORRIGÉ

Couples tels que $B = E$. Ce sont les couples (A, E) avec $A \subset E$. Il y en a autant que de parties de E :

$$\mathrm{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^4 = 16.$$

Complémentaire. D'après la question 3, $\mathrm{card}(\mathcal{C}) = 3^4 = 81$. Par le cardinal du complémentaire dans $\mathcal{C}$, il reste $3^4 - 2^4 = 81 - 16 = 65$ couples.

Conclusion. Pour $n = 4$, 65 couples (A, B) de $\mathcal{C}$ vérifient $B \neq E$.

Exercice 4 5 pts

Relevés croissants et relevés en pic

Une station relève, à trois moments successifs d'une journée, un niveau de pollution codé par un entier de 1 à 8. On note $F = \{1, 2, \ldots, 8\}$.

Un **relevé** est le triplet (x_1, x_2, x_3) des trois niveaux, dans l'ordre des mesures : c'est un élément de F^3.

Un relevé est **croissant** si $x_1 \leq x_2 \leq x_3$, et **strictement croissant** si $x_1 < x_2 < x_3$.

1. 0,75 pts

Combien y a-t-il de relevés ? Combien de relevés ont trois niveaux deux à deux distincts ?

INDICE

Outil : le choix du modèle (ordre, répétition). **Début :** un relevé est une 3-liste d'éléments de F.

CORRIGÉ

Tous les relevés. L'ordre des mesures compte et un niveau peut se répéter : un relevé est une 3-liste d'éléments de F, ensemble à 8 éléments. D'après le nombre de p-listes, il y a $8^3 = 512$ relevés.

Niveaux distincts. Un relevé à trois niveaux deux à deux distincts est un arrangement de 3 éléments de F. D'après le nombre d'arrangements, il y en a $A_8^3 = 8 \times 7 \times 6 = 336$.

Conclusion. Il y a 512 relevés, dont 336 à trois niveaux deux à deux distincts.

2. 1,25 pts

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des relevés strictement croissants et $\mathcal{P}_3$ l'ensemble des parties à 3 éléments de F. Montrer que l'application suivante est une bijection de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{P}_3$:

$$\varphi : (x_1, x_2, x_3) \mapsto \{x_1, x_2, x_3\}.$$

En déduire $\mathrm{card}(\mathcal{S})$.

INDICE

Outil : une réciproque explicite. **Début :** à une partie X de $\mathcal{P}_3$, associe le relevé formé de ses éléments rangés dans l'ordre croissant. **Point délicat :** vérifie les deux composées.

CORRIGÉ

φ arrive dans $\mathcal{P}_3$. Soit $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{S}$. Comme $x_1 < x_2 < x_3$, les trois niveaux sont distincts : $\{x_1, x_2, x_3\}$ est une partie à 3 éléments de F.

Une réciproque. Soit $X \in \mathcal{P}_3$. Ses trois éléments sont des entiers distincts ; rangés dans l'ordre croissant, ils s'écrivent $u < v < w$. Posons $\psi(X) = (u, v, w)$: c'est un relevé strictement croissant.

Première composée. Pour $X \in \mathcal{P}_3$, $\varphi(\psi(X)) = \{u, v, w\} = X$.

Seconde composée. Soit $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{S}$. Les éléments de $\{x_1, x_2, x_3\}$ rangés dans l'ordre croissant sont x_1, x_2, x_3, donc $\psi(\varphi(x_1, x_2, x_3)) = (x_1, x_2, x_3)$.

Cardinal. φ est bijective, de réciproque ψ. D'après le résultat « cardinal et bijection », $\mathrm{card}(\mathcal{S}) = \mathrm{card}(\mathcal{P}_3)$. D'après le nombre de combinaisons :

$$C_8^3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3!} = 56.$$

Conclusion. φ est une bijection de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{P}_3$, et $\mathrm{card}(\mathcal{S}) = 56$.

3. `0,5 pts`

Un relevé est **strictement décroissant** si $x_1 > x_2 > x_3$. En déduire le nombre de relevés à trois niveaux deux à deux distincts qui ne sont ni strictement croissants, ni strictement décroissants.

INDICE

Outil : lire un relevé à l'envers. **Début :** que devient un relevé strictement croissant quand on écrit ses niveaux dans l'ordre inverse ? **Point délicat :** un relevé ne peut pas être à la fois strictement croissant et strictement décroissant.

CORRIGÉ

Notons $\mathcal{D}$ l'ensemble des relevés strictement décroissants.

Cardinal de $\mathcal{D}$. L'application $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_3, x_2, x_1)$, qui lit un relevé à l'envers, envoie $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{D}$; l'application définie par la même formule envoie $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{S}$. Lire deux fois un relevé à l'envers redonne ce relevé : ces deux applications sont réciproques l'une de l'autre. D'après le résultat « cardinal et bijection », $\mathrm{card}(\mathcal{D}) = \mathrm{card}(\mathcal{S}) = 56$.

$\mathcal{S}$ et $\mathcal{D}$ sont disjoints. Un relevé de $\mathcal{S} \cap \mathcal{D}$ vérifierait à la fois $x_1 < x_2$ et $x_1 > x_2$, ce qui est impossible.

Complémentaire. $\mathcal{S}$ et $\mathcal{D}$ sont contenus dans l'ensemble des 336 relevés à niveaux deux à deux distincts, et leur réunion a 2×56 éléments d'après le principe additif. Par le cardinal du complémentaire, il reste $336 - 2 \times 56 = 336 - 112 = 224$ relevés.

Conclusion. 224 relevés à trois niveaux deux à deux distincts ne sont ni strictement croissants, ni strictement décroissants.

4. 1,25 pts

Dénombrer les relevés croissants, en les classant selon le nombre de niveaux distincts qu'ils contiennent. Vérifier que l'on obtient C_{10}^{3}.

INDICE

Outil : des cas disjoints, puis le principe multiplicatif. **Début :** un relevé croissant contient un, deux ou trois niveaux distincts. **Point délicat :** avec exactement deux niveaux $a < b$, écris tous les relevés croissants possibles.

CORRIGÉ

Notons $\mathcal{R}$ l'ensemble des relevés croissants. Pour k égal à 1, 2 ou 3, notons $\mathcal{R}_k$ l'ensemble des relevés croissants dont l'ensemble des niveaux $\{x_1, x_2, x_3\}$ a k éléments. Ces trois ensembles sont deux à deux disjoints et recouvrent $\mathcal{R}$.

Un niveau. On a $x_1 = x_2 = x_3$: le relevé est déterminé par ce niveau, donc $\operatorname{card}(\mathcal{R}_1) = 8$.

Deux niveaux. Leur ensemble est une partie $\{a, b\}$ de F, avec $a < b$: $C_8^2 = 28$ choix. Un relevé croissant qui prend exactement les niveaux a et b commence par a et finit par b : c'est (a, a, b) ou (a, b, b), soit 2 relevés, quelle que soit la partie. Un relevé de $\mathcal{R}_2$ détermine la partie, puis l'un de ces deux relevés. D'après le principe multiplicatif, $\operatorname{card}(\mathcal{R}_2) = 28 \times 2 = 56$.

Trois niveaux. Un relevé croissant à trois niveaux distincts est strictement croissant, et réciproquement : $\mathcal{R}_3 = \mathcal{S}$, de cardinal 56 d'après la question 2.

Total. D'après le principe additif, $\operatorname{card}(\mathcal{R}) = 8 + 56 + 56 = 120$. D'autre part :

$$\begin{aligned} C_{10}^{3} &= \frac{10 \times 9 \times 8}{3!} \\ &= \frac{720}{6} = 120. \end{aligned}$$

Conclusion. Il y a 120 relevés croissants, et l'on a bien $120 = C_{10}^{3}$.

5. 1,25 pts

Un relevé est **en pic** si $x_1 < x_2$ et $x_2 > x_3$. Dénombrer les relevés en pic de deux façons :

a) en fixant la valeur k de x_2 ;

b) en distinguant les cas $x_1 = x_3$ et $x_1 \neq x_3$.

INDICE

Outil : le principe multiplicatif, puis le principe additif. **Début (a) :** pour $x_2 = k$, combien de choix pour x_1, puis pour x_3 ? **Point délicat (b) :** si $x_1 \neq x_3$, les trois niveaux sont distincts et le plus grand est x_2.

CORRIGÉ

a) Selon la valeur de x_2. Soit $k \in F$; on suppose $x_2 = k$. On choisit x_1 dans $\{1, \dots, k-1\}$: $k-1$ choix. Puis on choisit x_3 dans le même ensemble : $k-1$ choix, quel que soit x_1. D'après le principe multiplicatif, il y a $(k-1)^2$ relevés en pic tels que $x_2 = k$ (aucun pour $k = 1$).

Ces huit cas sont disjoints. D'après le principe additif, le nombre de relevés en pic est :

$$\begin{aligned} &0 + 1 + 4 + 9 + 16 \\ &\quad + 25 + 36 + 49 \\ &= 140. \end{aligned}$$

b) Selon x_1 et x_3. Les deux cas $x_1 = x_3$ et $x_1 \neq x_3$ sont disjoints.

- **Cas $x_1 = x_3$.** Le relevé s'écrit (a, b, a) avec $a < b$: il est déterminé par la partie $\{a, b\}$ de F. Cela donne $C_8^2 = 28$ relevés.
- **Cas $x_1 \neq x_3$.** Les trois niveaux sont distincts et x_2 est le plus grand. On choisit la partie $\{x_1, x_2, x_3\}$: $C_8^3 = 56$ choix. Son plus grand élément est alors x_2, et l'on place les deux autres en x_1 et x_3 : 2 choix. D'après le principe multiplicatif, cela donne $56 \times 2 = 112$ relevés.

D'après le principe additif, on obtient $28 + 112 = 140$.

Conclusion. Il y a 140 relevés en pic : les deux méthodes donnent le même nombre.

Exercice 5 — 5 pts

Points fixes et involutions

On note $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $\mathcal{F}(E, E)$ l'ensemble des applications de E dans E. Un **point fixe** d'une application f de E dans E est un élément x de E tel que $f(x) = x$.

1. — 0,5 pts

Calculer $\mathrm{card}(\mathcal{F}(E, E))$, puis le nombre de bijections de E sur E.

INDICE

Outil : le nombre d'applications et le nombre de bijections entre deux ensembles finis.

CORRIGÉ

Applications. On a $\mathrm{card}(E) = 5$. D'après le nombre d'applications :

$$\mathrm{card}(\mathcal{F}(E, E)) = 5^5 = 3125.$$

Bijections. D'après le nombre de bijections entre deux ensembles de même cardinal 5, il y a $5! = 120$ bijections de E sur E.

Conclusion. $\mathrm{card}(\mathcal{F}(E, E)) = 3125$, et il y a 120 bijections de E sur E.

2. — 1 pts

Dénombrer les applications de E dans E sans point fixe, puis celles qui ont exactement deux points fixes.

INDICE

Outil : le principe multiplicatif. **Début :** pour chaque x, combien d'images $f(x)$ différentes de x ?
Point délicat : pour exactement deux points fixes, choisis d'abord l'ensemble des points fixes.

CORRIGÉ

Sans point fixe. On choisit successivement $f(1), f(2), \ldots, f(5)$, chaque $f(x)$ dans $E \setminus \{x\}$: 4 choix à chaque étape, quels que soient les choix précédents. D'après le principe multiplicatif, il y a $4^5 = 1024$ applications sans point fixe.

Exactement deux points fixes. On construit une telle application en deux étapes.

- On choisit l'ensemble A des deux points fixes : $C_5^2 = 10$ choix.
- Pour chacun des 3 éléments x de $\overline{A}$ (complémentaire dans E), on choisit $f(x)$ dans $E \setminus \{x\}$: 4 choix chaque fois.

Une telle application détermine A, puis ces trois images. D'après le principe multiplicatif, il y en a $10 \times 4^3 = 10 \times 64 = 640$.

Conclusion. 1024 applications de E dans E n'ont aucun point fixe, et 640 en ont exactement deux.

3. 1 pts

Une application f de E dans E est une **involution** si $f(f(x)) = x$ pour tout $x \in E$. Soit f une involution.

Montrer que f est une bijection de E sur E.

Montrer que, si x n'est pas un point fixe de f, alors $y = f(x)$ n'est pas un point fixe et $f(y) = x$.

En déduire que f a 1, 3 ou 5 points fixes.

INDICE

Outil : une réciproque explicite. **Début :** f est sa propre réciproque. **Point délicat :** les éléments non fixes se regroupent par paires $\{x, f(x)\}$ deux à deux disjointes.

CORRIGÉ

Bijection. Pour tout $x \in E$, $f(f(x)) = x$: l'application f admet une application réciproque, f elle-même. Donc f est une bijection de E sur E.

Éléments échangés. Soit $x \in E$ tel que $f(x) \neq x$, et posons $y = f(x)$. Alors $f(y) = f(f(x)) = x$. Comme $x \neq y$, on obtient $f(y) \neq y$: y n'est pas un point fixe, et f échange x et y.

Paires d'éléments non fixes. Soit z un élément non fixe. D'après l'étape précédente, $\{z, f(z)\}$ est formée de deux éléments non fixes distincts. Si z appartient à une paire $\{x, f(x)\}$ formée à partir d'un élément non fixe x, alors $z = x$ ou $z = f(x)$; dans le second cas, $f(z) = f(f(x)) = x$. Dans les deux cas, $\{x, f(x)\} = \{z, f(z)\}$. Chaque élément non fixe appartient donc à une seule de ces paires : elles sont deux à deux disjointes et recouvrent l'ensemble des éléments non fixes.

Nombre de points fixes. D'après le principe additif, le nombre d'éléments non fixes est le double du nombre de paires : il est pair. Comme il est au plus 5, il vaut 0, 2 ou 4.

Conclusion. L'involution f est une bijection de E sur E, elle échange deux à deux ses éléments non fixes, et elle a 5, 3 ou 1 point fixe.

4. 1 pts

En déduire le nombre d'involutions de E.

INDICE

Outil : des cas disjoints selon le nombre de points fixes. **Début :** une involution à 3 points fixes échange deux éléments. **Point délicat :** avec un seul point fixe, regarde avec quel élément est échangé le plus petit élément non fixe.

CORRIGÉ

D'après la question 3, une involution a 5, 3 ou 1 point fixe. Classons les involutions selon ce nombre ; ces trois cas sont disjoints.

Cinq points fixes. C'est l'application $x \mapsto x$: 1 involution.

Trois points fixes. D'après la question 3, f échange ses deux éléments non fixes et fixe les autres : elle est déterminée par la paire de ses éléments non fixes. Réciproquement, pour toute paire $\{a, b\}$ de E, l'application qui échange a et b et fixe les trois autres éléments est une involution à 3 points fixes. Il y en a donc autant que de paires : $C_5^2 = 10$.

Un point fixe. On construit une telle involution en deux étapes.

- On choisit le point fixe c : 5 choix.
- Les quatre autres éléments se répartissent en deux paires échangées par f. Le plus petit d'entre eux est échangé avec l'un des trois autres : 3 choix, quel que soit c. Les deux éléments restants sont alors échangés entre eux.

Ces choix déterminent une involution à un point fixe ; réciproquement, une telle involution détermine c, puis le partenaire du plus petit élément restant. D'après le principe multiplicatif, il y a $5 \times 3 = 15$ involutions à un point fixe.

Conclusion. D'après le principe additif, E possède $1 + 10 + 15 = 26$ involutions.

5. 1,5 pts

On s'intéresse aux applications f de E dans E telles que $f(f(x)) = f(x)$ pour tout $x \in E$.

a) Montrer que f vérifie cette condition si et seulement si tout élément de $f(E)$ est un point fixe de f.

b) Soit A une partie de E à k éléments, avec $1 \leq k \leq 5$. Combien d'applications vérifiant la condition ont pour image $f(E) = A$?

c) En déduire le nombre d'applications de E dans E qui vérifient la condition.

INDICE

Outil : une caractérisation, puis le nombre d'applications. **Début (b) :** une telle application fixe chaque élément de A ; que reste-t-il à choisir ? **Point délicat (c) :** classe ces applications selon le cardinal de leur image, qui n'est jamais vide.

CORRIGÉ

a) Supposons que $f(f(x)) = f(x)$ pour tout $x \in E$. Soit $y \in f(E)$: il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, et alors $f(y) = f(f(x)) = f(x) = y$. Donc y est un point fixe de f.

Réciproquement, supposons que tout élément de $f(E)$ soit un point fixe. Soit $x \in E$: comme $f(x) \in f(E)$, on a $f(f(x)) = f(x)$.

Ainsi f vérifie la condition si et seulement si tout élément de $f(E)$ est un point fixe de f.

b) Soit f une application vérifiant la condition, d'image A. D'après a), f fixe chaque élément de A, et elle envoie chaque élément de $\overline{A}$ (complémentaire dans E) dans A. Elle est donc déterminée par l'application g de $\overline{A}$ dans A formée par ces images.

Réciproquement, soit g une application de $\overline{A}$ dans A. Posons $f(x) = x$ si $x \in A$, et $f(x) = g(x)$ sinon. Chaque élément de A est sa propre image et les autres images sont dans A : $f(E) = A$. Tout élément de $f(E)$ est fixe, donc f vérifie la condition d'après a).

Ces applications sont ainsi en bijection avec $\mathcal{F}(\overline{A}, A)$. Si $k \leq 4$, d'après le nombre d'applications, il y en a k^{5-k}. Si $k = 5$, seule l'application $x \mapsto x$ convient, et $5^0 = 1$: la formule k^{5-k} reste valable.

c) L'image $f(E)$ n'est pas vide. Classons les applications selon le cardinal k de leur image, de 1 à 5 : ces cas sont disjoints. Pour k fixé, il y a C_5^k parties A à k éléments, et k^{5-k} applications pour chacune. D'après le principe additif, le nombre cherché est :

$$\begin{aligned} &C_5^1 \times 1^4 + C_5^2 \times 2^3 \\ &\quad + C_5^3 \times 3^2 + C_5^4 \times 4^1 \\ &\quad + C_5^5 \times 5^0 \\ &= 5 + 80 + 90 + 20 + 1 \\ &= 196. \end{aligned}$$

Conclusion. 196 applications de E dans E vérifient $f(f(x)) = f(x)$ pour tout $x \in E$.