BURHAN

Dénombrement : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/denombrement/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Dénombrement	Entraînement	8

Exercice 1

Les grilles de réponses d'un QCM

Un questionnaire compte 6 questions. Pour chacune, 4 réponses sont proposées, dont une seule est juste. Un élève coche exactement une réponse par question.

On appelle **grille** la liste de ses 6 réponses, dans l'ordre des questions.

1.

Combien de grilles différentes l'élève peut-il remplir ?

INDICE

Outil : l'ordre des questions compte, et une même lettre de réponse peut revenir. Quel modèle ?

2.

Combien de grilles ne comportent aucune réponse juste ? En déduire le nombre de grilles qui comportent au moins une réponse juste.

INDICE

Outil : pour chaque question, combien de réponses fausses ? Puis le complémentaire dans l'ensemble des grilles.

3.

Combien de grilles comportent exactement deux réponses justes ?

INDICE

Outil : une grille ayant exactement deux réponses justes est déterminée par deux choses. Lesquelles ? Combien de possibilités pour chacune ?

4.

Combien de grilles comportent au moins cinq réponses justes ?

INDICE

Outil : sépare deux cas disjoints : exactement cinq, exactement six.

Exercice 2

Des mains de trois cartes

Un jeu de 32 cartes comporte 4 couleurs (pique, cœur, carreau, trèfle). Chaque couleur a 8 cartes, de valeurs 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi et as.

On tire simultanément 3 cartes du jeu : on obtient une **main**.

1.

Combien de mains différentes peut-on obtenir ?

INDICE

Outil : dans un tirage simultané, l'ordre ne compte pas.

2.

Combien de mains contiennent exactement un as ?

INDICE

Outil : une main contenant exactement un as est déterminée par deux choses. Lesquelles ? Combien de possibilités pour chacune ?

3.

Combien de mains contiennent au moins deux as ?

INDICE

Outil : deux cas disjoints, exactement deux as ou exactement trois as.

4.

Combien de mains sont formées de trois cartes de la même couleur ?

INDICE

Outil : sépare les mains selon leur couleur commune.

Exercice 3

Jetons colorés tirés un par un

Une boîte contient 12 jetons : 5 rouges, 4 verts et 3 bleus. Tous les jetons sont distincts.

On en tire trois, l'un après l'autre, sans remettre un jeton tiré. Un tirage est le triplet (premier jeton, deuxième jeton, troisième jeton).

1.

Combien de tirages sont possibles ?

INDICE

Outil : l'ordre compte et un jeton ne peut pas sortir deux fois.

2.

Combien de tirages donnent trois jetons de la même couleur ?

INDICE

Outil : trois cas disjoints, un par couleur.

3.

Combien de tirages donnent trois jetons de couleurs deux à deux différentes ?

INDICE

Outil : choisis d'abord l'ordre d'apparition des trois couleurs, puis un jeton de chaque couleur.

4.

Combien de tirages ont un premier jeton rouge et deux jetons suivants qui ne sont pas rouges ?

INDICE

Outil : combien de jetons non rouges ? Le deuxième et le troisième jeton forment un arrangement.

Exercice 4

Mots de quatre lettres sur un alphabet de six lettres

On utilise l'alphabet $L = \{d, e, f, g, h, i\}$, dont les voyelles sont e et i.

Un **mot** de quatre lettres est une suite de quatre lettres de L, avec ou sans signification, par exemple dige ou hhee.

1.

Combien de mots de quatre lettres peut-on écrire ? Combien d'entre eux ont quatre lettres deux à deux distinctes ?

INDICE

Outil : p-listes d'une part, arrangements d'autre part.

2.

Combien de mots contiennent exactement deux voyelles (éventuellement la même lettre deux fois) ?

INDICE

Outil : un mot ayant exactement deux voyelles est déterminé par plusieurs choix successifs. Lesquels ? Combien de possibilités pour chacun ?

3.

Combien de mots à lettres deux à deux distinctes commencent et finissent par une consonne ?

INDICE

Outil : remplis d'abord les places soumises à une condition.

Exercice 5

Former une équipe de volley

Un club de volley compte 7 filles et 5 garçons. L'entraîneur forme une équipe de 6 joueurs, sans attribuer de poste.

1.

Combien d'équipes différentes l'entraîneur peut-il former ?

INDICE

Outil : une équipe sans poste est une partie de l'ensemble des joueurs.

2.

Combien d'équipes comptent trois filles et trois garçons ?

INDICE

Outil : une équipe de trois filles et trois garçons est déterminée par deux choses. Lesquelles ? Combien de possibilités pour chacune ?

3.

Combien d'équipes comptent au moins un garçon ?

INDICE

Outil : le contraire de « au moins un garçon » est « aucun garçon ».

4.

Nadia propose une autre méthode pour la question 3 : choisir d'abord un garçon, puis les cinq autres joueurs parmi les onze restants. Elle obtient $5 \times C_{11}^{5}$. Calculer ce nombre et expliquer l'erreur.

INDICE

Outil : une équipe qui compte deux garçons, combien de fois Nadia la compte-t-elle ?

Exercice 6

Des coefficients dans le développement d'une puissance septième

On note x un nombre réel et l'on considère le développement de $(2x-1)^7$.

1.

Écrire le terme d'indice p du développement, pour $0 \leq p \leq 7$.

INDICE

Outil : la formule du binôme avec $a = 2x$, $b = -1$ et $n = 7$.

2.

Déterminer le coefficient de x^3, puis celui de x^6.

INDICE

Outil : cherche la valeur de p pour laquelle $7 - p$ est l'exposant voulu.

3.

Quel est le terme constant du développement ? Quelle est la somme de tous ses coefficients ?

INDICE

Outil : le terme constant correspond à x^0 ; pour la somme des coefficients, donne une valeur bien choisie à x.

Exercice 7

Identités sur les coefficients binomiaux et parties de cardinal pair

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1.

Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$:

$$C_n^2 + C_{n+1}^2 = n^2.$$

Vérifier l'égalité pour $n = 5$.

INDICE

Outil : $C_m^2 = \dfrac{m(m-1)}{2}$ pour $m \geq 2$, puis factorise par n.

2.

Montrer que :

$$\sum_{p=0}^{n} (-1)^p C_n^p = 0.$$

INDICE

Outil : la formule du binôme, avec des valeurs de a et b bien choisies.

3.

On note S_0 la somme des C_n^p pour p pair, et S_1 leur somme pour p impair ($0 \leq p \leq n$). Montrer que $S_0 = S_1 = 2^{n-1}$.

INDICE

Outil : écris $S_0 + S_1$ et $S_0 - S_1$ à l'aide de résultats connus.

4.

En déduire le nombre de parties de cardinal pair d'un ensemble à 7 éléments. Vérifier en calculant les coefficients utiles.

INDICE

Outil : les parties à p éléments d'un ensemble à n éléments sont au nombre de C_n^p.

Exercice 8

Applications sous contrainte, parties contenant deux éléments donnés

On pose $E = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ et $F = \{0, 1, 2\}$.

1.

Combien y a-t-il d'applications de E dans F ? Combien d'entre elles ne prennent jamais la valeur 0 ?

INDICE

Outil : le nombre d'applications. Une application qui ne prend jamais la valeur 0 arrive en fait dans $\{1, 2\}$.

2.

Combien d'applications de E dans $\{0, 1\}$ sont surjectives ?

INDICE

Outil : compte celles qui ne sont pas surjectives et utilise le complémentaire.

3.

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de E qui contiennent 1 et 3, et $E' = \{5, 7, 9\}$. Montrer que l'application suivante est bijective :

$$\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(E'), \quad A \mapsto A \setminus \{1, 3\}.$$

En déduire $\operatorname{card}(\mathcal{A})$.

INDICE

Outil : propose une réciproque, puis vérifie les deux composées. Vérifie aussi que chaque application arrive dans le bon ensemble.