BURHAN

Dénombrement : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/denombrement/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Dénombrement	Entraînement	8

Exercice 1

Les grilles de réponses d'un QCM

Un questionnaire compte 6 questions. Pour chacune, 4 réponses sont proposées, dont une seule est juste. Un élève coche exactement une réponse par question.

On appelle **grille** la liste de ses 6 réponses, dans l'ordre des questions.

1.

Combien de grilles différentes l'élève peut-il remplir ?

INDICE

Outil : l'ordre des questions compte, et une même lettre de réponse peut revenir. Quel modèle ?

CORRIGÉ

Désignons par A, B, C, D les quatre réponses proposées à chaque question. L'ordre des questions compte et une même lettre peut revenir : une grille est une 6-liste d'éléments de l'ensemble $\{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}\}$, de cardinal 4.

D'après le nombre de p-listes, il y a $4^6 = 4096$ grilles.

Conclusion. L'élève peut remplir 4096 grilles différentes.

2.

Combien de grilles ne comportent aucune réponse juste ? En déduire le nombre de grilles qui comportent au moins une réponse juste.

INDICE

Outil : pour chaque question, combien de réponses fausses ? Puis le complémentaire dans l'ensemble des grilles.

CORRIGÉ

Aucune réponse juste. Pour chaque question, l'élève coche l'une des 3 réponses fausses. D'après le principe multiplicatif, il y a $3^6 = 729$ telles grilles.

Au moins une réponse juste. Ces grilles forment le complémentaire de l'ensemble précédent dans l'ensemble des 4096 grilles. D'après la formule du cardinal du complémentaire, il y en a $4096 - 729 = 3367$.

Conclusion. 729 grilles ne comportent aucune réponse juste, et 3367 en comportent au moins une.

3.

Combien de grilles comportent exactement deux réponses justes ?

INDICE

Outil : une grille ayant exactement deux réponses justes est déterminée par deux choses. Lesquelles ? Combien de possibilités pour chacune ?

CORRIGÉ

On construit une telle grille en deux étapes.

- **Les questions réussies.** On choisit les 2 questions réussies, sans ordre : $C_6^2 = 15$ parties.
- **Les autres questions.** Pour chacune des 4 autres questions, on coche une réponse fausse : $3^4 = 81$ possibilités, quel que soit le premier choix.

Une grille donnée détermine l'ensemble de ses questions réussies, puis ses réponses fausses : elle provient d'une seule suite de choix. D'après le principe multiplicatif, il y a $15 \times 81 = 1215$ grilles.

Conclusion. 1215 grilles comportent exactement deux réponses justes.

4.

Combien de grilles comportent au moins cinq réponses justes ?

INDICE

Outil : sépare deux cas disjoints : exactement cinq, exactement six.

CORRIGÉ

Une grille qui compte au moins cinq réponses justes en compte exactement cinq ou exactement six ; ces deux cas sont disjoints.

Exactement six. Toutes les réponses sont justes : 1 grille.

Exactement cinq. On choisit la question manquée (6 possibilités), puis l'une de ses 3 réponses fausses. D'après le principe multiplicatif, il y a $6 \times 3 = 18$ grilles.

Conclusion. D'après le principe additif, $18 + 1 = 19$ grilles comportent au moins cinq réponses justes.

Exercice 2

Des mains de trois cartes

Un jeu de 32 cartes comporte 4 couleurs (pique, cœur, carreau, trèfle). Chaque couleur a 8 cartes, de valeurs 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi et as.

On tire simultanément 3 cartes du jeu : on obtient une **main**.

1.

Combien de mains différentes peut-on obtenir ?

INDICE

Outil : dans un tirage simultané, l'ordre ne compte pas.

CORRIGÉ

Dans un tirage simultané, l'ordre ne compte pas : une main est une partie à 3 éléments de l'ensemble des 32 cartes.

D'après le nombre de combinaisons :

$$\begin{aligned} C_{32}^{3} &= \frac{32 \times 31 \times 30}{3!} \\ &= \frac{29\,760}{6} = 4960. \end{aligned}$$

Conclusion. On peut obtenir 4960 mains différentes.

2.

Combien de mains contiennent exactement un as ?

INDICE

Outil : une main contenant exactement un as est déterminée par deux choses. Lesquelles ? Combien de possibilités pour chacune ?

CORRIGÉ

Le jeu compte 4 as et 28 autres cartes. On construit une main contenant exactement un as en deux étapes.

- **L'as :** $C_{4}^{1} = 4$ choix.
- **Les deux autres cartes**, parmi les 28 qui ne sont pas des as : $C_{28}^{2} = 378$ choix, quel que soit l'as.

Une telle main détermine son as et ses deux autres cartes. D'après le principe multiplicatif, il y a $4 \times 378 = 1512$ mains.

Conclusion. 1512 mains contiennent exactement un as.

3.

Combien de mains contiennent au moins deux as ?

INDICE

Outil : deux cas disjoints, exactement deux as ou exactement trois as.

CORRIGÉ

Une main qui contient au moins deux as en contient exactement deux ou exactement trois ; ces deux cas sont disjoints.

Exactement deux as. On choisit les deux as ($C_4^2 = 6$ choix), puis la troisième carte parmi les 28 autres ($C_{28}^1 = 28$ choix). Une telle main détermine ses as et sa troisième carte : d'après le principe multiplicatif, il y a $6 \times 28 = 168$ mains.

Exactement trois as. Ce sont les parties à 3 éléments de l'ensemble des 4 as : $C_4^3 = 4$ mains.

Conclusion. D'après le principe additif, $168 + 4 = 172$ mains contiennent au moins deux as.

4.

Combien de mains sont formées de trois cartes de la même couleur ?

INDICE

Outil : sépare les mains selon leur couleur commune.

CORRIGÉ

Une couleur fixée. Les mains formées de trois cartes de cette couleur sont les parties à 3 éléments de ses 8 cartes : il y en a $C_8^3 = 56$.

Les quatre couleurs. Une main unicolore n'a qu'une couleur : les quatre ensembles de mains correspondants sont deux à deux disjoints. D'après le principe additif, il y a $4 \times 56 = 224$ mains unicolores.

Conclusion. 224 mains sont formées de trois cartes de la même couleur.

Exercice 3

Jetons colorés tirés un par un

Une boîte contient 12 jetons : 5 rouges, 4 verts et 3 bleus. Tous les jetons sont distincts.

On en tire trois, l'un après l'autre, sans remettre un jeton tiré. Un tirage est le triplet (premier jeton, deuxième jeton, troisième jeton).

1.

Combien de tirages sont possibles ?

INDICE

Outil : l'ordre compte et un jeton ne peut pas sortir deux fois.

CORRIGÉ

L'ordre compte et un jeton ne peut pas sortir deux fois : un tirage est un arrangement de 3 jetons parmi 12.

D'après le nombre d'arrangements :

$$A_{12}^{3} = 12 \times 11 \times 10 = 1320.$$

Conclusion. 1320 tirages sont possibles.

2.

Combien de tirages donnent trois jetons de la même couleur ?

INDICE

Outil : trois cas disjoints, un par couleur.

CORRIGÉ

On sépare trois cas disjoints, selon la couleur commune des trois jetons.

- **Rouges :** arrangements de 3 jetons parmi les 5 rouges, soit $A_{5}^{3} = 60$.
- **Verts :** $A_{4}^{3} = 24$.
- **Bleus :** $A_{3}^{3} = 3! = 6$.

D'après le principe additif, il y a $60 + 24 + 6 = 90$ tirages.

Conclusion. 90 tirages donnent trois jetons de la même couleur.

3.

Combien de tirages donnent trois jetons de couleurs deux à deux différentes ?

INDICE

Outil : choisis d'abord l'ordre d'apparition des trois couleurs, puis un jeton de chaque couleur.

CORRIGÉ

Les trois jetons sont alors un rouge, un vert et un bleu. On construit un tel tirage en deux étapes.

- **L'ordre des couleurs.** L'ordre d'apparition du rouge, du vert et du bleu : $3! = 6$ permutations.
- **Les jetons.** Un jeton de chaque couleur, à la place de sa couleur : $5 \times 4 \times 3 = 60$ possibilités, quel que soit cet ordre.

Un tirage détermine l'ordre de ses couleurs, puis ses jetons. D'après le principe multiplicatif, il y a $6 \times 60 = 360$ tirages.

Conclusion. 360 tirages donnent trois jetons de couleurs deux à deux différentes.

4.

Combien de tirages ont un premier jeton rouge et deux jetons suivants qui ne sont pas rouges ?

INDICE

Outil : combien de jetons non rouges ? Le deuxième et le troisième jeton forment un arrangement.

CORRIGÉ

On construit un tel tirage en deux étapes.

- **Premier jeton :** un des 5 jetons rouges.
- **Deuxième et troisième jetons :** un arrangement de 2 jetons parmi les 7 jetons verts ou bleus, soit $A_7^2 = 42$ possibilités, quel que soit le premier jeton.

D'après le principe multiplicatif, il y a $5 \times 42 = 210$ tirages.

Conclusion. 210 tirages ont un premier jeton rouge suivi de deux jetons qui ne sont pas rouges.

Exercice 4

Mots de quatre lettres sur un alphabet de six lettres

On utilise l'alphabet $L = \{d, e, f, g, h, i\}$, dont les voyelles sont e et i.

Un **mot** de quatre lettres est une suite de quatre lettres de L, avec ou sans signification, par exemple dige ou hhee.

1.

Combien de mots de quatre lettres peut-on écrire ? Combien d'entre eux ont quatre lettres deux à deux distinctes ?

INDICE

Outil : p-listes d'une part, arrangements d'autre part.

CORRIGÉ

Tous les mots. Un mot est une 4-liste d'éléments de L, et $\mathrm{card}(L) = 6$. D'après le nombre de p-listes, il y a $6^4 = 1296$ mots.

Lettres distinctes. Un mot à lettres deux à deux distinctes est un arrangement de 4 lettres parmi 6. D'après le nombre d'arrangements :

$$A_6^4 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360.$$

Conclusion. On peut écrire 1296 mots de quatre lettres, dont 360 à lettres deux à deux distinctes.

2.

Combien de mots contiennent exactement deux voyelles (éventuellement la même lettre deux fois) ?

INDICE

Outil : un mot ayant exactement deux voyelles est déterminé par plusieurs choix successifs. Lesquels ? Combien de possibilités pour chacun ?

CORRIGÉ

On construit un tel mot en trois étapes.

- **Places des voyelles.** Les deux places occupées par des voyelles, sans ordre : $C_4^2 = 6$ choix.
- **Voyelles.** Une voyelle à chacune de ces places : $2^2 = 4$ choix.
- **Consonnes.** Une des 4 consonnes à chacune des deux autres places : $4^2 = 16$ choix.

Ces nombres ne dépendent pas des choix précédents, et un mot donné détermine les places de ses voyelles. D'après le principe multiplicatif, il y a $6 \times 4 \times 16 = 384$ mots.

Conclusion. 384 mots contiennent exactement deux voyelles.

3.

Combien de mots à lettres deux à deux distinctes commencent et finissent par une consonne ?

INDICE

Outil : remplis d'abord les places soumises à une condition.

CORRIGÉ

On remplit d'abord les places soumises à une condition : la première, la dernière, puis la deuxième et la troisième.

- **Première lettre :** une des 4 consonnes.
- **Dernière lettre :** une des 3 consonnes restantes.
- **Deuxième lettre :** une des 4 lettres non encore utilisées.
- **Troisième lettre :** une des 3 lettres restantes.

À chaque étape, le nombre de possibilités ne dépend pas des choix précédents. D'après le principe multiplicatif, il y a $4 \times 3 \times 4 \times 3 = 144$ mots.

Conclusion. 144 mots à lettres deux à deux distinctes commencent et finissent par une consonne.

Exercice 5

Former une équipe de volley

Un club de volley compte 7 filles et 5 garçons. L'entraîneur forme une équipe de 6 joueurs, sans attribuer de poste.

1.

Combien d'équipes différentes l'entraîneur peut-il former ?

INDICE

Outil : une équipe sans poste est une partie de l'ensemble des joueurs.

CORRIGÉ

Une équipe sans poste est une partie à 6 éléments de l'ensemble des 12 joueurs. D'après le nombre de combinaisons, il y en a C_{12}^{6}.

Le numérateur. Dans la formule simplifiée de C_{12}^{6}, le numérateur est le produit des six entiers de 7 à 12 :

$$\begin{aligned} &12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \\ &= 665\,280. \end{aligned}$$

Le calcul. Le dénominateur est $6! = 720$, donc :

$$C_{12}^{6} = \frac{665\,280}{720} = 924.$$

Conclusion. L'entraîneur peut former 924 équipes différentes.

2.

Combien d'équipes comptent trois filles et trois garçons ?

INDICE

Outil : une équipe de trois filles et trois garçons est déterminée par deux choses. Lesquelles ? Combien de possibilités pour chacune ?

CORRIGÉ

On construit une telle équipe en deux étapes.

- **Les filles :** 3 parmi 7, soit $C_{7}^{3} = 35$ choix.
- **Les garçons :** 3 parmi 5, soit $C_{5}^{3} = 10$ choix, quelles que soient les filles.

D'après le principe multiplicatif, il y a $35 \times 10 = 350$ équipes.

Conclusion. 350 équipes comptent trois filles et trois garçons.

3.

Combien d'équipes comptent au moins un garçon ?

INDICE

Outil : le contraire de « au moins un garçon » est « aucun garçon ».

CORRIGÉ

Le contraire de « au moins un garçon » est « aucun garçon ».

Équipes sans garçon. Ce sont les parties à 6 éléments de l'ensemble des 7 filles. Par symétrie, $C_7^6 = C_7^1 = 7$.

Au moins un garçon. Par le cardinal du complémentaire dans l'ensemble des 924 équipes, il y en a $924 - 7 = 917$.

Conclusion. 917 équipes comptent au moins un garçon.

4.

Nadia propose une autre méthode pour la question 3 : choisir d'abord un garçon, puis les cinq autres joueurs parmi les onze restants. Elle obtient $5 \times C_{11}^5$. Calculer ce nombre et expliquer l'erreur.

INDICE

Outil : une équipe qui compte deux garçons, combien de fois Nadia la compte-t-elle ?

CORRIGÉ

Le calcul. On a $C_{11}^5 = 462$, donc Nadia obtient $5 \times 462 = 2310$. C'est bien plus que 917.

L'erreur. Le principe multiplicatif exige que chaque équipe provienne d'une seule suite de choix. Ce n'est pas le cas ici : une équipe qui compte deux garçons est obtenue deux fois, selon le garçon choisi en premier. Plus généralement, une équipe à k garçons est comptée k fois.

Contrôle. Pour $1 \leq k \leq 5$, il y a $C_5^k \times C_7^{6-k}$ équipes à k garçons, soit 105, 350, 350, 105 et 7. Leur somme vaut 917. En comptant chacune k fois :

$$\begin{aligned} &105 + 2 \times 350 + 3 \times 350 \\ &\quad + 4 \times 105 + 5 \times 7 \\ &= 2310. \end{aligned}$$

Conclusion. Nadia trouve 2310 ; ce nombre est faux, car sa méthode compte plusieurs fois chaque équipe qui a au moins deux garçons.

Exercice 6

Des coefficients dans le développement d'une puissance septième

On note x un nombre réel et l'on considère le développement de $(2x-1)^7$.

1.

Écrire le terme d'indice p du développement, pour $0 \leq p \leq 7$.

INDICE

Outil : la formule du binôme avec $a = 2x$, $b = -1$ et $n = 7$.

CORRIGÉ

D'après la formule du binôme, avec $a = 2x$, $b = -1$ et $n = 7$, le terme d'indice p s'écrit $C_7^p (2x)^{7-p} (-1)^p$.

Comme $(2x)^{7-p} = 2^{7-p}\, x^{7-p}$, ce terme vaut, pour $0 \leq p \leq 7$:

$$(-1)^p \, C_7^p \, 2^{7-p} \, x^{7-p}.$$

Conclusion. Le terme d'indice p du développement est $(-1)^p \, C_7^p \, 2^{7-p} \, x^{7-p}$.

2.

Déterminer le coefficient de x^3, puis celui de x^6.

INDICE

Outil : cherche la valeur de p pour laquelle $7 - p$ est l'exposant voulu.

CORRIGÉ

Le terme d'indice p contient x^{7-p} : on cherche p tel que $7 - p$ soit l'exposant voulu.

Coefficient de x^3. On a $7 - p = 3$ pour $p = 4$. Le coefficient vaut :

$$(-1)^4 C_7^4 \, 2^3 = 35 \times 8 = 280.$$

Coefficient de x^6. On a $7 - p = 6$ pour $p = 1$. Le coefficient vaut :

$$\begin{aligned} &(-1)^1 C_7^1 \, 2^6 \\ &= -7 \times 64 = -448. \end{aligned}$$

Conclusion. Le coefficient de x^3 vaut 280 et celui de x^6 vaut -448.

3.

Quel est le terme constant du développement ? Quelle est la somme de tous ses coefficients ?

INDICE

Outil : le terme constant correspond à x^0 ; pour la somme des coefficients, donne une valeur bien choisie à x.

CORRIGÉ

Terme constant. Il correspond à x^0, donc à $7-p=0$, c'est-à-dire $p=7$. Il vaut $(-1)^7 C_7^7 = -1$.

Somme des coefficients. Pour $x=1$, chaque terme du développement se réduit à son coefficient. La somme des coefficients vaut donc :

$$(2\times 1-1)^7 = 1^7 = 1.$$

Conclusion. Le terme constant vaut -1, et la somme de tous les coefficients vaut 1.

Exercice 7

Identités sur les coefficients binomiaux et parties de cardinal pair

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1.

Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$:

$$C_n^2 + C_{n+1}^2 = n^2.$$

Vérifier l'égalité pour $n = 5$.

INDICE

Outil : $C_m^2 = \dfrac{m(m-1)}{2}$ pour $m \geq 2$, puis factorise par n.

CORRIGÉ

Soit n un entier tel que $n \geq 2$. D'après la formule du nombre de combinaisons, $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ et $C_{n+1}^2 = \dfrac{(n+1)n}{2}$.

En factorisant par n :

$$\begin{aligned} & C_n^2 + C_{n+1}^2 \\ &= \frac{n\big((n-1)+(n+1)\big)}{2} \\ &= \frac{n \times 2n}{2} = n^2. \end{aligned}$$

Vérification pour $n = 5$. $C_5^2 + C_6^2 = 10 + 15 = 25$, et $5^2 = 25$.

Conclusion. Pour tout entier $n \geq 2$, $C_n^2 + C_{n+1}^2 = n^2$; l'égalité se vérifie pour $n = 5$.

2.

Montrer que :

$$\sum_{p=0}^{n} (-1)^p C_n^p = 0.$$

INDICE

Outil : la formule du binôme, avec des valeurs de a et b bien choisies.

CORRIGÉ

D'après la formule du binôme, avec $a = 1$ et $b = -1$:

$$\begin{aligned} & \sum_{p=0}^{n} C_n^p \, 1^{n-p} (-1)^p \\ &= (1-1)^n = 0^n = 0, \end{aligned}$$

car $n \geq 1$. Comme $1^{n-p} = 1$, chaque terme de la somme vaut $(-1)^p C_n^p$.

Conclusion. $\sum_{p=0}^{n} (-1)^p C_n^p = 0$.

3.

On note S_0 la somme des C_n^p pour p pair, et S_1 leur somme pour p impair ($0 \leq p \leq n$). Montrer que $S_0 = S_1 = 2^{n-1}$.

INDICE

Outil : écris $S_0 + S_1$ et $S_0 - S_1$ à l'aide de résultats connus.

CORRIGÉ

Somme. D'après le nombre de parties d'un ensemble à n éléments :

$$S_0 + S_1 = \sum_{p=0}^{n} C_n^p = 2^n.$$

Différence. Dans la somme de la question 2, les termes d'indice pair portent le signe $+$ et ceux d'indice impair le signe $-$. Donc $S_0 - S_1 = 0$.

Conclusion. On a $S_0 = S_1$, puis $2S_0 = 2^n$. Ainsi $S_0 = S_1 = 2^{n-1}$.

4.

En déduire le nombre de parties de cardinal pair d'un ensemble à 7 éléments. Vérifier en calculant les coefficients utiles.

INDICE

Outil : les parties à p éléments d'un ensemble à n éléments sont au nombre de C_n^p.

CORRIGÉ

Soit G un ensemble à 7 éléments. Ses parties de cardinal pair ont 0, 2, 4 ou 6 éléments ; ces quatre cas sont disjoints, et il y a C_7^p parties à p éléments.

D'après le principe additif, le nombre de parties de cardinal pair est la somme S_0 pour $n = 7$. D'après la question 3, il vaut $2^6 = 64$.

Vérification. On calcule les coefficients utiles :

$$\begin{aligned} &C_7^0 + C_7^2 + C_7^4 + C_7^6 \\ &= 1 + 21 + 35 + 7 = 64. \end{aligned}$$

Conclusion. Un ensemble à 7 éléments a 64 parties de cardinal pair.

Exercice 8

Applications sous contrainte, parties contenant deux éléments donnés

On pose $E = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ et $F = \{0, 1, 2\}$.

1.

Combien y a-t-il d'applications de E dans F ? Combien d'entre elles ne prennent jamais la valeur 0 ?

INDICE

Outil : le nombre d'applications. Une application qui ne prend jamais la valeur 0 arrive en fait dans $\{1, 2\}$.

CORRIGÉ

Toutes les applications. On a $\mathrm{card}(E) = 5$ et $\mathrm{card}(F) = 3$. D'après le nombre d'applications :

$$\mathrm{card}(\mathcal{F}(E, F)) = 3^5 = 243.$$

Celles qui évitent 0. Une application de E dans F qui ne prend jamais la valeur 0 envoie chaque élément de E dans $\{1, 2\}$. Réciproquement, une application de E dans $\{1, 2\}$ est une application de E dans F qui ne prend jamais la valeur 0. Il y en a donc :

$$\mathrm{card}(\mathcal{F}(E, \{1, 2\})) = 2^5 = 32.$$

Conclusion. Il y a 243 applications de E dans F, dont 32 ne prennent jamais la valeur 0.

2.

Combien d'applications de E dans $\{0, 1\}$ sont surjectives ?

INDICE

Outil : compte celles qui ne sont pas surjectives et utilise le complémentaire.

CORRIGÉ

Il y a $2^5 = 32$ applications de E dans $\{0, 1\}$.

Les applications non surjectives. L'image d'une telle application n'est pas vide, car $E \neq \varnothing$. L'application n'est pas surjective si et seulement si son image est $\{0\}$ ou $\{1\}$, c'est-à-dire si elle est constante. Il y a deux applications constantes.

Conclusion. Par le cardinal du complémentaire, $32 - 2 = 30$ applications de E dans $\{0, 1\}$ sont surjectives.

3.

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de E qui contiennent 1 et 3, et $E' = \{5, 7, 9\}$. Montrer que l'application suivante est bijective :

$$\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(E'), \quad A \mapsto A \setminus \{1, 3\}.$$

En déduire $\mathrm{card}(\mathcal{A})$.

INDICE

Outil : propose une réciproque, puis vérifie les deux composées. Vérifie aussi que chaque application arrive dans le bon ensemble.

CORRIGÉ

ψ est bien définie. Soit $A \in \mathcal{A}$. Comme $A \subset E$, la partie $A \setminus \{1, 3\}$ est contenue dans $E \setminus \{1, 3\} = E'$: elle appartient à $\mathcal{P}(E')$.

Une réciproque. Soit $\theta : \mathcal{P}(E') \to \mathcal{A}$, $B \mapsto B \cup \{1, 3\}$. Elle est bien définie : $B \cup \{1, 3\}$ est contenue dans E et contient 1 et 3.

Première composée. Soit $A \in \mathcal{A}$. Comme $\{1, 3\} \subset A$:

$$\begin{aligned} &\theta(\psi(A)) \\ &= (A \setminus \{1, 3\}) \cup \{1, 3\} \\ &= A. \end{aligned}$$

Seconde composée. Soit $B \in \mathcal{P}(E')$. Comme $B \cap \{1, 3\} = \varnothing$:

$$\begin{aligned} &\psi(\theta(B)) \\ &= (B \cup \{1, 3\}) \setminus \{1, 3\} \\ &= B. \end{aligned}$$

Conclusion. ψ est bijective, de réciproque θ. D'après le résultat « cardinal et bijection » et le nombre de parties d'un ensemble fini :

$$\begin{aligned} \mathrm{card}(\mathcal{A}) &= \mathrm{card}(\mathcal{P}(E')) \\ &= 2^3 = 8. \end{aligned}$$