BURHAN

Dénombrement : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/denombrement/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Dénombrement	Application	10

Exercice 1

Les lecteurs d'un club de lecture

Un club de lecture compte 40 membres. Parmi eux, 23 lisent des romans, 17 lisent des bandes dessinées et 9 lisent les deux.

On note E l'ensemble des membres, R celui des lecteurs de romans et B celui des lecteurs de bandes dessinées.

1.

Combien de membres lisent des romans ou des bandes dessinées ?

INDICE

Outil : le cardinal d'une réunion de deux parties qui se chevauchent.

2.

Combien de membres ne lisent ni romans ni bandes dessinées ?

INDICE

Outil : le cardinal du complémentaire, pris dans E.

3.

Combien de membres lisent exactement un des deux genres ?

INDICE

Outil : découpe en deux cas disjoints, $R \setminus B$ et $B \setminus R$.

Exercice 2

Des sacs à dos personnalisés

Un atelier fabrique des sacs à dos sur commande. Le client choisit une taille parmi 3, une couleur parmi 5 et un motif parmi 4. On note T, L et M les ensembles des tailles, des couleurs et des motifs.

1.

Combien de sacs à dos différents l'atelier peut-il fabriquer ?

INDICE

Outil : écris un sac comme un triplet, puis utilise le cardinal d'un produit cartésien.

2.

L'atelier propose aussi une trousse, de taille unique, dont le client choisit seulement la couleur et le motif. Combien de trousses différentes existe-t-il ?

INDICE

Outil : même raisonnement, avec des couples.

3.

Un client commande un seul article : un sac ou une trousse. Combien de commandes différentes sont possibles ?

INDICE

Outil : les deux ensembles d'articles sont-ils disjoints ?

Exercice 3

Des plaques pour les vélos d'une association

Une association numérote ses vélos par des plaques de trois caractères : une lettre choisie parmi A, B, C, D, E, F, puis un chiffre impair, puis une lettre de la même liste, **différente** de la première. Par exemple : C7A.

1.

Combien de plaques différentes l'association peut-elle fabriquer ?

INDICE

Outil : le principe multiplicatif. Compte les possibilités à chaque étape et vérifie qu'elles ne dépendent pas des choix précédents.

2.

Combien de ces plaques ont deux voyelles pour lettres ?

INDICE

Outil : repère les voyelles de la liste, puis recommence le principe multiplicatif.

Exercice 4

Ranger des livres sur une étagère

Samir range 6 livres distincts côte à côte sur une étagère. Deux d'entre eux sont des livres de mathématiques.

1.

De combien de façons peut-il ranger ces 6 livres ?

INDICE

Outil : un rangement des 6 livres est une permutation de l'ensemble des livres.

2.

Combien de rangements placent les deux livres de mathématiques aux deux extrémités de la rangée ?

INDICE

Outil : le principe multiplicatif : place d'abord les livres de mathématiques, puis les autres.

Exercice 5

Des drapeaux à trois bandes

On dessine des drapeaux formés de trois bandes horizontales (haut, milieu, bas). Chaque bande reçoit une couleur choisie parmi 7 couleurs, dont le blanc. Les trois bandes ont des couleurs deux à deux différentes.

1.

Combien de drapeaux différents peut-on dessiner ?

INDICE

Outil : l'ordre des bandes compte, et une couleur ne se répète pas. Quel modèle ?

2.

Combien de drapeaux ont une bande du milieu blanche ?

INDICE

Outil : le principe multiplicatif, en commençant par la bande du milieu.

3.

Combien de drapeaux contiennent du blanc ? Donner deux méthodes.

INDICE

Outil : le complémentaire (« aucune bande blanche »), puis des cas disjoints selon la place du blanc.

Exercice 6

Des poignées de main

Douze personnes se retrouvent. Chacune serre une fois la main de chacune des autres.

1.

Combien de poignées de main sont échangées ?

INDICE

Outil : une poignée de main correspond à une paire de personnes, sans ordre.

2.

Retrouver ce nombre en comptant, pour chaque personne, les mains qu'elle serre.

INDICE

Outil : compte les couples (personne, partenaire), puis demande-toi combien de fois chaque poignée est comptée.

3.

On veut former un groupe de 3 personnes pour préparer un repas. Combien de groupes sont possibles ?

INDICE

Outil : dans un groupe, l'ordre ne compte pas.

Exercice 7

Trois boules de glace : quel modèle ?

Un glacier propose 6 parfums. Dans chaque situation, nommer le modèle, puis dénombrer.

1.

Un cornet reçoit 3 boules empilées, de parfums différents. Le cornet est décrit de bas en haut. Combien de cornets différents ?

INDICE

Outil : l'ordre compte-t-il ? Un parfum peut-il revenir ?

2.

Une coupe reçoit 3 boules de parfums différents, sans ordre. Combien de coupes différentes ?

INDICE

Outil : même question qu'en 1 sur l'ordre.

3.

Trois enfants, Lina, Omar et Yasmine, choisissent chacun une boule, sans se concerter. On note leurs choix dans cet ordre. Combien de listes de choix sont possibles ?

INDICE

Outil : deux enfants peuvent-ils choisir le même parfum ?

4.

Expliquer pourquoi le résultat de 1 est égal à celui de 2 multiplié par 6.

INDICE

Outil : combien de cornets peut-on former avec les trois parfums d'une même coupe ?

Exercice 8

Applications et parties de petits ensembles

On pose $E = \{r, s, t, u\}$ et $F = \{0, 1, 2\}$.

1.

Calculer $\mathrm{card}(\mathcal{F}(E, F))$ et $\mathrm{card}(\mathcal{F}(F, E))$.

INDICE

Outil : le nombre d'applications. Attention à l'exposant : c'est le cardinal de l'ensemble de départ.

2.

Combien d'applications de F dans E sont injectives ? Existe-t-il une application injective de E dans F ?

INDICE

Outil : le nombre d'injections, et la condition sur les cardinaux.

3.

Combien E a-t-il de parties ? Écrire en extension les parties de E à deux éléments, puis vérifier leur nombre.

INDICE

Outil : le nombre de parties d'un ensemble fini, puis le nombre de combinaisons.

Exercice 9

Prolonger le triangle de Pascal

La ligne $n = 8$ du triangle de Pascal, qui donne $C_8^0, C_8^1, \ldots, C_8^8$, est :

$$1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1$$

1.

Écrire les lignes $n = 9$ et $n = 10$.

INDICE

Outil : la relation de Pascal $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$: chaque nombre intérieur est la somme des deux nombres voisins de la ligne précédente. Les extrémités valent 1.

2.

Contrôler ces deux lignes à l'aide de la somme de leurs termes.

INDICE

Outil : la somme des nombres de la ligne n vaut 2^n.

3.

Retrouver C_{10}^4 par la formule du nombre de combinaisons.

INDICE

Outil : simplifie : p facteurs au numérateur, $p!$ au dénominateur.

Exercice 10

Développer une puissance quatrième

On note x un nombre réel.

1.

Développer $(x - 2)^4$.

INDICE

Outil : la formule du binôme avec $a = x$, $b = -2$ et $n = 4$. Les coefficients sont $C_4^0, \ldots, C_4^4$, soit $1, 4, 6, 4, 1$.

2.

En déduire, sans calculatrice, la valeur de $98^4 + 102^4$.

INDICE

Outil : écris 98 et 102 à l'aide de $x = 100$, puis développe aussi $(x + 2)^4$ et compare les signes des deux développements.