BURHAN

Dénombrement : exercices, application

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/denombrement/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Dénombrement	Application	10

Exercice 1

Les lecteurs d'un club de lecture

Un club de lecture compte 40 membres. Parmi eux, 23 lisent des romans, 17 lisent des bandes dessinées et 9 lisent les deux.

On note E l'ensemble des membres, R celui des lecteurs de romans et B celui des lecteurs de bandes dessinées.

1.

Combien de membres lisent des romans ou des bandes dessinées ?

INDICE

Outil : le cardinal d'une réunion de deux parties qui se chevauchent.

CORRIGÉ

On cherche $\mathrm{card}(R \cup B)$. Les parties R et B ne sont pas disjointes, car $\mathrm{card}(R \cap B) = 9$.

D'après la formule du cardinal d'une réunion :

$$\begin{aligned} \mathrm{card}(R \cup B) &= 23 + 17 - 9 \\ &= 31. \end{aligned}$$

Conclusion. 31 membres lisent des romans ou des bandes dessinées.

2.

Combien de membres ne lisent ni romans ni bandes dessinées ?

INDICE

Outil : le cardinal du complémentaire, pris dans E.

CORRIGÉ

Ces membres forment le complémentaire $\overline{R \cup B}$ de $R \cup B$ dans E.

D'après la formule du cardinal du complémentaire :

$$\begin{aligned} \mathrm{card}\left(\overline{R \cup B}\right) &= 40 - 31 \\ &= 9. \end{aligned}$$

Conclusion. 9 membres ne lisent ni romans ni bandes dessinées.

3.

Combien de membres lisent exactement un des deux genres ?

INDICE

Outil : découpe en deux cas disjoints, $R \setminus B$ et $B \setminus R$.

CORRIGÉ

Un membre qui lit exactement un des deux genres appartient à $R \setminus B$ ou à $B \setminus R$. Ces deux parties sont disjointes.

Romans seulement. R est la réunion disjointe de $R \setminus B$ et de $R \cap B$, donc :

$$\operatorname{card}(R \setminus B) = 23 - 9 = 14.$$

Bandes dessinées seulement. De même :

$$\operatorname{card}(B \setminus R) = 17 - 9 = 8.$$

Réunion des deux cas. D'après le principe additif, il y a $14 + 8 = 22$ tels membres. Contrôle : ce sont les membres de $R \cup B$ qui ne sont pas dans $R \cap B$, et $31 - 9 = 22$.

Conclusion. 22 membres lisent exactement un des deux genres.

Exercice 2

Des sacs à dos personnalisés

Un atelier fabrique des sacs à dos sur commande. Le client choisit une taille parmi 3, une couleur parmi 5 et un motif parmi 4. On note T, L et M les ensembles des tailles, des couleurs et des motifs.

1.

Combien de sacs à dos différents l'atelier peut-il fabriquer ?

INDICE

Outil : écris un sac comme un triplet, puis utilise le cardinal d'un produit cartésien.

CORRIGÉ

Un sac est décrit par le triplet (taille, couleur, motif), c'est-à-dire par un élément de $T \times L \times M$. Deux triplets différents décrivent deux sacs différents.

D'après le cardinal d'un produit cartésien :

$$\begin{aligned} &\operatorname{card}(T \times L \times M) \\ &= 3 \times 5 \times 4 \\ &= 60. \end{aligned}$$

Conclusion. L'atelier peut fabriquer 60 sacs à dos différents.

2.

L'atelier propose aussi une trousse, de taille unique, dont le client choisit seulement la couleur et le motif. Combien de trousses différentes existe-t-il ?

INDICE

Outil : même raisonnement, avec des couples.

CORRIGÉ

Une trousse est décrite par le couple (couleur, motif), élément de $L \times M$.

D'après le cardinal d'un produit cartésien :

$$\operatorname{card}(L \times M) = 5 \times 4 = 20.$$

Conclusion. Il existe 20 trousses différentes.

3.

Un client commande un seul article : un sac ou une trousse. Combien de commandes différentes sont possibles ?

INDICE

Outil : les deux ensembles d'articles sont-ils disjoints ?

CORRIGÉ

Une commande est un élément de $(T \times L \times M) \cup (L \times M)$.

Un triplet n'est jamais un couple : les ensembles $T \times L \times M$ et $L \times M$ sont disjoints. D'après le principe additif, le nombre de commandes est $60 + 20 = 80$.

Conclusion. 80 commandes différentes sont possibles.

Exercice 3

Des plaques pour les vélos d'une association

Une association numérote ses vélos par des plaques de trois caractères : une lettre choisie parmi A, B, C, D, E, F, puis un chiffre impair, puis une lettre de la même liste, **différente** de la première. Par exemple : C7A.

1.

Combien de plaques différentes l'association peut-elle fabriquer ?

INDICE

Outil : le principe multiplicatif. Compte les possibilités à chaque étape et vérifie qu'elles ne dépendent pas des choix précédents.

CORRIGÉ

On construit une plaque en trois étapes.

- **Première lettre :** 6 possibilités.
- **Chiffre impair**, parmi $1, 3, 5, 7, 9$: 5 possibilités.
- **Seconde lettre :** les 6 lettres sauf la première, soit 5 possibilités. Ces lettres dépendent du premier choix, mais leur nombre vaut toujours 5.

Une plaque donnée correspond à un seul choix à chaque étape. D'après le principe multiplicatif, le nombre de plaques est $6 \times 5 \times 5 = 150$.

Conclusion. L'association peut fabriquer 150 plaques différentes.

2.

Combien de ces plaques ont deux voyelles pour lettres ?

INDICE

Outil : repère les voyelles de la liste, puis recommence le principe multiplicatif.

CORRIGÉ

Les voyelles de la liste sont A et E. Une telle plaque se construit en trois étapes.

- **Première lettre :** A ou E, soit 2 possibilités.
- **Chiffre :** 5 possibilités.
- **Seconde lettre :** l'autre voyelle, soit 1 possibilité.

D'après le principe multiplicatif, il y a $2 \times 5 \times 1 = 10$ telles plaques.

Conclusion. 10 plaques ont deux voyelles pour lettres.

Exercice 4

Ranger des livres sur une étagère

Samir range 6 livres distincts côte à côte sur une étagère. Deux d'entre eux sont des livres de mathématiques.

1.

De combien de façons peut-il ranger ces 6 livres ?

INDICE

Outil : un rangement des 6 livres est une permutation de l'ensemble des livres.

CORRIGÉ

Un rangement associe à chaque place, de gauche à droite, un livre, et chaque livre occupe une seule place : c'est une permutation de l'ensemble des 6 livres.

D'après le nombre de permutations d'un ensemble à 6 éléments :

$$\begin{aligned} 6! &= 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \\ &= 720. \end{aligned}$$

Conclusion. Samir peut ranger ses 6 livres de 720 façons.

2.

Combien de rangements placent les deux livres de mathématiques aux deux extrémités de la rangée ?

INDICE

Outil : le principe multiplicatif : place d'abord les livres de mathématiques, puis les autres.

CORRIGÉ

On construit un tel rangement en deux étapes.

- **Les extrémités.** Les deux livres de mathématiques occupent les deux extrémités : $2! = 2$ façons, selon celui qui est à gauche.
- **Le milieu.** Les 4 autres livres occupent les 4 places du milieu : $4! = 24$ permutations, quel que soit le premier choix.

D'après le principe multiplicatif, il y a $2 \times 24 = 48$ rangements.

Conclusion. 48 rangements placent les deux livres de mathématiques aux extrémités de la rangée.

Exercice 5

Des drapeaux à trois bandes

On dessine des drapeaux formés de trois bandes horizontales (haut, milieu, bas). Chaque bande reçoit une couleur choisie parmi 7 couleurs, dont le blanc. Les trois bandes ont des couleurs deux à deux différentes.

1.

Combien de drapeaux différents peut-on dessiner ?

INDICE

Outil : l'ordre des bandes compte, et une couleur ne se répète pas. Quel modèle ?

CORRIGÉ

Un drapeau est un triplet (haut, milieu, bas) de couleurs deux à deux distinctes : c'est un arrangement de 3 couleurs parmi 7.

D'après le nombre d'arrangements :

$$A_7^3 = 7 \times 6 \times 5 = 210.$$

Conclusion. On peut dessiner 210 drapeaux différents.

2.

Combien de drapeaux ont une bande du milieu blanche ?

INDICE

Outil : le principe multiplicatif, en commençant par la bande du milieu.

CORRIGÉ

On colorie les bandes en commençant par celle du milieu.

- **Milieu :** blanc, soit 1 possibilité.
- **Haut :** une des 6 autres couleurs.
- **Bas :** une des 5 couleurs restantes.

D'après le principe multiplicatif, il y a $1 \times 6 \times 5 = 30$ tels drapeaux.

Conclusion. 30 drapeaux ont une bande du milieu blanche.

3.

Combien de drapeaux contiennent du blanc ? Donner deux méthodes.

INDICE

Outil : le complémentaire (« aucune bande blanche »), puis des cas disjoints selon la place du blanc.

CORRIGÉ

Par le complémentaire. Les drapeaux sans blanc sont les arrangements de 3 couleurs parmi les 6 autres :

$$A_6^3 = 6 \times 5 \times 4 = 120.$$

Parmi les 210 drapeaux, il en reste $210 - 120 = 90$ qui contiennent du blanc.

Par cas disjoints. Les couleurs étant deux à deux distinctes, le blanc occupe au plus une bande. Un drapeau qui contient du blanc l'a donc en haut, au milieu ou en bas, et ces trois cas sont disjoints. Chacun compte 30 drapeaux, par le raisonnement de la question 2. D'après le principe additif, on retrouve $3 \times 30 = 90$.

Conclusion. 90 drapeaux contiennent du blanc, par l'une ou l'autre méthode.

Exercice 6

Des poignées de main

Douze personnes se retrouvent. Chacune serre une fois la main de chacune des autres.

1.

Combien de poignées de main sont échangées ?

INDICE

Outil : une poignée de main correspond à une paire de personnes, sans ordre.

CORRIGÉ

Une poignée de main correspond à une partie à 2 éléments de l'ensemble des 12 personnes.

D'après le nombre de combinaisons :

$$C_{12}^{2} = \frac{12 \times 11}{2!} = 66.$$

Conclusion. 66 poignées de main sont échangées.

2.

Retrouver ce nombre en comptant, pour chaque personne, les mains qu'elle serre.

INDICE

Outil : compte les couples (personne, partenaire), puis demande-toi combien de fois chaque poignée est comptée.

CORRIGÉ

Les couples. Chaque personne serre 11 mains. D'après le principe multiplicatif, il y a $12 \times 11 = 132$ couples (personne, partenaire).

Chaque poignée comptée deux fois. Une poignée de main entre deux personnes donne exactement deux couples, un pour chacune. Rangés selon la poignée qu'ils décrivent, les 132 couples forment des paquets de 2 couples, deux à deux disjoints.

Conclusion. Si N est le nombre de poignées de main, le principe additif donne $132 = 2N$, donc $N = 66$: on retrouve le résultat de la question 1.

3.

On veut former un groupe de 3 personnes pour préparer un repas. Combien de groupes sont possibles ?

INDICE

Outil : dans un groupe, l'ordre ne compte pas.

CORRIGÉ

Dans un groupe, l'ordre ne compte pas : un groupe est une partie à 3 éléments de l'ensemble des 12 personnes.

D'après le nombre de combinaisons :

$$\begin{aligned} C_{12}^{3} &= \frac{12 \times 11 \times 10}{3!} \\ &= \frac{1320}{6} = 220. \end{aligned}$$

Conclusion. 220 groupes de trois personnes sont possibles.

Exercice 7

Trois boules de glace : quel modèle ?

Un glacier propose 6 parfums. Dans chaque situation, nommer le modèle, puis dénombrer.

1.

Un cornet reçoit 3 boules empilées, de parfums différents. Le cornet est décrit de bas en haut. Combien de cornets différents ?

INDICE

Outil : l'ordre compte-t-il ? Un parfum peut-il revenir ?

CORRIGÉ

L'ordre compte (de bas en haut) et les parfums sont distincts : un cornet est un arrangement de 3 parfums parmi 6.

D'après le nombre d'arrangements :

$$A_6^3 = 6 \times 5 \times 4 = 120.$$

Conclusion. Il y a 120 cornets différents.

2.

Une coupe reçoit 3 boules de parfums différents, sans ordre. Combien de coupes différentes ?

INDICE

Outil : même question qu'en 1 sur l'ordre.

CORRIGÉ

L'ordre ne compte pas et les parfums sont distincts : une coupe est une partie à 3 éléments de l'ensemble des 6 parfums.

D'après le nombre de combinaisons :

$$C_6^3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3!} = 20.$$

Conclusion. Il y a 20 coupes différentes.

3.

Trois enfants, Lina, Omar et Yasmine, choisissent chacun une boule, sans se concerter. On note leurs choix dans cet ordre. Combien de listes de choix sont possibles ?

INDICE

Outil : deux enfants peuvent-ils choisir le même parfum ?

CORRIGÉ

L'ordre compte (Lina, puis Omar, puis Yasmine) et un parfum peut être choisi plusieurs fois : une liste de choix est une 3-liste d'éléments de l'ensemble des 6 parfums.

D'après le nombre de p-listes, il y en a $6^3 = 216$.

Conclusion. 216 listes de choix sont possibles.

4.

Expliquer pourquoi le résultat de 1 est égal à celui de 2 multiplié par 6.

INDICE

Outil : combien de cornets peut-on former avec les trois parfums d'une même coupe ?

CORRIGÉ

On construit un cornet en deux étapes.

- **La coupe de ses parfums :** 20 possibilités, d'après la question 2.
- **L'ordre de ces parfums**, de bas en haut : $3! = 6$ permutations, quelle que soit la coupe.

Un cornet détermine l'ensemble de ses trois parfums et leur ordre : il provient d'une seule suite de choix. D'après le principe multiplicatif, $120 = 20 \times 6$.

Conclusion. Le résultat de 1 est celui de 2 multiplié par 6, car chaque coupe donne exactement $3! = 6$ cornets.

Exercice 8

Applications et parties de petits ensembles

On pose $E = \{r, s, t, u\}$ et $F = \{0, 1, 2\}$.

1.

Calculer $\mathrm{card}(\mathcal{F}(E, F))$ et $\mathrm{card}(\mathcal{F}(F, E))$.

INDICE

Outil : le nombre d'applications. Attention à l'exposant : c'est le cardinal de l'ensemble de départ.

CORRIGÉ

On a $\mathrm{card}(E) = 4$ et $\mathrm{card}(F) = 3$. Dans le nombre d'applications entre ensembles finis, l'exposant est le cardinal de l'ensemble de départ.

De E dans F. Chacun des 4 éléments de E reçoit une image parmi 3 :

$$\mathrm{card}(\mathcal{F}(E, F)) = 3^4 = 81.$$

De F dans E. Chacun des 3 éléments de F reçoit une image parmi 4 :

$$\mathrm{card}(\mathcal{F}(F, E)) = 4^3 = 64.$$

Conclusion. $\mathrm{card}(\mathcal{F}(E, F)) = 81$ et $\mathrm{card}(\mathcal{F}(F, E)) = 64$.

2.

Combien d'applications de F dans E sont injectives ? Existe-t-il une application injective de E dans F ?

INDICE

Outil : le nombre d'injections, et la condition sur les cardinaux.

CORRIGÉ

Injections de F dans E. Comme $\mathrm{card}(F) = 3 \leq 4 = \mathrm{card}(E)$, le nombre d'injections de F dans E est $A_4^3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$.

Injections de E dans F. On a $\mathrm{card}(E) = 4 > 3 = \mathrm{card}(F)$: aucune application de E dans F n'est injective. En effet, quatre éléments ne peuvent pas avoir quatre images distinctes dans un ensemble à trois éléments.

Conclusion. 24 applications de F dans E sont injectives, et il n'existe aucune application injective de E dans F.

3.

Combien E a-t-il de parties ? Écrire en extension les parties de E à deux éléments, puis vérifier leur nombre.

INDICE

Outil : le nombre de parties d'un ensemble fini, puis le nombre de combinaisons.

CORRIGÉ

Nombre de parties. D'après le nombre de parties d'un ensemble fini :

$$\operatorname{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^4 = 16.$$

Parties à deux éléments. Ce sont $\{r, s\}$, $\{r, t\}$, $\{r, u\}$, $\{s, t\}$, $\{s, u\}$ et $\{t, u\}$. Il y en a 6, et l'on a bien :

$$C_4^2 = \frac{4 \times 3}{2!} = 6.$$

Conclusion. E a 16 parties, dont les 6 parties à deux éléments écrites ci-dessus.

Exercice 9

Prolonger le triangle de Pascal

La ligne $n = 8$ du triangle de Pascal, qui donne $C_8^0, C_8^1, \ldots, C_8^8$, est :

$$1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1$$

1.

Écrire les lignes $n = 9$ et $n = 10$.

INDICE

Outil : la relation de Pascal $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$: chaque nombre intérieur est la somme des deux nombres voisins de la ligne précédente. Les extrémités valent 1.

CORRIGÉ

D'après la relation de Pascal, chaque terme intérieur d'une ligne est la somme des deux termes voisins de la ligne précédente ; les extrémités valent 1.

Ligne 9, obtenue à partir de la ligne 8 :

$$1\ 9\ 36\ 84\ 126\ 126\ 84\ 36\ 9\ 1$$

Par exemple, $C_9^4 = C_8^3 + C_8^4 = 56 + 70 = 126$.

Ligne 10, obtenue à partir de la ligne 9 (ses onze termes, coupés en deux) :

$$1 \quad 10 \quad 45 \quad 120 \quad 210 \quad 252$$
$$210 \quad 120 \quad 45 \quad 10 \quad 1$$

Ces lignes sont symétriques, comme l'annonce l'égalité $C_n^{n-p} = C_n^p$.

Conclusion. Les lignes 9 et 10 du triangle de Pascal sont celles écrites ci-dessus.

2.

Contrôler ces deux lignes à l'aide de la somme de leurs termes.

INDICE

Outil : la somme des nombres de la ligne n vaut 2^n.

CORRIGÉ

D'après le nombre de parties d'un ensemble à n éléments, la somme des termes de la ligne n vaut 2^n.

Ligne 9**.** La somme de ses termes vaut 512, et $2^9 = 512$.

Ligne 10**.** La somme de ses termes vaut 1024, et $2^{10} = 1024$.

Conclusion. Les sommes des deux lignes valent bien 2^9 et 2^{10} : ce contrôle confirme les lignes trouvées.

3.

Retrouver C_{10}^{4} par la formule du nombre de combinaisons.

INDICE

Outil : simplifie : p facteurs au numérateur, $p!$ au dénominateur.

CORRIGÉ

D'après la formule du nombre de combinaisons, simplifiée :

$$\begin{aligned} C_{10}^{4} &= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4!} \\ &= \frac{5040}{24} = 210. \end{aligned}$$

Conclusion. $C_{10}^{4} = 210$: c'est bien le cinquième terme de la ligne 10.

Exercice 10

Développer une puissance quatrième

On note x un nombre réel.

1.

Développer $(x-2)^4$.

INDICE

Outil : la formule du binôme avec $a=x$, $b=-2$ et $n=4$. Les coefficients sont $C_4^0,\dots,C_4^4$, soit $1,4,6,4,1$.

CORRIGÉ

D'après la formule du binôme, avec $a=x$, $b=-2$ et les coefficients $1,4,6,4,1$ de la ligne 4 :

$$\begin{aligned}(x-2)^4 &= x^4+4x^3(-2)\\ &\quad +6x^2(-2)^2\\ &\quad +4x(-2)^3+(-2)^4.\end{aligned}$$

Or $(-2)^2=4$, $(-2)^3=-8$ et $(-2)^4=16$.

Conclusion. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}(x-2)^4 = x^4-8x^3+24x^2\\ -32x+16.\end{aligned}$$

Les signes alternent, car $(-2)^p$ est négatif pour p impair.

2.

En déduire, sans calculatrice, la valeur de $98^4 + 102^4$.

INDICE

Outil : écris 98 et 102 à l'aide de $x = 100$, puis développe aussi $(x+2)^4$ et compare les signes des deux développements.

CORRIGÉ

Développement de $(x+2)^4$. Avec $b = 2$ au lieu de -2, la formule du binôme donne les termes de la question 1 au signe près, tous positifs. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}(x+2)^4 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 \\ + 32x + 16.\end{aligned}$$

Somme des deux développements. Les termes de degré impair s'éliminent :

$$\begin{aligned}(x-2)^4 + (x+2)^4 \\ = 2x^4 + 48x^2 + 32.\end{aligned}$$

Valeur pour $x = 100$. On a $98 = 100 - 2$ et $102 = 100 + 2$. De plus, $2 \times 100^4 = 200\,000\,000$ et $48 \times 100^2 = 480\,000$. Donc :

$$\begin{aligned}&98^4 + 102^4 \\ &= 200\,000\,000 + 480\,000 \\ &\quad + 32 \\ &= 200\,480\,032.\end{aligned}$$

Conclusion. $98^4 + 102^4 = 200\,480\,032$.