BURHAN

Dénombrement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/denombrement/cours

Chapitre	Semestre
Dénombrement	Semestre 2

Compter sans tout écrire

Ton cadenas de vélo a quatre molettes. Chacune affiche un chiffre de 0 à 9. Tu as oublié le code, et tu décides de tout essayer, à raison d'un code par seconde.

Avant de commencer, une question se pose : combien de codes faudra-t-il essayer, au pire ?

Devine : Une prédiction

Combien de codes différents un cadenas à quatre molettes, chacune de 0 à 9, peut-il afficher ?

A. 40

Faux.
40 compte les couples (molette, chiffre), pas les codes. Les codes 1234 et 1243 sont déjà deux codes différents.

B. 9999

Faux.
Le code 0000 est aussi un code : de 0000 à 9999, il y en a un de plus.

C. $10\,000$

Juste.
Juste : dix choix pour chaque molette, et quatre molettes.

D. 5040

Faux.
Ce nombre suppose quatre chiffres deux à deux distincts. Rien n'interdit le code 7777.

Correction

Les codes vont de 0000 à 9999 : ce sont les entiers de 0 à 9999, écrits avec quatre chiffres. Il y en a $10\,000$.

On l'obtient aussi par un produit, avec dix chiffres possibles sur chacune des quatre molettes : $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000$.

À un essai par seconde, cela fait presque trois heures. Dans ce chapitre, tu apprends à justifier ce genre de produit.

Dans ce chapitre, tu apprends à **dénombrer** : compter les éléments d'un ensemble fini sans les écrire tous.

Codes, classements, tirages dans une urne, comités : chaque situation devient un ensemble, et chaque comptage une justification.

Tu rencontres aussi les coefficients binomiaux et la formule du binôme. Tu y emploies les bijections du chapitre « Ensembles et applications » et la récurrence du chapitre « Notions de logique ».

Ensembles finis, cardinal

Numéroter pour compter

En clair. Pour compter les élèves d'une file, tu les numérotes : 1, 2, 3… Le dernier numéro donne leur nombre.

Numéroter sans oubli ni répétition, c'est fabriquer une **bijection** entre $\{1, 2, \dots, n\}$ et l'ensemble compté. Rappel : une bijection est une application à la fois injective et surjective (chapitre « Ensembles et applications »).

Par exemple, $k \mapsto 2k$ numérote les entiers pairs de 2 à 20 : il y en a 10. À toi de numéroter.

Devine : Numéroter des multiples

Combien d'éléments l'ensemble $E = \{3, 6, 9, \dots, 30\}$ des multiples de 3 compris entre 3 et 30 possède-t-il ?

A. 30

Faux.
30 est le plus grand élément de E, pas le nombre de ses éléments.

B. 10

Juste.
Juste : $3k$ parcourt E quand k parcourt $\{1, 2, \dots, 10\}$.

C. 27

Faux.
$30 - 3 = 27$ est l'écart entre le plus grand et le plus petit élément, pas leur nombre.

D. 9

Faux.
$\dfrac{30 - 3}{3} = 9$ oublie le premier élément : il faut ajouter 1.

Correction
On numérote les éléments de E : le k-ième est $3k$.

L'application $k \mapsto 3k$, de $\{1, 2, \dots, 10\}$ dans E, est une bijection : sa réciproque est $x \mapsto \dfrac{x}{3}$.

Donc E a 10 éléments.

Cardinal ; une bijection le conserve

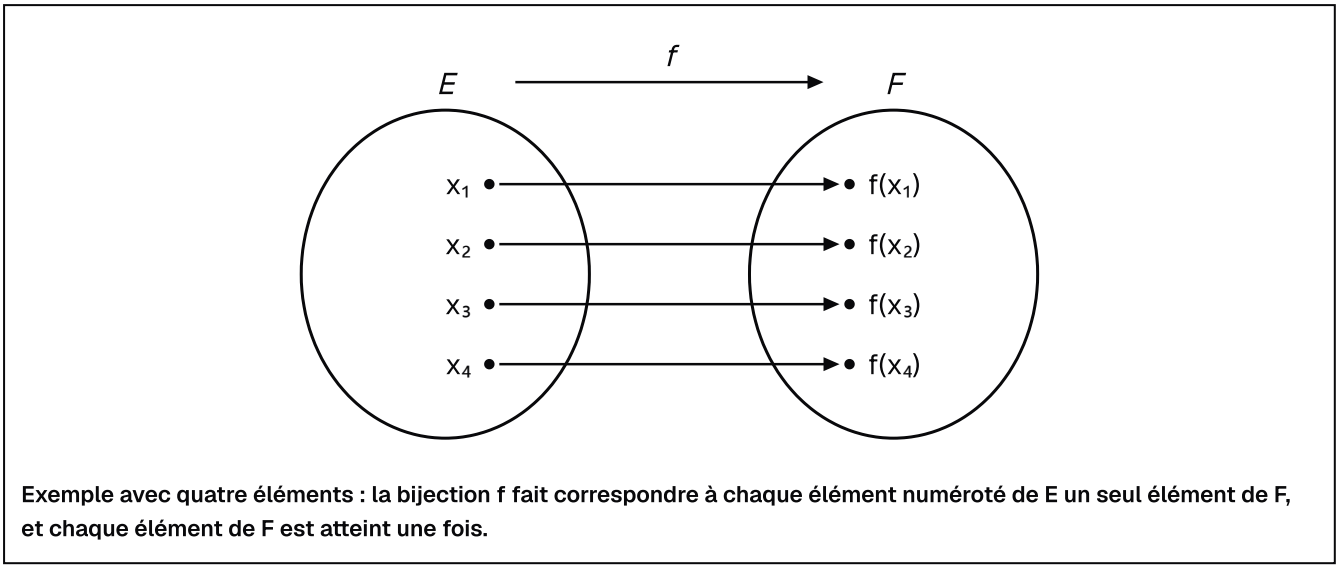
Définition : Ensemble fini, cardinal

Soit E un ensemble et $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que E est **fini de cardinal** n s'il existe une bijection de $\{1, 2, \dots, n\}$ sur E : on peut numéroter les éléments de E sous la forme $x_1, x_2, \dots, x_n$, deux à deux distincts. On note alors $\mathrm{card}(E) = n$, le **cardinal** de E, c'est-à-dire son nombre d'éléments. Ce nombre ne dépend pas de la numérotation choisie : c'est le premier point d'un résultat admis, énoncé plus loin.

L'ensemble vide est fini, de cardinal 0 : $\mathrm{card}(\varnothing) = 0$. Un ensemble qui n'est pas fini est dit **infini**.

Deux ensembles reliés par une bijection ont le même nombre d'éléments.

Pourquoi est-ce vrai ? Une numérotation de E, suivie de la bijection, numérote F. La preuve vérifie que cette composée est encore une bijection.



Exemple avec quatre éléments : la bijection f fait correspondre à chaque élément numéroté de E un seul élément de F, et chaque élément de F est atteint une fois.

Propriété : Cardinal et bijection

Soit E un ensemble fini et F un ensemble. S'il existe une bijection de E sur F, alors F est fini et $\mathrm{card}(F) = \mathrm{card}(E)$.

Démonstration

Étape 1. Si $E = \varnothing$, une bijection de E sur F est surjective, donc F n'a aucun élément : $F = \varnothing$, et les deux cardinaux valent 0.

Étape 2. Sinon, soit $n = \mathrm{card}(E)$, φ une bijection de $\{1, 2, \dots, n\}$ sur E (définition du cardinal) et f une bijection de E sur F. La composée $f \circ \varphi$ est une bijection de $\{1, 2, \dots, n\}$ sur F, car la composée de deux bijections est une bijection (chapitre « Ensembles et applications »).

Étape 3. D'après la définition du cardinal, F est fini et $\mathrm{card}(F) = n = \mathrm{card}(E)$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour transporter un cardinal, on **compose** : une numérotation de E, puis la bijection de E sur F. Le résultat numérote F avec les mêmes numéros.

C'est ton premier outil : pour compter un ensemble inconnu, mets-le en bijection avec un ensemble que tu sais compter.

Vérifie : Quel résultat sert à l'étape 2 ?

Dans la preuve, quel résultat du chapitre « Ensembles et applications » permet de dire que $f \circ \varphi$ est une bijection ?

A. La réciproque d'une bijection est une bijection.

Faux.
La preuve n'utilise aucune réciproque : elle compose φ, puis f.

B. L'image directe de E par f est incluse dans F.

Faux.
Une inclusion ne dit rien sur l'injectivité ni sur la surjectivité.

C. Une récurrence sur le cardinal de E.

Faux.
La preuve ne fait aucune récurrence : une seule composée suffit.

D. La composée de deux bijections est une bijection.

Juste.
Juste : φ et f sont deux bijections, donc leur composée aussi.

Correction
À l'étape 2, φ va de $\{1, 2, \dots, n\}$ sur E, et f va de E sur F. Ce sont deux bijections.

D'après le chapitre « Ensembles et applications », leur composée $f \circ \varphi$ est une bijection de $\{1, 2, \dots, n\}$ sur F.

Un cardinal bien défini

Exemple : Exemple et contre-exemple

- Soit F l'ensemble des entiers pairs de 2 à 24. L'application $k \mapsto 2k$ va de $\{1, 2, \dots, 12\}$ dans F. Elle est bijective, de réciproque $y \mapsto \dfrac{y}{2}$. Donc $\operatorname{card}(F) = 12$.
- **L'hypothèse compte.** L'application $x \mapsto x^2$, de $\{-2, -1, 1, 2\}$ dans $\{1, 4\}$, est surjective mais pas injective : $(-1)^2 = 1^2$. Et les cardinaux diffèrent : 4 au départ, 2 à l'arrivée.

Une question reste ouverte. Si l'on numérote un ensemble de deux façons, trouve-t-on deux fois le même nombre d'éléments ? Et une partie d'un ensemble fini est-elle finie ?

La réponse est oui. Ce n'est pas une évidence : on l'admet, et l'on s'en sert dans tout le chapitre.

Propriété : Unicité du cardinal ; parties d'un ensemble fini

- Le cardinal d'un ensemble fini est bien défini : si n et m sont deux entiers naturels non nuls et s'il existe une bijection de $\{1, 2, \dots, n\}$ sur E et une bijection de $\{1, 2, \dots, m\}$ sur E, alors $n = m$.
- Toute partie d'un ensemble fini est un ensemble fini.

Remarque : Admis

Ce résultat est admis. Sa preuve demande une récurrence plus fine, qui dépasse ce chapitre.

Exemple : une partie d'un ensemble fini

L'ensemble $P = \{2, 3, 5, 7\}$ des nombres premiers inférieurs à 10 est une partie de $\{1, 2, \dots, 10\}$. D'après ce résultat, P est fini, et l'on compte ses éléments : $\mathrm{card}(P) = 4$.

Grâce à l'unicité, ce nombre ne dépend pas de l'ordre dans lequel tu les comptes.

Dénombrer par une bijection

Méthode : dénombrer par une bijection

1. **Nommer** l'ensemble F à compter, en disant précisément quels sont ses éléments.
2. **Choisir** un ensemble E que tu sais compter, et une application de E vers F (ou de F vers E).
3. **Prouver** qu'elle est bijective : injectivité et surjectivité, ou réciproque écrite explicitement.
4. **Conclure** que F et E ont le même cardinal, en citant le résultat sur les bijections.

Exemple : Exemple guidé : les codes à deux chiffres

Énoncé. Soit C l'ensemble des codes à deux chiffres, de 00 à 99. Montrons que $\mathrm{card}(C) = 100$.

Bijection. À l'entier $k \in \{1, 2, \dots, 100\}$, associons le code qui écrit $k - 1$ avec deux chiffres. Par exemple, 1 donne 00 et 58 donne 57.

Réciproque explicite. Au code de chiffres d puis u, associons $10d + u + 1$, qui est entre 1 et 100. Les deux applications se défont l'une l'autre, dans les deux sens : la première est une bijection.

Conclusion. D'après le résultat sur les bijections, $\mathrm{card}(C) = 100$.

À toi : Les entiers impairs

Soit I l'ensemble des entiers impairs de 1 à 39. Construis une bijection de $\{1, 2, \ldots, 20\}$ sur I, et déduis-en $\mathrm{card}(I)$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Le premier impair est 1, le deuxième est 3 : quelle formule donne le k-ième ?
Indice 2
Essaie $k \mapsto 2k - 1$, puis exprime k en fonction de l'impair y.
Indice 3
Point délicat : vérifie que l'image de chaque k est bien dans I, et que $\dfrac{y+1}{2}$ est bien entre 1 et 20.

Réponse
L'application. Soit φ l'application $k \mapsto 2k - 1$, définie sur $\{1, 2, \ldots, 20\}$. Pour $1 \leq k \leq 20$, $2k - 1$ est impair et $1 \leq 2k - 1 \leq 39$: $\varphi(k) \in I$.

Sa réciproque. Soit ψ l'application $y \mapsto \dfrac{y+1}{2}$, définie sur I. Pour $y \in I$, $y + 1$ est pair et $2 \leq y + 1 \leq 40$, donc $\psi(y) \in \{1, 2, \ldots, 20\}$. De plus, pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, 20\}$ et tout $y \in I$:

$$\psi\big(\varphi(k)\big) = k,$$
$$\varphi\big(\psi(y)\big) = y.$$

Conclusion. φ est une bijection de $\{1, 2, \ldots, 20\}$ sur I, de réciproque ψ. D'après le résultat sur les bijections, $\mathrm{card}(I) = 20$.

Réunion, complémentaire

Réunir, retirer

Petit rappel. Soit A et B deux parties d'un ensemble E.

- $A \cap B$ contient les éléments communs, $A \cup B$ ceux de l'une ou de l'autre.
- Le complémentaire $\overline{A}$, pris dans E, contient les éléments de E hors de A.
- A et B sont **disjointes** si $A \cap B = \varnothing$.

Ici, on travaille avec l'ensemble C des codes à deux chiffres.

Devine : Deux paquets sans élément commun

Parmi les codes à deux chiffres, de 00 à 99, combien commencent par 3 ou par 5 ?

A. 20
Juste.
Juste : dix codes commencent par 3, dix autres par 5, et aucun code ne fait les deux.

B. 10

Faux.

Les codes de 30 à 39 sont déjà dix : ceux qui commencent par 5 s'y ajoutent.

C. 2

Faux.

2 compte les premiers chiffres permis, pas les codes.

D. 19

Faux.

Aucun code ne commence à la fois par 3 et par 5 : il n'y a rien à retrancher.

Correction

Les codes qui commencent par 3 vont de 30 à 39 : il y en a 10. De même, 10 codes vont de 50 à 59.

Un code ne peut pas commencer à la fois par 3 et par 5 : les deux paquets sont disjoints. On additionne :

$$10 + 10 = 20.$$

Additionner des paquets disjoints

Propriété : Réunion de parties disjointes (principe additif)

- Soit A et B deux ensembles finis disjoints ($A \cap B = \varnothing$). Alors $A \cup B$ est fini et $\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B)$.
- Plus généralement, soit $p \geq 2$ et $A_1, A_2, \ldots, A_p$ des ensembles finis deux à deux disjoints. Alors leur réunion est finie et $\operatorname{card}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p) = \operatorname{card}(A_1) + \operatorname{card}(A_2) + \cdots + \operatorname{card}(A_p)$.

Démonstration

Idée de la preuve. Si A ou B est vide, l'égalité est immédiate. Sinon, soit $m = \operatorname{card}(A)$ et $k = \operatorname{card}(B)$. On numérote les éléments de A par $1, 2, \ldots, m$, puis ceux de B par $m+1, \ldots, m+k$. Comme $A \cap B = \varnothing$, aucun élément ne reçoit deux numéros : on obtient une bijection de $\{1, 2, \ldots, m+k\}$ sur $A \cup B$, d'où le premier point (définition du cardinal). Le second point s'en déduit par récurrence sur p, car $A_1 \cup \cdots \cup A_p$ et A_{p+1} sont disjoints. Étapes omises : l'écriture explicite de la bijection, la vérification de son injectivité et de sa surjectivité, la rédaction de la récurrence.

Exemple : cent codes en dix paquets

Range les codes à deux chiffres selon leur premier chiffre d, de 0 à 9. Tu obtiens dix paquets : pour chaque d, les codes dont le premier chiffre est d.

Ces paquets sont deux à deux disjoints, et chacun contient 10 codes. D'après le principe additif, le nombre de codes est

$$10 + 10 + \cdots + 10 = 100.$$

On retrouve le résultat de la section précédente.

Complémentaire et réunion

Devine : Deux paquets qui se chevauchent

Combien de codes à deux chiffres commencent par 7 ou finissent par 7 ?

A. 20

Faux.
Le code 77 est compté deux fois : il commence et finit par 7.

B. 10

Faux.
Ce sont seulement les codes qui commencent par 7.

C. 19

Juste.
Juste : $10 + 10 - 1$, car 77 est dans les deux paquets.

D. 1

Faux.
1 compte les codes qui commencent **et** finissent par 7 : le « ou » en accepte bien plus.

Correction
Soit A l'ensemble des codes qui commencent par 7, et B celui des codes qui finissent par 7. On a $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B) = 10$, et $A \cap B = \{77\}$.

En additionnant, on compte 77 deux fois : il faut le retirer une fois. Le nombre de codes est donc

$$10 + 10 - 1 = 19.$$

Deux paquets qui se chevauchent ne s'additionnent pas directement.

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve découpe chaque ensemble en morceaux disjoints. Elle applique ensuite le principe additif à chaque découpage.

Propriété : Cardinal du complémentaire et d'une réunion

Soit E un ensemble fini, et A et B deux parties de E. Le complémentaire est pris dans E. Alors :

- $\mathrm{card}(\overline{A}) = \mathrm{card}(E) - \mathrm{card}(A)$; en particulier, $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(E)$, avec égalité si et seulement si $A = E$;
- $\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) - \mathrm{card}(A \cap B)$.

Démonstration

Étape 1. Les parties A et $\overline{A}$ sont finies (résultat admis sur les parties), disjointes, et $A \cup \overline{A} = E$. D'après le principe additif, $\mathrm{card}(E) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(\overline{A})$, d'où la première égalité. Comme $\mathrm{card}(\overline{A}) \geq 0$, on a $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(E)$.

Étape 2. L'égalité $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(E)$ équivaut à $\mathrm{card}(\overline{A}) = 0$, c'est-à-dire à $\overline{A} = \varnothing$ (définition du cardinal), donc à $A = E$.

Étape 3. Les parties $A \cap B$ et $B \setminus A$ de E sont finies. $A \cup B$ est la réunion des parties disjointes A et $B \setminus A$; B est la réunion des parties disjointes $A \cap B$ et $B \setminus A$. D'après le principe additif, $\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B \setminus A)$ et $\mathrm{card}(B) = \mathrm{card}(A \cap B) + \mathrm{card}(B \setminus A)$. En retranchant membre à membre, on obtient la formule.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

L'idée réutilisable : **découper en parties disjointes**.

- E se découpe en A et $\overline{A}$.
- $A \cup B$ se découpe en A et $B \setminus A$.

Une fois les morceaux disjoints, le principe additif fait le reste.

Vérifie : Quel découpage ?

À l'étape 3 de la preuve, en quelles parties disjointes découpe-t-on $A \cup B$?

A. A et B.

Faux.

A et B ne sont pas disjointes en général : leurs éléments communs seraient comptés deux fois.

B. $A \cap B$ et $A \setminus B$.

Faux.

Leur réunion est A, pas $A \cup B$.

C. A et $\overline{A}$.

Faux.

Leur réunion est E tout entier : c'est le découpage de l'étape 1.

D. A et $B \setminus A$.

Juste.

Juste : un élément de $B \setminus A$ n'est pas dans A, et leur réunion est $A \cup B$.

Correction

À l'étape 3, on écrit $A \cup B$ comme réunion de deux morceaux sans élément commun : A, puis $B \setminus A$. On découpe aussi B en $A \cap B$ et $B \setminus A$.

> Le principe additif s'applique aux deux découpages ; on retranche ensuite.

Par cas ou par le complémentaire

Exemple : les codes sans 7

Dans C, soit A la partie des codes qui contiennent au moins un 7. On vient de voir que $\text{card}(A) = 19$.

Son complémentaire $\overline{A}$, pris dans C, contient les codes sans aucun 7. D'après la formule du complémentaire :

$$\begin{aligned} \text{card}(\overline{A}) &= \text{card}(C) - \text{card}(A) \\ &= 100 - 19 = 81. \end{aligned}$$

L'hypothèse compte. Sans parties disjointes, on n'additionne pas : $10 + 10 = 20$ ne donne pas $\text{card}(A)$.

Méthode : par cas disjoints, ou par le complémentaire

1. **Découper** : si l'ensemble se sépare en cas qui ne se recoupent pas et couvrent tout, compte chaque cas et fais la somme.
2. **Passer au contraire** : pour « au moins un », compte plutôt les éléments qui n'en ont « aucun », puis retranche ce nombre du total.
3. **Corriger un chevauchement** : pour une réunion quelconque, ajoute les deux cardinaux et retire celui de l'intersection.

Exemple : Exemple guidé : au moins un chiffre impair

Énoncé. Combien de codes à deux chiffres contiennent au moins un chiffre impair ?

Le contraire. Soit A la partie de C formée de ces codes. Son complémentaire $\overline{A}$, dans C, contient les codes dont les deux chiffres sont pairs.

Par cas. Range ces codes selon leur premier chiffre : 0, 2, 4, 6 ou 8. Cela fait cinq paquets disjoints, de cinq codes chacun. D'après le principe additif, $\text{card}(\overline{A}) = 25$.

Conclusion. D'après la formule du complémentaire, $\text{card}(A) = 100 - 25 = 75$.

À toi

Attention : des paquets qui se chevauchent

✗ « Les codes pairs ou qui commencent par 1 sont $50 + 10 = 60$. »

✓ Les codes pairs qui commencent par 1, soit 10, 12, 14, 16 et 18, sont comptés deux fois.

On n'additionne que des parties disjointes. Ici, d'après la formule de la réunion, il y a $50 + 10 - 5 = 55$ codes.

À toi : Réunion de deux paquets

Soit A l'ensemble des codes à deux chiffres qui finissent par 0 ou par 5, et B celui des codes qui commencent par 1. Combien de codes sont dans $A \cup B$? Combien n'y sont pas ? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Compte d'abord A : les codes qui finissent par 0 et ceux qui finissent par 5 forment deux paquets disjoints.
Indice 2
Cherche ensuite les codes qui sont à la fois dans A et dans B : ils commencent par 1.
Indice 3
Point délicat : A et B se chevauchent, il faut retrancher $\mathrm{card}(A \cap B)$; pour la seconde question, passe au complémentaire dans C.

Réponse
Cardinal de A. Les codes qui finissent par 0 et ceux qui finissent par 5 forment deux paquets disjoints de 10 codes. D'après le principe additif, $\mathrm{card}(A) = 20$.

Intersection. De plus, $\mathrm{card}(B) = 10$ et $A \cap B = \{10, 15\}$.

Réunion. D'après la formule de la réunion :

$$\begin{aligned}&\mathrm{card}(A \cup B)\\ &= 20 + 10 - 2\\ &= 28.\end{aligned}$$

Conclusion. Il y a 28 codes dans $A \cup B$. Par le complémentaire dans C, $100 - 28 = 72$ codes ne sont pas dans $A \cup B$.

Produit cartésien

Un tableau à double entrée

En clair. Un code d'accès est formé d'une lettre parmi a et b, suivie d'un chiffre parmi $1, 2, 3$.

Range les codes dans un tableau : une ligne par lettre, une colonne par chiffre. La ligne de a contient $(a, 1)$, $(a, 2)$ et $(a, 3)$; celle de b, les trois couples qui commencent par b.

Chaque ligne a autant de cases : 2 lignes de 3 cases.

Devine : Des lettres et des chiffres

Un code est formé d'une lettre parmi a, b, c, suivie d'un chiffre de 0 à 9. Combien y a-t-il de codes ?

A. 13

Faux.

On a ajouté : or chaque lettre se combine avec chacun des dix chiffres.

B. 30

Juste.

Juste : trois lignes de dix cases.

C. 1000

Faux.

$10 \times 10 \times 10$ compterait trois chiffres, pas une lettre et un chiffre.

D. 27

Faux.

$27 = 3 \times 9$ oublie le chiffre 0.

Correction

Dans le tableau, la ligne de chaque lettre contient dix codes, un par chiffre. Les trois lignes sont disjointes.

D'après le principe additif, le nombre de codes est

$$10 + 10 + 10 = 3 \times 10 = 30.$$

Cardinal d'un produit

Le tableau montre l'idée : $\mathrm{card}(E)$ lignes de $\mathrm{card}(F)$ cases.

Pourquoi est-ce vrai ? Chaque ligne est en bijection avec F, et les lignes sont disjointes. La preuve applique le résultat sur les bijections, puis le principe additif.

Propriété : Cardinal d'un produit cartésien

Soit E et F deux ensembles finis. Alors $E \times F$ est fini et $\mathrm{card}(E \times F) = \mathrm{card}(E) \times \mathrm{card}(F)$.

Plus généralement, soit $p \geq 2$ et $E_1, E_2, \ldots, E_p$ des ensembles finis. L'ensemble $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$ des p-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, où $x_i \in E_i$ pour tout i, est fini et $\mathrm{card}(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p) = \mathrm{card}(E_1) \times \mathrm{card}(E_2) \times \cdots \times \mathrm{card}(E_p)$.

Démonstration

Étape 1. Si E ou F est vide, $E \times F = \varnothing$ et la formule est vraie. Sinon, soit $n = \mathrm{card}(E)$ et $k = \mathrm{card}(F)$. Pour $x \in E$, l'application $y \mapsto (x, y)$ est une bijection de F sur $\{x\} \times F$, de réciproque $(x, y) \mapsto y$: donc $\mathrm{card}(\{x\} \times F) = k$ (cardinal et bijection).

Étape 2. Écrivons $E = \{x_1, \dots, x_n\}$, les x_i étant deux à deux distincts. $E \times F$ est la réunion des ensembles $\{x_i\} \times F$, deux à deux disjoints car leurs premières composantes diffèrent. D'après le principe additif (l'étape 1 si $n = 1$), $E \times F$ est fini et $\operatorname{card}(E \times F) = nk$.

Étape 3 (récurrence sur $p \geq 2$). Initialisation : $p = 2$ (étapes 1 et 2). Hérédité : si la formule vaut pour p facteurs, l'application $(x_1, \dots, x_{p+1}) \mapsto \big((x_1, \dots, x_p), x_{p+1}\big)$ est une bijection de $E_1 \times \cdots \times E_{p+1}$ sur $(E_1 \times \cdots \times E_p) \times E_{p+1}$, de réciproque $\big((x_1, \dots, x_p), x_{p+1}\big) \mapsto (x_1, \dots, x_{p+1})$; cardinal et bijection, l'hypothèse de récurrence et l'étape 2 donnent la formule pour $p + 1$ facteurs. Conclusion : elle vaut pour tout $p \geq 2$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour compter un produit $E \times F$, on le **découpe en lignes** : une ligne par élément x de E, formée des couples (x, y). Chaque ligne a $\operatorname{card}(F)$ éléments.

Pour plus de deux facteurs, on regroupe les premiers, et une récurrence conclut.

Vérifie : Des lignes disjointes

Dans la preuve, pourquoi les ensembles $\{x_i\} \times F$ sont-ils deux à deux disjoints ?

A. Parce que leurs couples n'ont pas la même première composante.

Juste.
Juste : un couple de $\{x_i\} \times F$ commence par x_i, et les x_i sont distincts.

B. Parce que ce sont des ensembles finis.

Faux.
Deux ensembles finis peuvent avoir des éléments communs.

C. Parce qu'ils ont tous $\operatorname{card}(F)$ éléments.

Faux.
Avoir le même nombre d'éléments n'empêche pas d'en partager.

D. Parce que F n'a aucun élément commun avec E.

Faux.
Rien ne l'exige : E et F peuvent même être égaux.

Correction
Un couple (x_i, y) de $\{x_i\} \times F$ a pour première composante x_i.

Si $i \neq j$, alors $x_i \neq x_j$, car les x_i sont deux à deux distincts. Un couple ne peut donc pas être dans deux lignes différentes.

Plus de deux facteurs

Exemple : trois facteurs, et un facteur vide

- Un code formé d'une lettre parmi a, b, c, puis de deux chiffres, est un élément de $L \times D \times D$, avec $L = \{a, b, c\}$ et $D = \{0, 1, \ldots, 9\}$. D'après le cardinal d'un produit, il y a $3 \times 10 \times 10 = 300$ codes.
- **Un cas limite.** Si $F = \varnothing$, aucun couple (x, y) n'existe : $E \times \varnothing = \varnothing$, et $\mathrm{card}(E) \times 0 = 0$.

À toi : Un code en trois parties

Un code s'écrit avec un chiffre pair, puis une lettre parmi a, b, c, puis un chiffre pair. Écris l'ensemble des codes comme un produit cartésien, puis compte-les. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Nomme $P = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ et $L = \{a, b, c\}$.
Indice 2
Un code est un triplet : premier chiffre, lettre, second chiffre.
Indice 3
Point délicat : le même ensemble P apparaît deux fois, et c'est permis dans un produit.

Réponse
Soit $P = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ et $L = \{a, b, c\}$. Un code est un triplet (x, ℓ, y), avec $x \in P$, $\ell \in L$ et $y \in P$.

L'ensemble des codes est donc le produit cartésien $P \times L \times P$. D'après le cardinal d'un produit cartésien :

$$\begin{aligned} &\mathrm{card}(P \times L \times P) \\ &= 5 \times 3 \times 5 \\ &= 75. \end{aligned}$$

Conclusion. Il y a 75 codes.

Le principe multiplicatif

Un arbre de choix

Pour former un code à deux chiffres **distincts**, imagine un arbre. Le premier chiffre offre 10 branches.

Au bout de chacune, le second chiffre offre 9 branches : tous les chiffres sauf le premier. Ces branches changent d'un premier chiffre à l'autre, mais leur **nombre** reste 9.

Au total, $10 \times 9 = 90$ codes. Contrôle : on retire bien de 100 les 10 codes 00, 11, …, 99.

Devine : Trois chiffres distincts

Combien de codes à trois chiffres ont leurs chiffres deux à deux distincts ?

A. 1000

Faux.

Ce nombre accepte les répétitions, comme dans 337.

B. 720

Juste.

Juste : $10 \times 9 \times 8$.

C. 120

Faux.

120 compte les groupes de trois chiffres sans ordre : 123 et 321 sont pourtant deux codes.

D. 990

Faux.

$1000 - 10$ ne retire que les codes à trois chiffres égaux, comme 555 ; or 337 reste compté.

Correction

Le premier chiffre offre 10 choix. Le deuxième doit différer du premier : 9 choix, quel que soit le premier. Le troisième doit différer des deux autres : 8 choix.

On multiplie :

$$10 \times 9 \times 8 = 720.$$

Le principe

Théorème : Principe multiplicatif

On réalise un choix en p étapes successives ($p \geq 2$). On suppose que la première étape offre n_1 possibilités et que, pour $2 \leq k \leq p$, l'étape k offre n_k possibilités, **quels que soient les choix faits aux étapes précédentes**. Alors le nombre de choix complets (suites des p choix) est

$$n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_p.$$

Démonstration

Idée de la preuve. Si les possibilités de chaque étape ne dépendent pas des choix précédents, les choix complets sont les éléments d'un produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$, avec $\mathrm{card}(E_k) = n_k$, et le cardinal d'un produit cartésien conclut. Dans le cas général, on raisonne par récurrence sur p : on regroupe les choix complets selon le choix fait à la première étape. On obtient n_1 groupes deux à deux disjoints, qui contiennent chacun $n_2 \times \cdots \times n_p$ choix complets (directement n_2 si $p = 2$, d'après l'hypothèse de récurrence sinon), et le principe additif donne le produit. Étapes omises : la description précise des choix complets comme des p-uplets, et la rédaction de la récurrence.

En clair. On multiplie quand le **nombre** de possibilités de chaque étape ne dépend pas des choix faits aux étapes précédentes. L'ensemble des possibilités, lui, peut changer.

Et chaque objet compté doit venir d'**une seule** suite de choix.

Bien choisir les étapes

Méthode : appliquer le principe multiplicatif

1. **Ordonner** la construction de l'objet en étapes, en choisissant bien l'ordre.
2. **Compter** les possibilités de chaque étape, et contrôler que ce nombre ne varie pas avec les choix précédents.
3. **Contrôler** qu'un même objet ne s'obtient jamais par deux suites de choix différentes.
4. **Multiplier**, en citant le principe multiplicatif.

Exemple : Exemple guidé : un premier chiffre non nul

Énoncé. Combien de codes à trois chiffres deux à deux distincts ont un premier chiffre non nul ?

Étapes. On choisit le premier chiffre, puis le deuxième, puis le troisième.

Comptage. Premier chiffre : 9 choix, de 1 à 9. Deuxième : tout chiffre sauf le premier, 0 compris, soit 9 choix. Troisième : 8 choix. Ces nombres ne dépendent pas des choix précédents, même si les chiffres permis en dépendent.

Conclusion. Un code donné ne s'obtient que par une suite de choix. D'après le principe multiplicatif, on compte $9 \times 9 \times 8 = 648$ codes.

Exemple : Contre-exemple : un ordre mal choisi

On veut des codes à trois chiffres distincts dont le **dernier** est pair. Dans l'ordre naturel, le nombre de choix du dernier chiffre dépend des deux premiers : 5 après 1 puis 3, mais 3 après 2 puis 4. Le principe ne s'applique pas tel quel.

Change l'ordre : le dernier chiffre d'abord, 5 choix, puis le premier, 9 choix, puis le deuxième, 8 choix. Il y a $5 \times 9 \times 8 = 360$ codes.

Un piège, puis à toi

Attention : un même code compté deux fois

X « Pour un code à deux chiffres contenant un 7, je place le 7 (deux places), puis je choisis l'autre chiffre (10 choix) : $2 \times 10 = 20$ codes. »

✓ Le code 77 s'obtient par deux suites de choix : le 7 placé à gauche, ou à droite. Il est compté deux fois. Le bon nombre est 19, trouvé plus haut par la formule de la réunion.

Avant de multiplier, vérifie qu'un objet ne vient que d'**une** suite de choix.

À toi : Au moins un 7, avec trois chiffres

Combien de codes à trois chiffres contiennent au moins un 7 ? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Passe par le contraire : compte les codes qui ne contiennent aucun 7.
Indice 2
Pour un code sans 7, combien de choix pour chaque chiffre ? Dépendent-ils des autres chiffres ?
Indice 3
Point délicat : ne compte pas « je place un 7, puis je complète » : certains codes seraient comptés plusieurs fois.

Réponse
Tous les codes. Soit T l'ensemble des codes à trois chiffres et A la partie de ceux qui contiennent au moins un 7. D'après le principe multiplicatif :

$$\begin{aligned}&\operatorname{card}(T)\\&= 10 \times 10 \times 10\\&= 1000.\end{aligned}$$

Le complémentaire. $\overline{A}$, dans T, contient les codes sans 7 : 9 choix pour chaque chiffre, donc $\operatorname{card}(\overline{A}) = 9 \times 9 \times 9 = 729$.

Conclusion. D'après la formule du complémentaire :

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(A) &= 1000 - 729\\&= 271.\end{aligned}$$

Il y a 271 codes à trois chiffres qui contiennent au moins un 7.

p-listes : l'ordre compte, la répétition aussi

Des mots de trois lettres

En clair. Avec l'alphabet $\{a, b, c\}$, un « mot » est une suite de lettres, même sans aucun sens. Les mots de deux lettres sont aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb et cc.

Ici, l'**ordre compte** : ab et ba sont deux mots différents. Et une lettre peut se **répéter** : aa est un mot.

Devine : Mots de trois lettres

Combien de mots de trois lettres peut-on écrire avec l'alphabet $\{a, b, c\}$?

A. 9

Faux.

Ce sont les mots de deux lettres : une troisième lettre multiplie encore leur nombre.

B. 6

Faux.

On a interdit les répétitions : or aab est un mot permis.

C. 27

Juste.

Juste : $3 \times 3 \times 3$.

D. 1

Faux.

1 compte les groupes de trois lettres distinctes, sans ordre. Or l'ordre compte, et les lettres peuvent se répéter.

Correction

Chaque mot de deux lettres se prolonge de trois façons : avec a, b ou c. Il y a donc $9 \times 3 = 27$ mots de trois lettres, de aaa à ccc.

Combien de listes ?

Définition : p-listes d'un ensemble fini

Soit E un ensemble fini non vide et $p \in \mathbb{N}^*$. Une **p-liste** d'éléments de E (on dit aussi un **arrangement avec répétition**) est un p-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ d'éléments de E, c'est-à-dire un élément de $E^p = E \times E \times \cdots \times E$ (p facteurs).

Dans une p-liste, l'**ordre compte** et un même élément peut **apparaître plusieurs fois**.

Un mot de trois lettres sur $\{a, b, c\}$ est un triplet (x_1, x_2, x_3).

Pourquoi est-ce vrai ? Les p-listes forment exactement le produit E^p. Il suffit alors d'appliquer le cardinal d'un produit cartésien.

Propriété : Nombre de p-listes

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Le nombre de p-listes d'éléments de E est

$$\operatorname{card}(E^p) = n^p.$$

Démonstration

Étape 1. Par définition, les p-listes d'éléments de E sont exactement les éléments du produit cartésien $E^p = E \times E \times \cdots \times E$ (p facteurs).

Étape 2. Si $p = 1$, $E^1 = E$ et $\mathrm{card}(E) = n$. Si $p \geq 2$, d'après le cardinal d'un produit cartésien, E^p est fini et $\mathrm{card}(E^p) = \mathrm{card}(E) \times \mathrm{card}(E) \times \cdots \times \mathrm{card}(E) = n^p$ (p facteurs).

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve tient en une idée : **reconnaître un produit cartésien**. Une p-liste d'éléments de E n'est rien d'autre qu'un élément de $E \times E \times \cdots \times E$. Le reste vient du cardinal d'un produit.

Vérifie : Quel résultat ?

Sur quel résultat la preuve du nombre de p-listes s'appuie-t-elle ?

A. Le cardinal d'un produit cartésien.
Juste.
Juste : E^p est un produit de p facteurs égaux à E.

B. La formule du cardinal du complémentaire.
Faux.
Rien n'est retranché dans cette preuve.

C. La composée de deux bijections.
Faux.
La preuve ne construit aucune bijection : les p-listes sont déjà les éléments de E^p.

D. Une récurrence rédigée sur p.
Faux.
La récurrence est cachée dans le cardinal d'un produit ; cette preuve n'en écrit aucune.

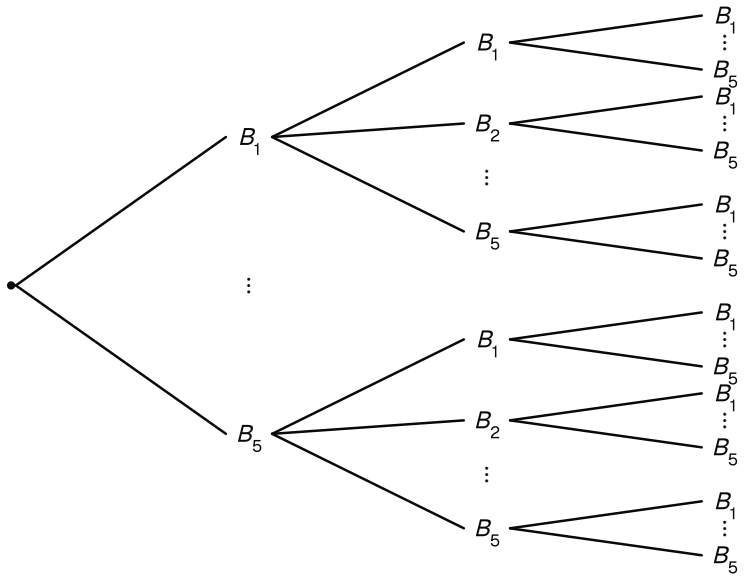
Correction
D'après la définition, les p-listes sont les éléments de E^p. La preuve applique le cardinal d'un produit cartésien, avec p facteurs égaux à E :

$$\mathrm{card}(E^p) = n^p.$$

Tirages avec remise, puis à toi

Exemple : tirages successifs avec remise

- Une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5. On tire une boule, on note son numéro, on la remet, et l'on recommence : trois tirages en tout. Un résultat est une 3-liste d'éléments de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, comme $(2, 5, 2)$. Il y a $5^3 = 125$ résultats.
- Un code PIN de quatre chiffres est une 4-liste de chiffres : $10^4 = 10\,000$ codes, comme pour le cadenas du début.



Arbre partiel des trois tirages avec remise : à chaque tirage, cinq branches B_1 à B_5, dont seules quelques-unes sont dessinées.

À toi : Au moins un zéro

Combien de codes PIN de quatre chiffres contiennent au moins un 0 ? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Passe par le complémentaire : compte d'abord les codes sans aucun 0.
Indice 2
Un code sans 0 est une 4-liste de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 9\}$.
Indice 3
Point délicat : retranche du total des codes, 10^4, et non de 9^4.

Réponse
Tous les codes. Soit P l'ensemble des codes PIN, et A la partie de ceux qui contiennent au moins un 0. Les codes sont les 4-listes de chiffres : $\operatorname{card}(P) = 10^4 = 10\,000$.

Le complémentaire. $\overline{A}$, dans P, est l'ensemble des 4-listes de $\{1, 2, \ldots, 9\}$: $\operatorname{card}(\overline{A}) = 9^4 = 6561$.

Conclusion. D'après la formule du complémentaire :

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(A) &= 10\,000 - 6561 \\ &= 3439.\end{aligned}$$

Il y a 3439 codes PIN qui contiennent au moins un 0.

Arrangements et permutations

Un podium

Huit coureurs disputent une course. Le podium désigne trois coureurs **dans l'ordre** : or, argent, bronze.

L'ordre compte : Sara en or et Yassine en argent, ce n'est pas l'inverse. Et un coureur ne peut pas occuper deux marches : il n'y a **pas de répétition**.

Pour voir la structure, prends seulement trois coureurs, a, b et c, et deux marches, or et argent. Les podiums sont ab, ac, ba, bc, ca et cb : 6 podiums, soit 3×2. Avec huit coureurs et trois marches, le raisonnement est le même.

Devine : Combien de podiums ?

Combien de podiums différents la course des huit coureurs peut-elle donner ?

A. 512

Faux.

8^3 permettrait au même coureur d'occuper deux marches.

B. 56

Faux.

Ce nombre ne tient pas compte de l'ordre : il compte les groupes de trois coureurs.

C. 24

Faux.

8×3 ne correspond à aucune suite de choix.

D. 336

Juste.

Juste : $8 \times 7 \times 6$.

Correction

La médaille d'or offre 8 choix. L'argent revient à l'un des 7 autres coureurs, quel que soit le premier. Le bronze, à l'un des 6 restants.

D'après le principe multiplicatif, le nombre de podiums est

$$8 \times 7 \times 6 = 336.$$

Factorielle, arrangements, permutations

Définition : Factorielle ; arrangements ; permutations

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la **factorielle** de n est $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$. Par convention, $0! = 1$.

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$ et p un entier tel que $1 \leq p \leq n$.

- Un **arrangement** de p éléments de E est une p-liste d'éléments de E **deux à deux distincts**. On note A_n^p le nombre de ces arrangements.

- Une **permutation** de E est un arrangement des n éléments de E.

Exemple : premières factorielles, permutations de trois lettres

- $0! = 1, 1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, 4! = 24, 5! = 120$ et $6! = 720$.
- Chaque factorielle s'obtient de la précédente : $n! = n \times (n-1)!$ pour $n \geq 1$.
- Les permutations de $\{a, b, c\}$ sont (a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b) et (c, b, a) : il y en a $6 = 3!$.

Nombre d'arrangements

Pour le podium, le nombre de choix **diminue de** 1 à chaque marche.

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve construit un arrangement élément par élément. Elle applique ensuite le principe multiplicatif, puis réécrit le produit avec des factorielles.

Propriété : Nombre d'arrangements et de permutations

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et p un entier tel que $1 \leq p \leq n$. Alors

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!},$$

le produit comptant p facteurs. En particulier, le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est $A_n^n = n!$.

Démonstration

Étape 1. Soit E un ensemble de cardinal n. On construit un arrangement $(x_1, \ldots, x_p)$ en p étapes : on choisit x_1 dans E, puis x_2 dans $E \setminus \{x_1\}$, et ainsi de suite. À l'étape k, les éléments déjà pris forment une partie de E à $k-1$ éléments ; x_k est choisi dans son complémentaire, qui a $n-(k-1)$ éléments (cardinal du complémentaire), quels que soient les choix précédents.

Étape 2. Si $p = 1$, $A_n^1 = n$. Si $p \geq 2$, le principe multiplicatif donne $A_n^p = n(n-1)\cdots(n-p+1)$.

Étape 3. Si $p < n$, $(n-p)! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-p)$, donc $n(n-1)\cdots(n-p+1) \times (n-p)! = n(n-1)\cdots(n-p+1) \times (n-p) \times \cdots \times 2 \times 1 = n!$. Si $p = n$, le produit vaut déjà $n!$ et $(n-p)! = 0! = 1$. Dans les deux cas, $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$; en particulier, $A_n^n = n!$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Retiens le geste : à l'étape k, il reste $n-(k-1)$ éléments non encore pris, **quels que soient** ceux déjà choisis.

Le principe multiplicatif donne un produit de p facteurs consécutifs, de n à $n-p+1$. En le complétant par $(n-p)!$, on obtient $n!$.

Vérifie : Combien de choix à l'étape k ?

Dans la preuve, pourquoi l'élément x_k a-t-il $n-(k-1)$ possibilités ?

A. Parce que les $k-1$ éléments déjà pris ne peuvent plus servir.

Juste.

Juste : on retire de E une partie à $k-1$ éléments, et la formule du complémentaire donne $n-(k-1)$.

B. Parce que ce nombre dépend des éléments déjà pris.

Faux.

Justement non : seul leur nombre compte, pas leur identité.

C. Parce que l'ordre des éléments ne compte pas ici.

Faux.

Dans un arrangement, l'ordre compte.

D. Parce qu'un même élément peut être choisi plusieurs fois.

Faux.

Dans un arrangement, les éléments sont deux à deux distincts : aucune répétition.

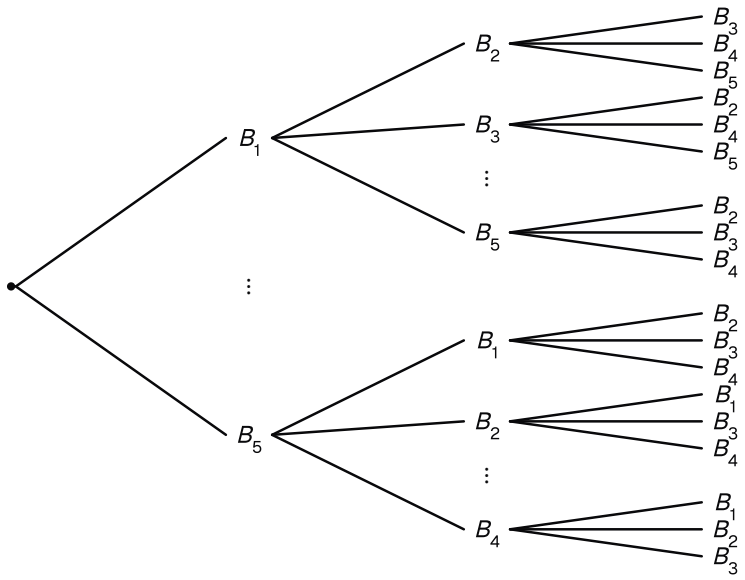
Correction

Avant l'étape k, on a pris $x_1, \dots, x_{k-1}$, deux à deux distincts. Ils forment une partie de E à $k-1$ éléments.

Son complémentaire dans E a $n-(k-1)$ éléments, d'après la formule du complémentaire. Ce nombre ne dépend pas des éléments pris.

Exemple : tirages successifs sans remise

- Une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5. On tire trois boules l'une après l'autre, **sans remise**, en notant les numéros dans l'ordre. Un résultat est un arrangement de 3 éléments de $\{1,2,3,4,5\}$: il y en a $A_5^3 = 5\times 4\times 3 = 60$.
- L'ordre d'arrivée complet des huit coureurs est une permutation : $8! = 40\,320$ ordres possibles.
- Et le podium : $A_8^3 = \dfrac{8!}{5!} = 336$.



Arbre partiel des trois tirages sans remise : cinq branches au premier tirage, quatre au deuxième, trois au troisième, la boule déjà sortie ne revenant jamais.

Cas limites, puis à toi

Attention : les cas limites

✗ « $0! = 0$, donc $\dfrac{4!}{0!}$ n'a pas de sens. »

✓ Par convention, $0! = 1$. Ainsi $A_4^4 = \dfrac{4!}{0!} = 24 = 4!$: les permutations sont bien des arrangements.

Autre limite : A_n^p n'est défini que pour $p \leq n$. Avec trois coureurs seulement, on ne remplit pas cinq places distinctes.

À toi : Un cadenas exigeant

Un cadenas exige un code de quatre chiffres deux à deux distincts. Combien de codes sont possibles ? Écris le résultat avec la notation des arrangements, puis calcule-le. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Les chiffres sont pris dans $\{0, 1, \ldots, 9\}$; l'ordre compte, et aucune répétition n'est permise.
Indice 2
Le nombre de choix diminue de 1 à chaque chiffre.
Indice 3
Point délicat : compte les facteurs de ton produit ; il doit y en avoir autant que de chiffres du code, et pas davantage.

Réponse

Un code est une 4-liste de chiffres deux à deux distincts : un arrangement de 4 éléments de $\{0, 1, \ldots, 9\}$, qui en a 10.

D'après le nombre d'arrangements :

$$\begin{aligned} A_{10}^{4} &= 10 \times 9 \times 8 \times 7 \\ &= 5040. \end{aligned}$$

Conclusion. Il y a 5040 codes possibles, environ la moitié des $10\,000$ codes du cadenas ordinaire.

Combinaisons

Un comité de délégués

Un groupe compte quatre élèves : Adam, Basma, Chadi et Dina. On choisit deux délégués.

Les choix possibles sont : Adam et Basma, Adam et Chadi, Adam et Dina, Basma et Chadi, Basma et Dina, Chadi et Dina. Cela fait 6 choix.

Ici, l'**ordre ne compte pas** : « Adam et Basma » est le même choix que « Basma et Adam ».

Devine : Trois délégués parmi quatre

Dans le même groupe de quatre élèves, de combien de façons peut-on choisir trois délégués ?

A. 24
Faux.
$4 \times 3 \times 2$ compte des délégués rangés dans un ordre, par exemple par rôle.

B. 4
Juste.
Juste : choisir les trois délégués, c'est choisir l'élève qui ne l'est pas.

C. 12
Faux.
12 compte les couples (délégué, suppléant), pas des groupes de trois.

D. 64
Faux.
4^3 accepterait le même élève trois fois.

Correction
Un groupe de trois délégués est déterminé par l'élève laissé de côté : Adam, Basma, Chadi ou Dina. Il y a donc 4 groupes.

Contrôle : chaque groupe se range de $3! = 6$ façons, et l'on retrouve les listes ordonnées :

$$4 \times 6 = 24 = 4 \times 3 \times 2.$$

Combinaisons

Définition : Combinaisons

Soit E un ensemble fini de cardinal n ($n \in \mathbb{N}$) et p un entier tel que $0 \leq p \leq n$. Une **combinaison** de p éléments de E est une **partie** de E à p éléments. On note C_n^p le nombre de ces parties.

Dans une combinaison, l'**ordre ne compte pas** et les éléments sont **distincts**.

Un groupe de trois délégués, rangé de toutes les façons, donne $3!$ listes ordonnées.

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve compte les arrangements en deux temps : une partie, puis un ordre. Elle divise ensuite par $p!$.

Propriété : Calcul du nombre de combinaisons

Soit $n \in \mathbb{N}$ et p un entier tel que $0 \leq p \leq n$. Alors

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!},$$

et, si $p \geq 1$, $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$.

Démonstration

Étape 1. Soit E un ensemble de cardinal n. Pour $p = 0$, la seule partie de E à 0 élément est $\varnothing$: $C_n^0 = 1 = \dfrac{n!}{0!\,n!}$.

Étape 2. Soit $1 \leq p \leq n$. On construit un arrangement de p éléments de E en deux étapes : on choisit l'ensemble de ses éléments, partie de E à p éléments (C_n^p possibilités), puis l'ordre de ces éléments, permutation de cette partie ($p!$ possibilités d'après le nombre de permutations, quelle que soit la partie). Un arrangement détermine l'ensemble de ses éléments et leur ordre : il est obtenu par une seule suite de choix.

Étape 3. D'après le principe multiplicatif, $A_n^p = C_n^p \times p!$. Donc, par le nombre d'arrangements, $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Un arrangement, c'est **une partie, puis un ordre** sur cette partie. Le principe multiplicatif donne

$$A_n^p = C_n^p \times p!$$

Retiens ce double comptage : il sert chaque fois qu'on passe de l'ordonné au non ordonné.

Vérifie : Deux étapes

Dans la preuve, on construit un arrangement de p éléments en deux étapes. Lesquelles ?

A. D'abord un ordre sur E, puis p éléments.

Faux.

On choisit d'abord les éléments : l'ordre porte ensuite sur eux seuls.

B. Les p éléments un par un, sans revenir en arrière.

Faux.

Cela redonne l'arrangement directement, sans faire apparaître les parties.

C. D'abord la partie à p éléments, puis leur ordre.

Juste.

Juste : C_n^p parties, puis $p!$ ordres pour chacune.

D. Deux parties disjointes de E, dont on additionne les cardinaux.

Faux.

La preuve multiplie : elle n'additionne aucune partie.

Correction

On choisit d'abord l'ensemble des éléments de l'arrangement : une partie de E à p éléments, parmi C_n^p. Puis on range ces p éléments : $p!$ façons, quelle que soit la partie.

D'après le principe multiplicatif, $A_n^p = C_n^p \times p!$.

Quel modèle ?

Exemple : quelques valeurs

- $C_4^2 = \dfrac{4 \times 3}{2} = 6$: ce sont les six paires du groupe d'Adam, Basma, Chadi et Dina.
- $C_5^2 = \dfrac{5 \times 4}{2} = 10$ et $C_7^3 = \dfrac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$.
- Dans une classe de 30 élèves, on choisit 2 délégués : $C_{30}^2 = \dfrac{30 \times 29}{2} = 435$ possibilités.

Méthode : choisir le modèle

1. **Ordre et répétition possibles** : codes, mots, tirages successifs avec remise. Ce sont des p-listes : n^p.
2. **Ordre sans répétition** : classements, places, tirages successifs sans remise. Ce sont des arrangements : A_n^p, et $n!$ si l'on range tout.
3. **Ni ordre ni répétition** : comités, tirages simultanés. Ce sont des combinaisons : C_n^p.

4. **Vérifier** le modèle sur un tout petit cas, que l'on peut lister.

Exemple **: Exemple guidé : trois tirages dans une même urne**

Énoncé. Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6. On en tire trois. Combien de résultats dans chaque cas ?

(a) Successivement, avec remise. Ordre et répétition : 3-listes de $\{1, \dots, 6\}$, soit $6^3 = 216$ résultats.

(b) Successivement, sans remise. Ordre, sans répétition : arrangements, soit $A_6^3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$ résultats.

(c) Simultanément. Ni ordre ni répétition : parties à 3 éléments, soit $C_6^3 = \dfrac{120}{6} = 20$ résultats.

À toi, puis le coin devoir

Attention **: l'ordre compte-t-il ?**

✗ « Choisir un président et un trésorier parmi les 30 élèves : $C_{30}^2 = 435$ choix. »

✓ Les rôles distinguent les deux élus : échanger Adam et Dina change le bureau. L'ordre compte, et $A_{30}^2 = 30 \times 29 = 870$.

Avant de calculer, demande-toi si échanger deux éléments change l'objet compté.

À toi : Un comité dans une classe

Une classe compte 18 filles et 12 garçons. On forme un comité de 3 élèves. (a) Combien de comités ? (b) Combien comptent exactement 2 filles ? (c) Combien comptent au moins un garçon ? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Un comité est une partie de la classe : l'ordre ne compte pas.
Indice 2
Pour (b), choisis les deux filles, puis le garçon, et multiplie.
Indice 3
Point délicat : pour (c), passe par le contraire, « aucun garçon », plutôt que de choisir un garçon puis de compléter.

Réponse
(a) Tous les comités. Un comité est une partie à 3 éléments de la classe de 30 élèves. D'après le nombre de combinaisons :

$$C_{30}^{3} = \frac{30 \times 29 \times 28}{6} = 4060.$$

(b) Exactement 2 filles. On choisit 2 filles parmi 18, puis 1 garçon parmi 12. D'après le principe multiplicatif :

$$C_{18}^{2} \times C_{12}^{1} = 153 \times 12 = 1836.$$

(c) Au moins un garçon. Les comités sans garçon sont les parties à 3 éléments de l'ensemble des 18 filles : $C_{18}^{3} = 816$. Par le complémentaire, $4060 - 816 = 3244$ comités ont au moins un garçon.

Remarque : Coin devoir : rédiger un dénombrement

En devoir, un dénombrement se rédige comme une preuve. Écris : « L'ensemble dénombré est celui des tirages simultanés de 4 boules parmi 10, c'est-à-dire des parties à 4 éléments. L'ordre n'intervient pas et chaque boule sort une seule fois : ce sont des combinaisons. D'après la formule du nombre de combinaisons, il y en a $C_{10}^{4} = 210$. » Nomme toujours l'ensemble, le modèle et le résultat employé.

Symétrie, relation de Pascal

Choisir, c'est aussi exclure

Choisir 2 délégués parmi 5 élèves revient à choisir les 3 élèves qui ne le seront pas. À chaque choix des élus correspond un seul choix des exclus, et inversement.

On devine que les deux nombres sont égaux : la propriété qui suit le confirme par le calcul.

Devine : Sans calculer

Dans une classe de 30 élèves, compare C_{30}^{28} et C_{30}^{2}.

A. Ils sont égaux.
Juste.
Juste : choisir 28 élèves, c'est choisir les 2 qui restent.

B. C_{30}^{28} est bien plus grand.
Faux.
Choisir beaucoup d'élèves ne donne pas plus de groupes que choisir les exclus.

C. $C_{30}^{28} = 14 \times C_{30}^{2}$.
Faux.
Aucun facteur n'apparaît : à chaque groupe de 28 correspond un seul groupe de 2 exclus.

D. C_{30}^{28} est plus petit.

Faux.
Les deux comptages se correspondent un à un : aucun n'est plus petit.

Correction
À chaque groupe de 28 élèves correspond le groupe des 2 élèves restants, et inversement.

Les deux ensembles de groupes se correspondent par une bijection, donc $C_{30}^{28} = C_{30}^{2} = 435$.

Symétrie et relation de Pascal

Ces égalités se lisent par des choix. Prends la relation de Pascal, dans le groupe de quatre élèves Adam, Basma, Chadi et Dina.

Les 6 paires se séparent en deux paquets : les 3 paires qui contiennent Adam, et les 3 qui ne le contiennent pas. D'où $6 = 3 + 3$, c'est-à-dire

$$C_4^2 = C_3^1 + C_3^2.$$

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve, elle, n'utilise que la formule avec les factorielles. On réduit au même dénominateur, et les égalités viennent du calcul.

Propriété : Symétrie et relation de Pascal

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- $C_n^0 = C_n^n = 1$ et, si $n \geq 1$, $C_n^1 = n$.
- Pour tout entier p tel que $0 \leq p \leq n$: $C_n^{n-p} = C_n^p$.
- **Relation de Pascal** : si $n \geq 2$, pour tout entier p tel que $1 \leq p \leq n-1$,

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p.$$

Démonstration

Étape 1. D'après le calcul de C_n^p, $C_n^0 = C_n^n = \dfrac{n!}{0!\,n!} = 1$ et, si $n \geq 1$, $C_n^1 = \dfrac{n!}{1!\,(n-1)!} = n$.

Étape 2. De même, $C_n^{n-p} = \dfrac{n!}{(n-p)!\,\big(n-(n-p)\big)!} = \dfrac{n!}{(n-p)!\,p!} = C_n^p$.

Étape 3. Soit $1 \leq p \leq n-1$. On a $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = \dfrac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-p)!} + \dfrac{(n-1)!}{p!\,(n-1-p)!}$. Comme $p! = p \times (p-1)!$ et $(n-p)! = (n-p) \times (n-1-p)!$, au dénominateur commun $p!\,(n-p)!$, cette somme vaut $\dfrac{(n-1)!\,p + (n-1)!\,(n-p)}{p!\,(n-p)!} = \dfrac{n \times (n-1)!}{p!\,(n-p)!} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!} = C_n^p$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Les trois points se prouvent **par le calcul**, à partir de

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}.$$

Pour la relation de Pascal, le dénominateur commun est $p!\,(n-p)!$. Au numérateur, $p + (n-p) = n$ fait apparaître $n!$.

Vérifie : Pascal par des choix

Une classe compte n élèves ($n \geq 2$), dont Yasmine, et p est un entier tel que $1 \leq p \leq n-1$. Explique pourquoi les comités de p élèves sont au nombre de $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p}$, en séparant ceux qui contiennent Yasmine et les autres.

Indice 1
Si Yasmine est dans le comité, combien d'élèves reste-t-il à choisir, et parmi combien ?
Indice 2
Si elle n'y est pas, les p membres sont choisis parmi les $n-1$ autres élèves.
Indice 3
Les deux cas sont disjoints et couvrent tous les comités : c'est le principe additif qui conclut.

Réponse
Avec Yasmine. Les comités qui contiennent Yasmine s'obtiennent en choisissant les $p-1$ autres membres parmi les $n-1$ autres élèves : il y en a C_{n-1}^{p-1}.

Sans Yasmine. Les comités sans Yasmine sont des parties à p éléments des $n-1$ autres élèves : il y en a C_{n-1}^{p}.

Conclusion. Ces deux cas sont disjoints et couvrent tous les comités. D'après le principe additif :

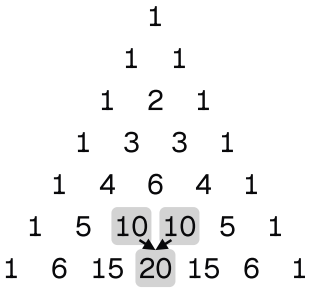
$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p}.$$

Exemple : le triangle de Pascal

Place C_n^p à la ligne n, en position p. Chaque ligne commence et finit par 1.

Chaque autre nombre est la somme de deux nombres de la ligne précédente : celui de même position p et celui de position $p-1$, c'est-à-dire $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p}$.

- Ligne 0 : 1
- Ligne 1 : $1, 1$
- Ligne 2 : $1, 2, 1$
- Ligne 3 : $1, 3, 3, 1$
- Ligne 4 : $1, 4, 6, 4, 1$
- Ligne 5 : $1, 5, 10, 10, 5, 1$
- Ligne 6 : $1, 6, 15, 20, 15, 6, 1$



Les lignes 0 à 6 du triangle de Pascal ; les cases teintées montrent que 20, à la ligne 6, est la somme des deux 10 de la ligne 5.

Calculer un coefficient

Méthode : calculer un coefficient binomial

1. **Simplifier** la fraction : au numérateur, garde les p plus grands facteurs de $n!$, soit $n(n-1)\cdots(n-p+1)$; au dénominateur, $p!$.
2. **Réduire** p grâce à la symétrie : remplace C_n^p par C_n^{n-p} si $n-p<p$.
3. **Construire** le triangle de Pascal quand il faut toute une ligne.

Exemple : trois façons de calculer

- Par la symétrie : $C_{10}^{8}=C_{10}^{2}=\dfrac{10\times 9}{2}=45$.
- Par la simplification : $C_9^4=\dfrac{9\times 8\times 7\times 6}{4\times 3\times 2\times 1}=126$.
- Par la relation de Pascal, sur la ligne 5 : $C_6^3=C_5^2+C_5^3=10+10=20$.

À toi : La ligne 7

À partir de la ligne 6 du triangle de Pascal, construis la ligne 7. Vérifie ensuite C_7^2 par la formule simplifiée. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
La ligne 7 commence et finit par 1 ; elle a 8 nombres.
Indice 2
Chaque nombre intérieur est la somme de deux nombres voisins de la ligne 6 : $1+6$, puis $6+15$, et ainsi de suite.
Indice 3
Point délicat : la ligne obtenue doit être symétrique ; sinon, une addition est fausse.

Réponse

Ligne 6. On part de $1, 6, 15, 20, 15, 6, 1$.

Ligne 7. Par la relation de Pascal, chaque nombre intérieur est la somme de deux voisins de la ligne 6 : la ligne 7 est $1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1$.

Vérification. D'après la formule simplifiée, $C_7^2 = \dfrac{7 \times 6}{2} = 21$. La ligne est bien symétrique, comme l'annonce la symétrie des coefficients.

Applications et parties d'un ensemble fini

Une image pour chaque élément

Une application de E dans F associe à **chaque** élément de E une image dans F. Pour en fabriquer une, on choisit les images une à une.

Par exemple, de $\{1, 2\}$ dans $\{a, b, c\}$: 3 choix pour l'image de 1, puis 3 pour celle de 2. Cela fait 9 applications.

Parmi ces 9 applications, 6 envoient 1 et 2 sur des éléments différents : on les appelle des injections. En notant $\big(f(1), f(2)\big)$, ce sont (a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a) et (c, b).

Devine : Des applications

Combien y a-t-il d'applications de $E = \{1, 2, 3\}$ dans $F = \{1, 2, 3, 4\}$?

A. 12

Faux.

3×4 ne correspond à aucune suite de choix : chaque élément de E a 4 images possibles.

B. 81

Faux.

C'est 3^4 : on a échangé les rôles de E et de F.

C. 24

Faux.

Ce nombre ne compte que les applications injectives.

D. 64

Juste.

Juste : 4 choix pour chacun des 3 éléments, soit 4^3.

Correction

Une application est déterminée par les images de 1, de 2 et de 3. Chacune se choisit parmi les 4 éléments de F, quels que soient les autres choix.

D'après le principe multiplicatif, le nombre d'applications est

$$4 \times 4 \times 4 = 64.$$

Applications, injections, bijections

Une application se résume à la liste de ses images.

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve met les applications en bijection avec les p-listes d'images. Les injections correspondent alors aux listes sans répétition, c'est-à-dire aux arrangements.

Propriété : Nombre d'applications, d'injections, de bijections

Soit E et F deux ensembles finis non vides, $p = \mathrm{card}(E)$ et $n = \mathrm{card}(F)$. On note $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble des applications de E dans F.

- $\mathrm{card}(\mathcal{F}(E, F)) = n^p$.
- Si $p \leq n$, le nombre d'applications injectives de E dans F est A_n^p ; si $p > n$, aucune application de E dans F n'est injective.
- Si $p = n$, toute injection de E dans F est une bijection, et le nombre de bijections de E sur F est $n!$.

Démonstration

Étape 1. Écrivons $E = \{x_1, \ldots, x_p\}$, les x_i étant deux à deux distincts. L'application $f \mapsto \big(f(x_1), \ldots, f(x_p)\big)$ est une bijection de $\mathcal{F}(E, F)$ sur F^p : une application est déterminée par les images des x_i, et toute p-liste en définit une. Par cardinal et bijection et le nombre de p-listes, $\mathrm{card}(\mathcal{F}(E, F)) = n^p$.

Étape 2. Comme les x_i sont distincts, f est injective si et seulement si la p-liste associée est un arrangement. Si $p \leq n$, cette bijection envoie les injections sur les arrangements : il y a A_n^p injections.

Étape 3. Si f est injective, f est une bijection de E sur $f(E)$, donc $\mathrm{card}(f(E)) = p$ (cardinal et bijection) ; comme $f(E) \subset F$, $p \leq n$ (cardinal du complémentaire) : si $p > n$, aucune injection. Si $p = n$, le cas d'égalité donne $f(E) = F$: f est bijective. Réciproquement, toute bijection est injective : il y a donc $A_n^n = n!$ bijections (nombre d'arrangements).

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le geste clé : **une application, c'est la liste de ses images**. Compter des applications revient à compter des p-listes, et compter des injections, des arrangements.

Le dernier point, « injective donc bijective » quand $p = n$, vient du cas d'égalité de la formule du complémentaire : si $f(E)$ a autant d'éléments que F, alors $f(E) = F$.

Vérifie : Aucune injection

Dans la preuve, pourquoi n'existe-t-il aucune injection de E dans F lorsque $p > n$?

A. Une injection f donne $\mathrm{card}(f(E)) = p$, et $f(E) \subset F$ impose $p \leq n$.

Juste.

Juste : une partie de F a au plus n éléments.

B. Parce que A_n^p vaut 0 quand $p > n$.

Faux.

A_n^p n'est pas défini pour $p > n$: la preuve raisonne sur les cardinaux.

C. Parce qu'on l'a vérifié sur un exemple.

Faux.

Un exemple ne prouve pas un énoncé général.

D. Parce qu'une injection doit toujours être surjective.

Faux.

Une injection n'est pas forcément surjective : l'identité de $\{1, 2\}$, vue de $\{1, 2\}$ dans $\{1, 2, 3\}$, est injective sans être surjective.

Correction

Si f est injective, f est une bijection de E sur $f(E)$. D'après le résultat sur les bijections, $\mathrm{card}(f(E)) = p$.

Or $f(E)$ est une partie de F : d'après la formule du complémentaire, $p \leq n$. Si $p > n$, aucune injection n'existe.

Exemples et piège

Exemple : de petits ensembles

- De $\{1, 2, 3\}$ dans $\{a, b\}$, il y a $2^3 = 8$ applications. Note chacune par la liste $\big(f(1), f(2), f(3)\big)$: (a, a, a), (a, a, b), (a, b, a), (a, b, b), (b, a, a), (b, a, b), (b, b, a), (b, b, b). Aucune n'est injective, car $3 > 2$.
- De $\{1, 2, 3\}$ dans $\{1, 2, 3, 4\}$, il y a $A_4^3 = 24$ injections.
- Les bijections de $\{1, 2, 3\}$ sur lui-même sont au nombre de $3! = 6$.

Attention : qui est en exposant ?

✗ « De $\{1, 2, 3, 4\}$ dans $\{1, 2, 3\}$, il y a $4^3 = 64$ applications. »

✓ On choisit une image dans l'ensemble d'**arrivée** pour **chaque** élément de départ. Ici, 4 éléments de départ ont chacun 3 images possibles : $3^4 = 81$ applications.

L'exposant est le cardinal de l'ensemble de départ.

Nombre de parties

Pour former une partie de E, on décide, élément par élément : dedans ou dehors ?

Pourquoi est-ce vrai ? Ce « oui ou non » est une application de E dans $\{0,1\}$. La preuve en fait une bijection, puis compte les parties selon leur nombre d'éléments.

Propriété : Nombre de parties d'un ensemble fini

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors

$$\operatorname{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n \quad \text{et} \quad C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n.$$

Démonstration

Étape 1. Si $n = 0$, $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$ a $1 = 2^0$ élément, et $C_0^0 = 1$. Supposons $n \geq 1$. À toute partie A de E, associons $\chi_A : E \to \{0,1\}$, qui vaut 1 sur A et 0 sur $\overline{A}$ (complémentaire dans E).

Étape 2. $A \mapsto \chi_A$ est une bijection de $\mathcal{P}(E)$ sur $\mathcal{F}(E,\{0,1\})$, de réciproque $g \mapsto g^{-1}(\{1\})$: en effet, $\chi_A^{-1}(\{1\}) = A$ et, comme g ne prend que les valeurs 0 et 1, $\chi_{g^{-1}(\{1\})} = g$. Par cardinal et bijection et le nombre d'applications, $\operatorname{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.

Étape 3. Toute partie de E est finie, de cardinal unique (résultat admis), compris entre 0 et n (cardinal du complémentaire). Les ensembles de parties à p éléments, $0 \leq p \leq n$, ont C_n^p éléments, sont deux à deux disjoints, de réunion $\mathcal{P}(E)$. Le principe additif donne $C_n^0 + \cdots + C_n^n = 2^n$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Une partie A de E est **codée** par χ_A : 1 pour les éléments de A, 0 pour les autres. Ce codage est une bijection, donc $\mathcal{P}(E)$ a autant d'éléments que $\mathcal{F}(E,\{0,1\})$.

Puis, en rangeant les parties selon leur cardinal, le principe additif donne la somme des C_n^p.

Vérifie : Décoder une partie

Dans la preuve, quelle partie de E la réciproque associe-t-elle à une application g de E dans $\{0,1\}$?

A. L'ensemble $g^{-1}(\{0\})$ des éléments d'image 0.
Faux.
C'est le complémentaire de la bonne partie : χ_A vaut 1 sur A.

B. L'image directe $g(E)$.
Faux.

$g(E)$ est une partie de $\{0,1\}$, pas de E.

C. L'ensemble $g^{-1}(\{1\})$ des éléments d'image 1.

Juste.

Juste : si $g=\chi_A$, alors $g^{-1}(\{1\})=A$.

D. L'ensemble E tout entier.

Faux.

Une seule partie pour toutes les applications : ce ne serait pas une bijection.

Correction

La réciproque associe à g la partie $g^{-1}(\{1\})$, formée des éléments que g envoie sur 1. Pour $g=\chi_A$, on retrouve A. C'est l'image réciproque du chapitre « Ensembles et applications ».

À toi

Exemple : parties de petits ensembles

- $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$ contient $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$ et $\{1,2,3\}$: $2^3=8$ parties. Rangées selon leur cardinal : $1+3+3+1=8$.
- Pour $\{1,2,3,4\}$: $C_4^0+C_4^1+C_4^2+C_4^3+C_4^4=1+4+6+4+1=16=2^4$.

À toi : Des parties sous condition

Soit $E=\{1,2,3,4\}$. (a) Combien de parties de E contiennent 1 ? (b) Combien ont au moins deux éléments ? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Pour (a), une partie qui contient 1 s'écrit $\{1\}\cup B$, avec B partie de $\{2,3,4\}$.

Indice 2

Pour (b), compte plutôt les parties à 0 ou 1 élément.

Indice 3

Point délicat : pour (a), vérifie que $B\mapsto\{1\}\cup B$ est une bijection, de réciproque $A\mapsto A\setminus\{1\}$.

Réponse

(a) Parties qui contiennent 1. L'application $B\mapsto\{1\}\cup B$ va de $\mathcal{P}(\{2,3,4\})$ dans l'ensemble des parties de E qui contiennent 1. Elle est bijective, de réciproque $A\mapsto A\setminus\{1\}$.

D'après le résultat sur les bijections et le nombre de parties, il y a $2^3=8$ telles parties.

(b) Au moins deux éléments. D'après le nombre de parties, E a $2^4=16$ parties. Celles qui ont moins de deux éléments sont $\varnothing$ et les 4 singletons. Par le complémentaire, $16-1-4=11$ parties ont au moins deux éléments.

Formule du binôme

Développer à la main

Tu connais $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Multiplie par $a+b$, puis regroupe : pour tous réels a et b,

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ &\quad + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.\end{aligned}$$

Les coefficients $1, 3, 3, 1$ sont ceux de la ligne 3 du triangle de Pascal. Ce n'est pas un hasard.

Devine : La puissance quatrième

Quels sont, dans l'ordre, les coefficients du développement de $(a+b)^4$ selon les puissances décroissantes de a ?

A. $1, 4, 4, 1$
Faux.
Il manque un terme : le développement en a cinq, de a^4 à b^4.

B. $1, 4, 6, 4, 1$
Juste.
Juste : c'est la ligne 4 du triangle de Pascal.

C. $1, 2, 3, 2, 1$
Faux.
Ces nombres ne s'obtiennent pas de la ligne 3 par la relation de Pascal.

D. $1, 1, 1, 1, 1$
Faux.
On a oublié que plusieurs produits donnent le même terme, comme a^2b^2.

Correction
En multipliant $(a+b)^3$ par $a+b$, chaque coefficient est la somme de deux coefficients voisins de $1, 3, 3, 1$. On obtient $1, 4, 6, 4, 1$:

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 \\ &\quad + 4ab^3 + b^4.\end{aligned}$$

La formule du binôme

Dans $(a+b)^3$, le terme $3a^2b$ regroupe trois produits : on prend b dans un seul des trois facteurs.

Pourquoi est-ce vrai ? La preuve procède par récurrence sur n. Le passage de n à $n+1$ additionne deux coefficients voisins : c'est la relation de Pascal.

Théorème : Formule du binôme

Soit a et b deux nombres réels et $n \in \mathbb{N}^*$. Avec la convention $x^0 = 1$ pour tout réel x :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p \, a^{n-p} b^p = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n.$$

La notation $\sum_{p=0}^{n}$ désigne la somme des termes obtenus pour p allant de 0 à n.

Démonstration

Étape 1 (initialisation). Pour $n = 1$: $C_1^0 a + C_1^1 b = a + b$.

Étape 2 (hérédité). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la formule soit vraie au rang n. Alors $(a+b)^{n+1} = (a+b)^n (a+b) = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n+1-p} b^p + \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^{p+1}$. En posant $q = p+1$, la seconde somme s'écrit $\sum_{q=1}^{n+1} C_n^{q-1} a^{n+1-q} b^q$.

Étape 3 (hérédité, suite). Regroupons les termes en $a^{n+1-p} b^p$. Pour $1 \leq p \leq n$, le coefficient est $C_n^p + C_n^{p-1} = C_{n+1}^p$ (relation de Pascal, car $n+1 \geq 2$). Les termes extrêmes sont $C_n^0 a^{n+1} = a^{n+1}$ (pour $p = 0$) et $C_n^n b^{n+1} = b^{n+1}$ (pour $q = n+1$) ; leurs coefficients valent $1 = C_{n+1}^0 = C_{n+1}^{n+1}$. La formule est vraie au rang $n+1$.

Étape 4 (conclusion). Par récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve est une **récurrence titrée** : initialisation, hérédité, conclusion.

Dans l'hérédité, on développe $(a+b)^n (a+b)$ en deux sommes. On décale l'indice de la seconde, $q = p+1$, puis on regroupe les termes de même forme. La relation de Pascal fait le reste.

Vérifie : Le regroupement

Dans l'hérédité, quel résultat permet d'écrire $C_n^p + C_n^{p-1} = C_{n+1}^p$?

A. La relation de Pascal.
Juste.
Juste : elle est appliquée au rang $n+1$.

B. La symétrie des coefficients binomiaux.
Faux.
La symétrie relie C_n^p à C_n^{n-p} : elle ne change pas de ligne.

C. Le nombre de parties d'un ensemble fini.
Faux.
Ce résultat donne la somme de toute une ligne, pas un coefficient.

D. L'hypothèse de récurrence.
Faux.

Elle sert à développer $(a+b)^n$; le regroupement des coefficients vient d'ailleurs.

Correction

La relation de Pascal, écrite au rang $n+1$, donne, pour $1 \leq p \leq n$:

$$C_{n+1}^{p} = C_{n}^{p-1} + C_{n}^{p}.$$

C'est exactement le coefficient de $a^{n+1-p}b^{p}$ après regroupement.

Exemple : Exemple et contre-exemple

Un exemple. Avec $a=1$, $b=x$ et $n=5$, la ligne 5 du triangle donne, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}(1+x)^5 &= 1 + 5x + 10x^2 \\ &\quad + 10x^3 + 5x^4 + x^5.\end{aligned}$$

Un piège. En général, $(a+b)^4 \neq a^4 + b^4$: pour $a=b=1$, le membre de gauche vaut $2^4 = 16$, celui de droite 2.

Utiliser la formule

Méthode : utiliser la formule du binôme

1. **Repérer** a, b et n, avec leurs signes.
2. **Écrire** le terme d'indice p, $C_n^p\, a^{n-p}b^p$, et le simplifier.
3. **Chercher un coefficient** : trouve le p qui donne la puissance demandée.
4. **Calculer une somme** de coefficients : remplace a et b par des valeurs bien choisies, comme 1 ou -1.

Exemple : Exemple guidé : un coefficient, puis un calcul

Énoncé. Dans $(1+x)^5$, quel est le coefficient de x^3 ? En déduire 11^5 sans calculatrice.

Terme général. Avec $a=1$, $b=x$ et $n=5$, le terme d'indice p est $C_5^p\, 1^{5-p}x^p = C_5^p x^p$.

Coefficient. La puissance x^3 correspond à $p=3$: le coefficient est $C_5^3 = 10$.

Calcul. Pour $x=10$, $1+x=11$, et les coefficients $1, 5, 10, 10, 5, 1$ donnent :

$$\begin{aligned}11^5 &= 1 + 50 + 1000 \\ &\quad + 10\,000 + 50\,000 \\ &\quad + 100\,000 \\ &= 161\,051.\end{aligned}$$

Conclusion. Le coefficient de x^3 est 10, et $11^5 = 161\,051$.

Exemple : des valeurs particulières

- Avec $a = b = 1$: $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$. On retrouve le nombre de parties d'un ensemble à n éléments.
- Avec $a = 1$ et $b = -1$, pour $n \geq 1$: $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \cdots + (-1)^n C_n^n = 0^n = 0$.
- Pour $n = 5$: $1 - 5 + 10 - 10 + 5 - 1 = 0$.

Un piège, à toi, le coin devoir

Attention : signes et nombre de termes

✗ « $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3$. »

✓ Écris $a - b = a + (-b)$: le terme d'indice p contient $(-b)^p = (-1)^p b^p$. Les signes alternent :

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Et compte les termes : il y en a $n+1$, ici 4.

À toi : Une puissance de 101

En utilisant le développement de $(a+b)^4$, calcule 101^4 sans calculatrice. Puis, dans le développement de $(x-1)^5$, donne le coefficient de x^2. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Écris $101 = 100 + 1$: prends $a = 100$ et $b = 1$.
Indice 2
Les coefficients sont ceux de la ligne 4 : $1, 4, 6, 4, 1$. Pour la seconde question, prends $a = x$, $b = -1$: le terme d'indice p contient $(-1)^p$.
Indice 3
Point délicat : $100^4 = 10^8$, $100^3 = 10^6$ et $100^2 = 10^4$; aligne bien les chiffres en additionnant.

Réponse
Calcul de 101^4. D'après la formule du binôme, avec $a = 100$, $b = 1$ et $n = 4$:

$$\begin{aligned} 101^4 &= 100^4 + 4 \times 100^3 \\ &\quad + 6 \times 100^2 \\ &\quad + 4 \times 100 + 1 \\ &= 100\,000\,000 \\ &\quad + 4\,000\,000 \\ &\quad + 60\,000 + 400 + 1 \\ &= 104\,060\,401. \end{aligned}$$

Coefficient de x^2. Pour $(x-1)^5$, avec $a=x$, $b=-1$ et $n=5$, le terme d'indice p est $C_5^p\,x^{5-p}(-1)^p$. On a $5-p=2$ pour $p=3$: le coefficient vaut

$$(-1)^3 C_5^3 = -10.$$

Conclusion. $101^4 = 104\,060\,401$, et le coefficient de x^2 dans $(x-1)^5$ est -10.

Remarque : Coin devoir : développer avec la formule du binôme

En devoir, cite la formule avant de calculer. Écris : « D'après la formule du binôme, avec $a=1$, $b=x$ et $n=5$: $(1+x)^5 = C_5^0 + C_5^1 x + C_5^2 x^2 + \cdots + C_5^5 x^5$. » Remplace ensuite chaque coefficient par sa valeur, lue sur le triangle de Pascal ou calculée. Ne saute pas la ligne des C_5^p : c'est elle qui montre la méthode.

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir : quel modèle pour quel dénombrement

- Compter par une **bijection** vers un ensemble connu, par **cas disjoints** en additionnant, ou par le **complémentaire** pour « au moins un ».
- Choix successifs : **principe multiplicatif**, si chaque étape offre un nombre de possibilités indépendant des choix déjà faits.
- Ordre et répétition : p-listes, n^p.
- Ordre sans répétition : arrangements, A_n^p ; tout ranger : $n!$.
- Ni ordre ni répétition : combinaisons, C_n^p.
- Applications de E dans F : $\mathrm{card}(F)^{\mathrm{card}(E)}$; parties de E : $2^{\mathrm{card}(E)}$.
- Coefficients binomiaux : symétrie $C_n^{n-p} = C_n^p$ et relation de Pascal $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$ pour $n \geq 2$ et $1 \leq p \leq n-1$.
- Puissance d'une somme : formule du binôme, coefficients lus sur le triangle de Pascal.

Le mot du prof. Tu sais maintenant changer une question « combien ? » en un ensemble bien décrit, puis le compter avec un résultat cité. Garde cette rigueur. La récurrence et les coefficients binomiaux te serviront encore, jusqu'à l'examen de 2BAC SM.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Dénombrement » (1bac · sciences-mathematiques · mathematiques)