BURHAN

Résumé : Calcul trigonométrique

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/calcul-trigonometrique/resume

Chapitre	Semestre
Calcul trigonométrique	Semestre 1

Cercle trigonométrique et angles orientés

À retenir : Le réflexe : un tour vaut 2π

Un tour complet du cercle mesure 2π. Deux réels qui diffèrent d'un multiple entier de 2π repèrent le même point de $\mathcal{C}$.

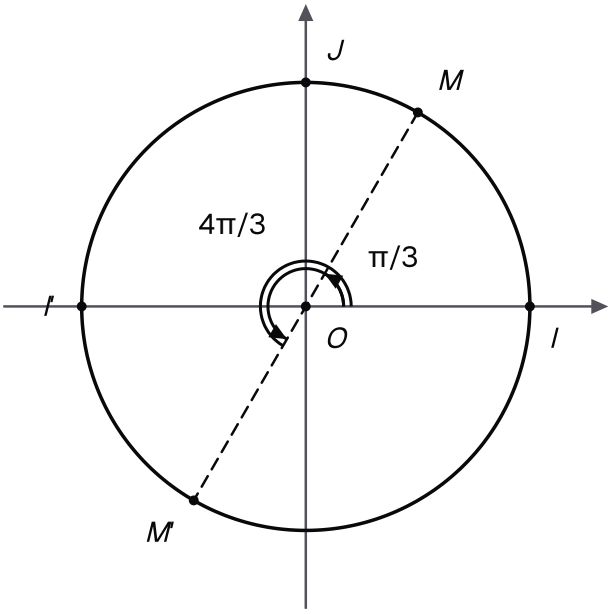
Pour comparer deux mesures d'un angle, calcule leur différence : si c'est $2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, c'est le même angle orienté.

Définition : Cercle trigonométrique et abscisses curvilignes

Dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le **cercle trigonométrique** $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 1, orienté dans le sens direct, d'origine le point I tel que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$. Sa longueur est 2π.

En enroulant la droite des réels sur $\mathcal{C}$ à partir de I, on associe à tout réel x un unique point M de $\mathcal{C}$: on dit que x est **une abscisse curviligne** de M.

- Tout point de $\mathcal{C}$ a des abscisses curvilignes ; si x en est une, ce sont exactement les réels $x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Une seule appartient à $]-\pi, \pi]$: l'**abscisse curviligne principale**.
- Les points d'abscisses curvilignes x et $x + \pi$ sont symétriques par rapport à O.
- Un point dont une abscisse curviligne appartient à $]0, \pi[$ a une ordonnée strictement positive ; à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, une première coordonnée strictement positive.



Un même point, plusieurs abscisses curvilignes : M est repéré par π/3 et par tout réel π/3 + 2kπ ; M', à un demi-tour, par 4π/3.

Remarque

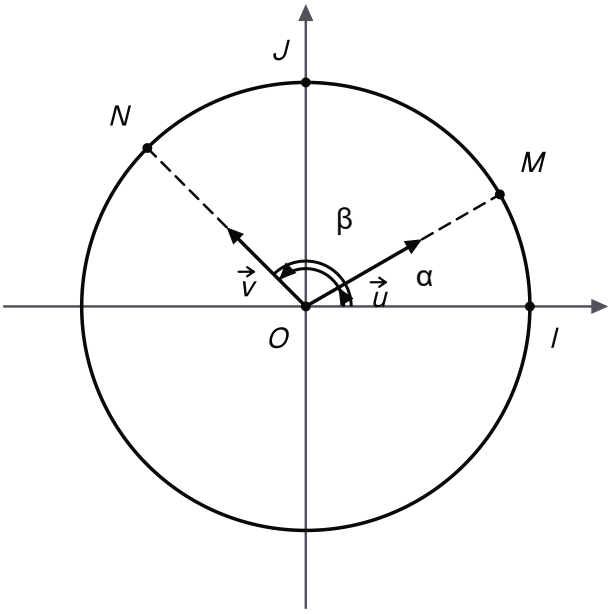
L'enroulement de la droite des réels sur $\mathcal{C}$ et ses propriétés sont **admis** : ils viennent du tronc commun et ne sont pas démontrés dans ce chapitre. C'est le cas de la position des points, au-dessus de l'axe des abscisses ou à droite de l'axe des ordonnées. Les mesures d'angles orientés et les lignes trigonométriques reposent sur eux.

Définition : Angle orienté de deux vecteurs ; mesures, mesure principale

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, et M, N les points de $\mathcal{C}$ tels que $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$ et $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$, d'abscisses curvilignes respectives α et β.

Le couple $(\vec{u}, \vec{v})$ définit un **angle orienté**, noté $(\vec{u}, \vec{v})$. Ses **mesures** sont les réels $\beta - \alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; on écrit $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \beta - \alpha \ [2\pi]$. Plus généralement, $x \equiv y \ [m]$ signifie qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = y + km$.

- Une seule mesure appartient à $]-\pi, \pi]$: la **mesure principale** de $(\vec{u}, \vec{v})$. Sa valeur absolue est la mesure, dans $[0, \pi]$, de l'angle géométrique formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- Si x est une abscisse curviligne d'un point M de $\mathcal{C}$, alors $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) \equiv x \ [2\pi]$.



Les points M et N associés aux vecteurs u et v, d'abscisses α et β : l'angle orienté de u vers v a pour mesure β − α.

Méthode : trouver la mesure principale

1. **Partir** d'une mesure θ de l'angle, par exemple une fraction de π.
2. **Retrancher des tours** : cherche l'entier k tel que $\theta - 2k\pi$ appartienne à $]-\pi, \pi]$. Pour $\theta = \dfrac{p\pi}{q}$, écris p près d'un multiple de $2q$.
3. **Contrôler** que le résultat appartient à $]-\pi, \pi]$: la borne $-\pi$ est exclue, la borne π est incluse.

Rédaction : « $\theta = \theta_0 + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $\theta_0 \in]-\pi, \pi]$, donc la mesure principale est θ_0 ».

Exemple

Énoncé. Donne la mesure principale d'un angle de mesure $\dfrac{47\pi}{6}$, puis d'un angle de mesure $-\dfrac{29\pi}{4}$.

Premier angle. On retire quatre tours :

$$\begin{aligned}\frac{47\pi}{6} &= \frac{48\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \\ &= 4 \times 2\pi - \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

La mesure principale est $-\dfrac{\pi}{6}$, qui appartient à $]-\pi, \pi]$.

Second angle. On ajoute quatre tours :

$$\begin{aligned}-\frac{29\pi}{4} &= -\frac{32\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} \\ &= -4 \times 2\pi + \frac{3\pi}{4}.\end{aligned}$$

La mesure principale est $\dfrac{3\pi}{4}$, qui appartient à $]-\pi, \pi]$.

Attention : La mesure principale appartient à]−π, π]

La mesure principale vit dans $]-\pi, \pi]$, pas dans $[0, 2\pi[$. Un angle de mesure $\frac{7\pi}{4}$ a pour mesure principale $\frac{7\pi}{4} - 2\pi = -\frac{\pi}{4}$.

De même, $-\pi$ n'est pas une mesure principale : la borne $-\pi$ est exclue, et c'est π qui convient.

Relation de Chasles, colinéarité, alignement

Propriété : Relation de Chasles

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$:

$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) \equiv (\vec{u}, \vec{w}) \ [2\pi].$$

Propriété : Conséquences de la relation de Chasles

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

- $(\vec{u}, \vec{u}) \equiv 0 \ [2\pi]$ et $(\vec{v}, \vec{u}) \equiv -(\vec{u}, \vec{v}) \ [2\pi]$;
- $(-\vec{u}, \vec{v}) \equiv (\vec{u}, \vec{v}) + \pi \ [2\pi]$, $(\vec{u}, -\vec{v}) \equiv (\vec{u}, \vec{v}) + \pi \ [2\pi]$ et $(-\vec{u}, -\vec{v}) \equiv (\vec{u}, \vec{v}) \ [2\pi]$;
- pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $(a\vec{u}, b\vec{v}) \equiv (\vec{u}, \vec{v}) \ [2\pi]$.

Propriété : Colinéarité et alignement

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens si et seulement si $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv 0 \ [2\pi]$; de sens contraires si et seulement si $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \pi \ [2\pi]$.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv 0 \ [\pi]$.

En particulier, trois points distincts A, B et C sont alignés si et seulement si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv 0 \ [\pi]$.

Exemple

Énoncé. Soit $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs non nuls tels que $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \frac{2\pi}{3} \ [2\pi]$ et $(\vec{w}, \vec{v}) \equiv -\frac{\pi}{4} \ [2\pi]$. Trouve la mesure principale de $(\vec{u}, \vec{w})$, puis celle de $(-\vec{u}, 3\vec{w})$.

Chasles. D'après les conséquences de la relation de Chasles (F04), $(\vec{v}, \vec{w}) \equiv \frac{\pi}{4} \ [2\pi]$. D'après la relation de Chasles (F03) :

$$\begin{aligned}(\vec{u},\vec{w}) &\equiv (\vec{u},\vec{v}) + (\vec{v},\vec{w}) \\ &\equiv \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{11\pi}{12}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Comme $\frac{11\pi}{12} \in\ ]-\pi,\pi]$, c'est la mesure principale.

Opposé et multiple. D'après F04, avec $3 > 0$:

$$\begin{aligned}(-\vec{u},3\vec{w}) &\equiv (\vec{u},\vec{w}) + \pi \\ &\equiv \frac{11\pi}{12} + \pi \\ &= \frac{23\pi}{12}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Or $\frac{23\pi}{12} > \pi$. La mesure principale est $\frac{23\pi}{12} - 2\pi = -\frac{\pi}{12}$.

Exemple

Énoncé. Les points A, B, C, D sont distincts, avec $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{5\pi}{8}\ [2\pi]$ et $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{11\pi}{8}\ [2\pi]$. Les points A, B, C sont-ils alignés ?

Chasles. D'après la relation de Chasles (F03) :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) &\equiv \frac{5\pi}{8} + \frac{11\pi}{8} \\ &= 2\pi\ [2\pi].\end{aligned}$$

Donc $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv 0\ [2\pi]$.

Conclure. En particulier $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv 0\ [\pi]$: d'après le critère d'alignement (F05), A, B, C sont alignés. Mieux, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont de même sens.

Cosinus, sinus et tangente d'un réel

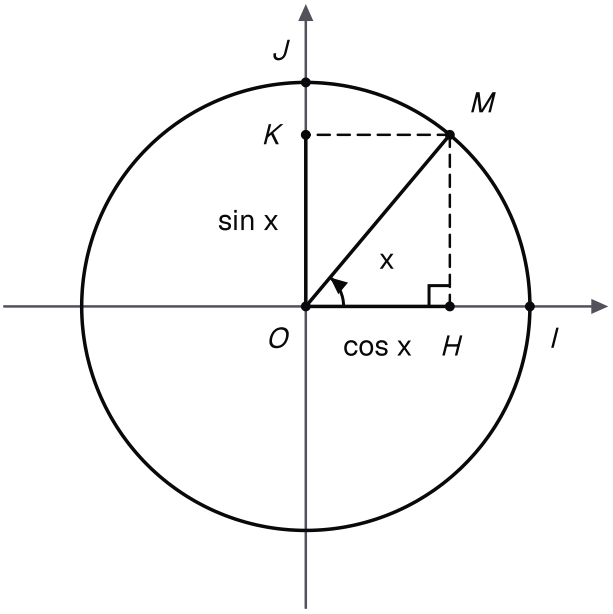
Définition : Cosinus, sinus et tangente d'un réel

Soit x un réel et M le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse curviligne x. Le **cosinus** et le **sinus** de x sont les coordonnées de M dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$:

$$\overrightarrow{OM} = \cos x\,\vec{i} + \sin x\,\vec{j}.$$

Pour tout réel x tel que $\cos x \neq 0$, la **tangente** de x est $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

Si θ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u},\vec{v})$, on appelle cosinus et sinus de cet angle les nombres $\cos\theta$ et $\sin\theta$; ils ne dépendent pas de la mesure choisie, car deux mesures diffèrent de $2k\pi$ et repèrent donc le même point de $\mathcal{C}$ (F01).



Cosinus et sinus d'un réel x : les deux coordonnées du point M du cercle, lues en H sur l'axe des abscisses et en K sur l'axe des ordonnées.

Propriété : Relations fondamentales et périodicité

Pour tout réel x et tout entier relatif k :

- $-1 \leq \cos x \leq 1, -1 \leq \sin x \leq 1$ et $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$;
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$;
- $\cos(x + \pi) = -\cos x$ et $\sin(x + \pi) = -\sin x$;
- si $\cos x \neq 0$: $\tan(x + k\pi) = \tan x$ et $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Cosinus et sinus de 0

$$\cos 0 = 1 \quad \sin 0 = 0$$

Cosinus et sinus de π/6

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

Cosinus et sinus de π/4

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Cosinus et sinus de π/3

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Cosinus et sinus de π/2

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Tangente de 0

$$\tan 0 = 0$$

Tangente de π/6

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Tangente de π/4

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

Tangente de π/3 (en π/2, tangente non définie)

$$\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

Méthode : une ligne trigonométrique à partir d'une autre

1. **Écrire** une relation fondamentale (F07) : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, ou $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ si $\cos x \neq 0$.
2. **Isoler** le carré inconnu : il donne deux valeurs opposées.
3. **Choisir le signe** avec l'intervalle qui contient x : il place le point de $\mathcal{C}$ dans un quart du cercle.
4. **Finir** par la troisième ligne, par quotient ou par produit.

Rédaction : « comme $x \in \ldots$, on a $\sin x < 0$, donc $\sin x = \ldots$ ».

Exemple

Énoncé. On sait que $x \in \left]-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\cos x = -\dfrac{5}{13}$. Calcule $\sin x$ et $\tan x$.

Carré. D'après la relation fondamentale (F07) :

$$\sin^2 x = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}.$$

Donc $\sin x = \dfrac{12}{13}$ ou $\sin x = -\dfrac{12}{13}$.

Signe. Pour $x \in \left]-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right[$, le point de $\mathcal{C}$ est sous l'axe des abscisses : $\sin x < 0$. Donc $\sin x = -\dfrac{12}{13}$.

Tangente. $\cos x \neq 0$, donc la tangente existe :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{12}{5}.$$

Attention : Pas de tangente sans cosinus non nul

Avant d'écrire $\tan x$, vérifie que $\cos x \neq 0$. Par exemple, $\tan\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$ n'existe pas, car $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 0$. La relation $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ porte la même condition.

Angles associés

Propriété : Angles associés

Pour tout réel x :

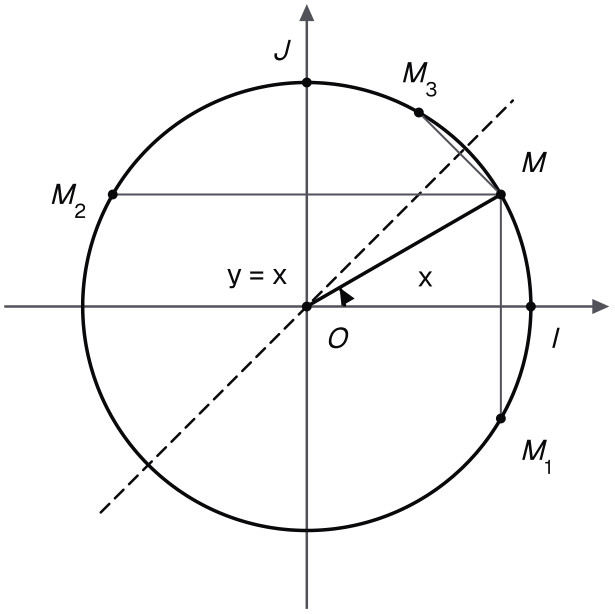
- $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$;
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$;
- $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$;

- $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$.

Lorsque $\cos x\neq 0$: $\tan(-x)=-\tan x$ et $\tan(\pi-x)=-\tan x$.

Remarque

Ces formules se lisent sur $\mathcal{C}$ par des symétries : par rapport à l'axe des abscisses pour $-x$, à l'axe des ordonnées pour $\pi-x$, à la droite d'équation $y=x$ pour $\frac{\pi}{2}-x$. Ces symétries du cercle sont **admises** : le cours en donne une esquisse, sans preuve complète.



Trois reflets de M sur le cercle : M_1 pour −x, M_2 pour π − x et M_3, sur la droite y = x prise comme axe, pour π/2 − x.

Méthode : simplifier avec les angles associés

1. **Réduire** chaque argument : retire les multiples de 2π par périodicité (F07), jusqu'à la forme $\pm x$, $\pi\pm x$ ou $\frac{\pi}{2}\pm x$.
2. **Appliquer** la formule d'angle associé (F08), en vérifiant le signe sur le cercle.
3. **Regrouper** les termes et simplifier.

Rédaction : « par périodicité (F07), $\sin(x+5\pi)=\sin(x+\pi)=-\sin x$ ».

Exemple

Énoncé. Simplifie, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} A = &\cos(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \\ &- \sin(x + 5\pi) \\ &- \cos\left(\frac{7\pi}{2} - x\right). \end{aligned}$$

Terme à terme. D'après les angles associés (F08), $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$. Par périodicité (F07), $\sin(x + 5\pi) = \sin(x + \pi) = -\sin x$. Enfin, par périodicité puis par les angles associés :

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) &= \cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \\ &= -\sin x. \end{aligned}$$

Regrouper. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} A &= -\cos x + \cos x \\ &\quad + \sin x + \sin x \\ &= 2\sin x. \end{aligned}$$

Une valeur. De même, $\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.

Formules d'addition

Théorème : Cosinus d'une différence

Pour tous réels a et b :

$$\begin{aligned} \cos(a - b) = &\cos a \cos b \\ &+ \sin a \sin b. \end{aligned}$$

Propriété : Formules d'addition

Pour tous réels a et b :

- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$;
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$;
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.

Propriété : Tangente d'une somme et d'une différence

Soit a et b deux réels tels que $\cos a \neq 0$ et $\cos b \neq 0$.

- Si $\cos(a + b) \neq 0$, alors $1 - \tan a \tan b \neq 0$ et $\tan(a + b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$.
- Si $\cos(a - b) \neq 0$, alors $1 + \tan a \tan b \neq 0$ et $\tan(a - b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$.

Méthode : calculer une valeur exacte

1. **Décomposer** l'angle avec des angles remarquables : une somme, une différence ($\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$) ou un double ($\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$).
2. **Nommer** la formule employée : addition (F09, F10, F11), duplication ou linéarisation (F12).
3. **Simplifier**, et justifier le signe avant d'extraire une racine carrée.

Rédaction : « d'après la formule d'addition F10, appliquée à $a = \dots$ et $b = \dots$ ».

Exemple

Énoncé. Calcule $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

Sinus. $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$. D'après la formule du sinus d'une somme (F10) :

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\quad + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Tangente. $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ sont non nuls. D'après la formule de la tangente d'une somme (F11) :

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} \\ &= \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{1 - 3} \\ &= \frac{4 + 2\sqrt{3}}{-2} \\ &= -2 - \sqrt{3}.\end{aligned}$$

Attention : cos(a + b) n'est pas cos a + cos b

Le cosinus ne se distribue pas sur une somme. Avec $a = b = \frac{\pi}{3}$: $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$, alors que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$.

Utilise la formule d'addition, avec ses deux produits.

Duplication, linéarisation, tangente de l'arc moitié

Propriété : Formules de duplication et de linéarisation

Pour tout réel a :

- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$;
- $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$;
- $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$ et $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$.

Si $\cos a \neq 0$ et $\cos(2a) \neq 0$: $\tan(2a) = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$.

Propriété : Expressions en fonction de tan(a/2)

Soit a un réel tel que $\cos\left(\dfrac{a}{2}\right) \neq 0$, et $t = \tan\left(\dfrac{a}{2}\right)$. Alors :

$$\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$
$$\sin a = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Si de plus $\cos a \neq 0$, alors $t^2 \neq 1$ et $\tan a = \dfrac{2t}{1-t^2}$.

Exemple

Énoncé. Calcule la valeur exacte de $\sin\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)$.

Linéariser. D'après la formule de linéarisation (F12), avec $a = \dfrac{3\pi}{8}$:

$$\begin{aligned}\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) &= \frac{1-\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)}{2} \\ &= \frac{1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{2} \\ &= \frac{2+\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Signe. $\dfrac{3\pi}{8} \in]0, \pi[$, donc $\sin\left(\dfrac{3\pi}{8}\right) > 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) &= \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.\end{aligned}$$

Exemple

Énoncé. Un réel a vérifie $\cos\left(\dfrac{a}{2}\right) \neq 0$ et $\tan\left(\dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{1}{3}$. Calcule $\cos a$, $\sin a$ et $\tan a$.

Expressions en fonction de t (F13). Avec $t = \dfrac{1}{3}$, on a $1 + t^2 = \dfrac{10}{9}$:

$$\cos a = \frac{\frac{8}{9}}{\frac{10}{9}} = \frac{4}{5},$$
$$\sin a = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{10}{9}} = \frac{3}{5}.$$

Tangente. $t^2 = \dfrac{1}{9} \neq 1$, donc $\cos a \neq 0$ et $\tan a = \dfrac{3}{4}$.

Remarque

Les formules en $t = \tan\left(\dfrac{a}{2}\right)$ exigent $\cos\left(\dfrac{a}{2}\right) \neq 0$. Elles ne disent donc rien des réels $a \equiv \pi\ [2\pi]$, pour lesquels $\cos a = -1$ et $\sin a = 0$. Quand tu résous une équation avec t, examine ces réels à part.

Produits et sommes

Propriété : Transformation d'un produit en somme

Pour tous réels a et b :

- $\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$;
- $\sin a \sin b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$;
- $\sin a \cos b = \dfrac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$.

Propriété : Transformation d'une somme en produit

Pour tous réels p et q :

- $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$;
- $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$;
- $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$;
- $\sin p - \sin q = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$.

Méthode : somme en produit, produit en somme

1. **Repérer** la forme : somme ou différence de deux cosinus, de deux sinus, ou bien produit de deux lignes.
2. **Choisir** : la transformation d'une somme en produit (F15) sert à factoriser ; celle d'un produit en somme (F14), à linéariser.
3. **Simplifier** les demi-somme et demi-différence $\dfrac{p+q}{2}$ et $\dfrac{p-q}{2}$.

4. **Exploiter** la forme obtenue : signe, équation produit nul, valeur exacte.

Rédaction : « d'après la formule somme-produit (F15), avec $p = \dots$ et $q = \dots$ ».

Exemple

Énoncé. Factorise, pour tout réel x, l'expression $\sin(5x) - \sin x$.

Différence de deux sinus (F15). Avec $p = 5x$ et $q = x$: $\dfrac{p+q}{2} = 3x$ et $\dfrac{p-q}{2} = 2x$. Donc, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&\sin(5x) - \sin x \\ &= 2\cos(3x)\sin(2x).\end{aligned}$$

Exploiter. L'expression s'annule si et seulement si $\cos(3x) = 0$ ou $\sin(2x) = 0$.

Exemple

Énoncé. Calcule $P = \sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Produit en somme (F14). Avec $a = \dfrac{5\pi}{12}$ et $b = \dfrac{\pi}{12}$: $a + b = \dfrac{\pi}{2}$ et $a - b = \dfrac{\pi}{3}$.

$$\begin{aligned}P &= \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{2+\sqrt{3}}{4}.\end{aligned}$$

Transformer a cos x + b sin x

Théorème : **Transformation de a cos x + b sin x**

Soit a et b deux réels non tous deux nuls, et $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Il existe un réel φ tel que

$$\begin{aligned}\cos\varphi &= \frac{a}{r}, \\ \sin\varphi &= \frac{b}{r},\end{aligned}$$

et, pour tout réel x :

$$a\cos x + b\sin x = r\cos(x - \varphi).$$

Méthode : **écrire r cos(x − φ)**

1. **Calculer** $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$.
2. **Factoriser** par r : $a\cos x + b\sin x = r\left(\dfrac{a}{r}\cos x + \dfrac{b}{r}\sin x\right)$.

3. **Trouver** φ par ses **deux** lignes : $\cos\varphi = \dfrac{a}{r}$ et $\sin\varphi = \dfrac{b}{r}$. Une seule des deux ne suffit pas.
4. **Conclure** par le cosinus d'une différence (F09) : $a\cos x + b\sin x = r\cos(x - \varphi)$.

Rédaction : « $\cos\varphi = \ldots$ et $\sin\varphi = \ldots$, donc on peut prendre $\varphi = \ldots$ ».

Exemple

Énoncé. Écris $\cos x - \sqrt{3}\sin x$ sous la forme $r\cos(x - \varphi)$, puis donne ses valeurs extrêmes.

Rayon. $a = 1, b = -\sqrt{3}$, donc $r = \sqrt{1+3} = 2$.

Angle. $\cos\varphi = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\varphi = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$: on prend $\varphi = -\dfrac{\pi}{3}$. Ainsi, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&\cos x - \sqrt{3}\sin x\\ &= 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right).\end{aligned}$$

Extrêmes. La valeur maximale 2 est atteinte pour $x \equiv -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$, la valeur minimale -2 pour $x \equiv \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

À retenir : Les valeurs prises par a cos x + b sin x

Point important : pour tout réel x, $-r \leq a\cos x + b\sin x \leq r$, et les deux bornes sont atteintes.

L'équation $a\cos x + b\sin x = c$ a donc des solutions si et seulement si $|c| \leq r$. Par exemple, $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 3$ n'en a aucune, car $3 > 2$.

Équations trigonométriques

Propriété : Annulation du sinus et du cosinus

Pour tout réel y :

- $\sin y = 0$ si et seulement si $y \equiv 0\ [\pi]$;
- $\cos y = 0$ si et seulement si $y \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.

Théorème : Équations cos x = cos α, sin x = sin α, tan x = tan α

Soit α un réel. Pour tout réel x :

- $\cos x = \cos\alpha$ si et seulement si $x \equiv \alpha\ [2\pi]$ ou $x \equiv -\alpha\ [2\pi]$;
- $\sin x = \sin\alpha$ si et seulement si $x \equiv \alpha\ [2\pi]$ ou $x \equiv \pi - \alpha\ [2\pi]$;
- lorsque $\cos\alpha \neq 0$ et $\cos x \neq 0$: $\tan x = \tan\alpha$ si et seulement si $x \equiv \alpha\ [\pi]$.

Méthode : résoudre une équation trigonométrique

1. **Conditions.** Écris les conditions d'existence : un cosinus non nul pour chaque tangente, un dénominateur non nul.
2. **Forme de référence.** Ramène-toi à $\cos X = \cos\alpha$, $\sin X = \sin\alpha$ ou $\tan X = \tan\alpha$: valeur remarquable, formule de transformation, équation du second degré en $\cos x$ ou $\sin x$, forme $r\cos(x-\varphi)$.
3. **Toutes les familles.** Applique le théorème des équations (F18), écris chaque famille avec « $k \in \mathbb{Z}$ ». Divise une congruence avec son module.
4. **Sélectionner** dans l'intervalle demandé : encadre l'entier k, puis écris l'ensemble S.

Rédaction : « donc $S = \{\dots\}$ », avec l'ensemble de résolution.

Exemple

Énoncé. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(2x) = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Théorème des équations (F18). L'équation équivaut à $2x \equiv x - \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$ ou $2x \equiv -x + \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Isoler. La première donne $x \equiv -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$. La seconde donne $3x \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$, soit $x \equiv \dfrac{\pi}{9}\ \left[\dfrac{2\pi}{3}\right]$.

Conclure. $S = \left\{-\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{2k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exemple

Énoncé. Résous dans $]-\pi, \pi]$ l'équation $\tan(2x) = -1$.

Conditions. Il faut $\cos(2x) \neq 0$. On a $-1 = \tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$ et $\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) \neq 0$.

Théorème des équations (F18). L'équation équivaut à $2x \equiv -\dfrac{\pi}{4}\ [\pi]$, soit $x = -\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Ces réels vérifient $\cos(2x) = \cos\left(-\dfrac{\pi}{4} + k\pi\right) \neq 0$.

Sélectionner. $-\pi < -\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2} \leq \pi$ équivaut à $-\dfrac{7}{4} < k \leq \dfrac{9}{4}$, donc $k \in \{-1, 0, 1, 2\}$.

Conclure. $S = \left\{-\dfrac{5\pi}{8}, -\dfrac{\pi}{8}, \dfrac{3\pi}{8}, \dfrac{7\pi}{8}\right\}$.

Attention : Écrire toutes les familles de solutions

L'équation $\sin x = \sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ a **deux** familles de solutions : $x \equiv \dfrac{\pi}{5}\ [2\pi]$ et $x \equiv \dfrac{4\pi}{5}\ [2\pi]$.

Si tu oublies la seconde, tu perds des solutions. Seule une équation en tangente donne une famille unique, modulo π.

Attention : Diviser une congruence : diviser aussi le module

De $4x \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$, on tire $x \equiv \frac{\pi}{12}\ \left[\frac{\pi}{2}\right]$: le module se divise aussi par 4.

Dans $[0, 2\pi[$, cela donne quatre solutions, $\frac{\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{12}$, $\frac{13\pi}{12}$ et $\frac{19\pi}{12}$, et non une seule.

Inéquations trigonométriques

Méthode : résoudre une inéquation trigonométrique

1. **Nommer l'intervalle d'étude**, par exemple $]-\pi, \pi]$ ou $[0, 2\pi[$.
2. **Résoudre l'équation associée** sur cet intervalle.
3. **Lire** les arcs de $\mathcal{C}$, ou la courbe de $\cos$ ou de $\sin$, qui conviennent. Pour un produit ou un quotient, dresse un tableau de signes.
4. **Conclure** par une réunion d'intervalles, chaque borne incluse ou exclue.

Rédaction : « sur $]-\pi, \pi]$, l'inéquation équivaut à … ; donc $S = \dots$ ».

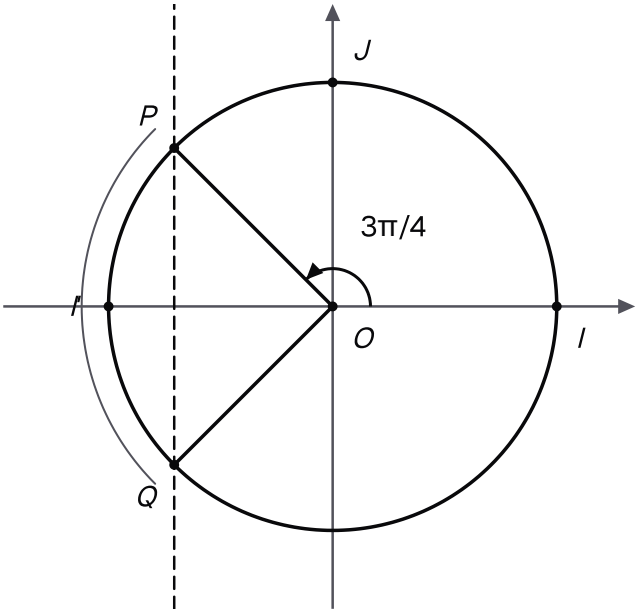
Exemple

Énoncé. Résous dans $]-\pi, \pi]$ l'inéquation $2\cos x + \sqrt{2} < 0$.

Équation associée. L'inéquation équivaut à $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$. D'après le théorème des équations, sur $]-\pi, \pi]$, $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ pour $x = -\frac{3\pi}{4}$ ou $x = \frac{3\pi}{4}$.

Lire. Les points de $\mathcal{C}$ d'abscisse strictement inférieure à $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ forment l'arc qui contient le point d'abscisse curviligne π.

Conclure. $S = \left]-\pi, -\frac{3\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$: π est inclus, car $\cos \pi = -1$.



L'arc solution de 2cos x + √2 < 0 sur]−π, π] : les points strictement à gauche de la droite pointillée, autour de I', extrémités P et Q exclues.

Exemple

Énoncé. Résous dans $[0, 2\pi[$ l'inéquation $\sin x\,(2\cos x - 1) \geq 0$.

Signes. Sur $[0, 2\pi[$, $\sin x$ s'annule en 0 et π ; il est positif sur $[0, \pi]$. Le facteur $2\cos x - 1$ s'annule en $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$; il est strictement négatif entre ces deux réels.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{5\pi}{3}$		2π
$\sin x$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$2\cos x - 1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
produit	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Conclure. $S = \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\pi, \frac{5\pi}{3}\right]$.

Attention : Inéquation : l'intervalle d'abord

L'ensemble des solutions dépend de l'intervalle d'étude.

Sur $]-\pi, \pi]$, $\sin x \geq -\frac{1}{2}$ donne $\left]-\pi, -\frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{6}, \pi\right]$.

Sur $[0, 2\pi[$, la même inéquation donne $\left[0, \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right[$.

À retenir : Coin devoir : les formes de questions

> Un devoir surveillé enchaîne des questions types :
>
> - « Montrer que » : une identité, rédigée en nommant chaque formule.
> - « En déduire une valeur exacte » : réutilise l'identité, puis justifie le signe.
> - « Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans un intervalle » : toutes les familles, puis l'encadrement de k.
> - « Étudier le signe » : un tableau, puis une réunion d'intervalles.

Rédige chaque réponse comme une courte preuve. Annonce la formule par son nom, vérifie ses conditions, puis conclus par une phrase.

Une équation se termine par l'ensemble S des solutions, avec l'ensemble où tu as résolu. Une valeur exacte reste exacte : aucune valeur approchée ne la remplace.