BURHAN

Calcul trigonométrique : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/calcul-trigonometrique/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul trigonométrique	Niveau examen	5

Exercice 1 — 8 pts

Problème : Une somme de trois sinus

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x + \sin(2x) + \sin(3x)$.

1. — 1 pts

Montrer que, pour tout réel x, $\sin x + \sin(3x) = 2\sin(2x)\cos x$.

INDICE

Quelle formule transforme une somme de deux sinus en produit ?

2. — 1 pts

En déduire que, pour tout réel x, $f(x) = \sin(2x)\,(2\cos x + 1)$.

3. — 0,75 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin(2x) = 0$.

4. — 0,75 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2\cos x + 1 = 0$.

5. — 1 pts

En déduire les solutions dans $]-\pi, \pi]$ de l'équation $f(x) = 0$.

6. — 1 pts

Étudier le signe de $\sin(2x)$, puis celui de $2\cos x + 1$, pour $x \in]-\pi, \pi]$.

INDICE

Quand x parcourt $]-\pi, \pi]$, quel intervalle parcourt $2x$?

7. — 1,5 pts

Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'inéquation $f(x) \geq 0$.

INDICE

Dresse un tableau de signes des deux facteurs. L'inégalité est large.

8. — 1 pts

Calculer la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$, puis celle de $f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

INDICE

Écris $\dfrac{\pi}{12}$ comme différence de deux angles remarquables, puis réutilise la question 2.

Exercice 2 8 pts

Problème : Le cosinus de π/5

Dans ce problème, on pose $a = \dfrac{\pi}{5}$. Aucune calculatrice n'est utilisée : tous les résultats sont des valeurs exactes.

1. 0,5 pts

Vérifier que $3a = \pi - 2a$, puis en déduire que $\sin(3a) = \sin(2a)$.

2. a) 1 pts

Montrer que, pour tout réel x, $\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

INDICE

Écris $3x = 2x + x$.

2. b) 1 pts

En déduire que $4\cos^2 a - 2\cos a - 1 = 0$.

INDICE

Combine la question 1, la question 2. a) et une formule de duplication. Justifie avant de diviser.

3. 1 pts

En déduire que $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

INDICE

Quelle équation du second degré le réel $\cos a$ vérifie-t-il ? Choisis la racine par son signe.

4. 1 pts

Calculer la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

5. 0,5 pts

En déduire la valeur exacte de $\sin\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$.

6. 1 pts

Résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'équation $\cos x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

7. 1 pts

Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'équation $4\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0$.

INDICE

Les deux valeurs possibles de $\cos x$ sont connues. Pour la valeur négative, pense à un angle associé.

8. 1 pts

Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'équation $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$.

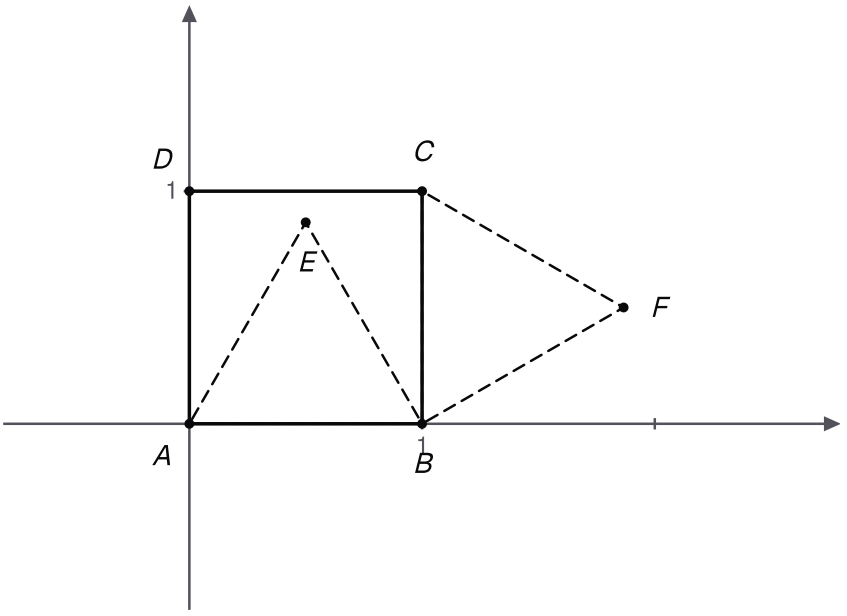
Exercice 3 — 8 pts

Problème : Un carré, deux triangles équilatéraux, un alignement

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points :

- $A(0,0), B(1,0), C(1,1), D(0,1)$;
- $E\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $F\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Le quadrilatère $ABCD$ est un carré. On veut montrer que D, E et F sont alignés.



Les données dans le repère : le carré ABCD de côté 1, et les points E et F, troisièmes sommets des triangles ABE et BCF.

1. — 1 pts

Montrer que les triangles ABE et BCF sont équilatéraux.

2. — 1 pts

Montrer que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et que $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BF}) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

INDICE

Lis chaque angle sur un vecteur unitaire, avec la définition du cosinus et du sinus.

3. a) — 1 pts

Calculer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

3. b) 1 pts

Vérifier que :

$$\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2-\sqrt{3},$$

$$\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2+\sqrt{3}.$$

4. a) 1,25 pts

Montrer que :

$$\overrightarrow{DE} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \times \left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)\vec{i} + \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\vec{j}\right).$$

INDICE

Compare les coordonnées des deux membres, une à une.

4. b) 1,25 pts

Montrer de même que :

$$\overrightarrow{DF} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \times \left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)\vec{i} + \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\vec{j}\right).$$

5. 1 pts

En déduire une mesure de $(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF})$, puis que les points D, E et F sont alignés. Préciser la position de E.

6. 0,5 pts

Déterminer la mesure principale de $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DE})$.

Exercice 4 — 8 pts

Problème : Une somme de puissances quatrièmes

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\sin(4x)$.

1. — 1 pts

Montrer que, pour tout réel x, $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2(2x)$.

INDICE

Développe le carré de $\cos^2 x + \sin^2 x$.

2. — 1 pts

En déduire que, pour tout réel x, $\cos^4 x + \sin^4 x = \dfrac{3 + \cos(4x)}{4}$.

3. — 1 pts

Montrer que, pour tout réel X, $\cos X - \sqrt{3}\sin X = 2\cos\left(X + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

4. — 0,75 pts

En déduire que, pour tout réel x :

$$f(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right).$$

5. — 1 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 1$.

6. — 0,75 pts

En déduire les solutions dans $[0, \pi]$ de l'équation $f(x) = 1$.

7. — 1,5 pts

Résoudre dans $[0, \pi]$ l'inéquation $f(x) \leq \dfrac{1}{2}$.

INDICE

Pose $X = 4x + \dfrac{\pi}{3}$: détermine l'intervalle que parcourt X, puis les valeurs de X qui conviennent.

8. — 1 pts

Calculer $f\left(\dfrac{\pi}{24}\right)$ à l'aide de la question 4, puis en déduire, à l'aide de la définition de f, la valeur exacte de $\cos^4\left(\dfrac{\pi}{24}\right) + \sin^4\left(\dfrac{\pi}{24}\right)$. Contrôler le résultat avec la question 2.

INDICE

Utilise d'une part la question 4, d'autre part la définition de f.

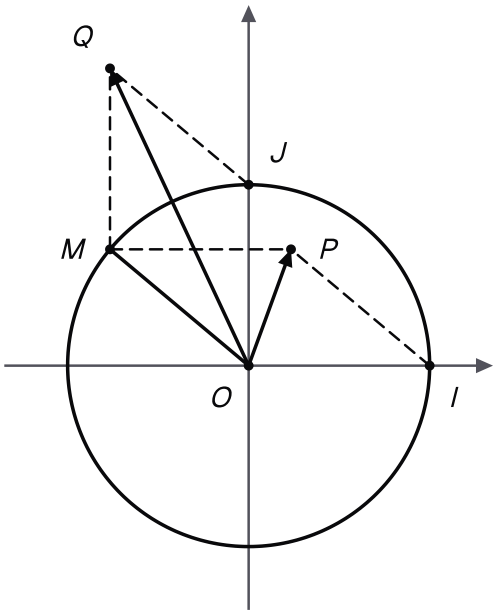
Exercice 5 — 8 pts

Problème : Deux sommes de vecteurs et un angle constant

Dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on note $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique, et I, J les points tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$.

Soit x un réel de $\left]-\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ et M le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse curviligne x. On définit les points P et Q par :

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OM},$$
$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{OM}.$$



La construction de l'énoncé pour une valeur de x : P complète le parallélogramme OIPM, et Q complète le parallélogramme OJQM.

1. — 1 pts

Montrer que :

$$\overrightarrow{OP} = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\vec{i} + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\vec{j}\right).$$

2. — 1 pts

Montrer que :

$$\overrightarrow{OQ} = 2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \times \left(\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\vec{i} + \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\vec{j}\right).$$

INDICE

Écris $0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$, puis transforme chaque somme en produit.

3. 1 pts

Justifier que $\cos\left(\frac{x}{2}\right) > 0$ et que $\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) > 0$. En déduire que $(\vec{i}, \overrightarrow{OP}) \equiv \frac{x}{2}\ [2\pi]$ et que $(\vec{i}, \overrightarrow{OQ}) \equiv \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

4. 0,75 pts

En déduire que $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$, quel que soit le réel x de $\left]-\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

5. 0,75 pts

Montrer que $OP^2 = 2 + 2\cos x$ et que $OQ^2 = 2 + 2\sin x$.

6. 0,75 pts

Montrer que $OP^2 - OQ^2 = -2\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

INDICE

Écris $\sin x$ comme le cosinus d'un angle associé, puis transforme une différence de deux cosinus.

7. 1 pts

Déterminer les réels x de $\left]-\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ tels que $OP = OQ$.

8. 1 pts

Résoudre dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ l'inéquation $OP \geq OQ$.

9. 0,75 pts

Montrer que la mesure principale de $(\overrightarrow{PO}, \overrightarrow{PQ})$ est $-\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$. Donner sa valeur lorsque le triangle OPQ est isocèle en O.

INDICE

Exprime $\overrightarrow{PQ}$ à l'aide de $\vec{i}$ et de $\vec{j}$: ce vecteur ne dépend pas de x.