BURHAN

Calcul trigonométrique : exercices, niveau examen

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/calcul-trigonometrique/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul trigonométrique	Niveau examen	5

Exercice 1 8 pts

Problème : Une somme de trois sinus

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x + \sin(2x) + \sin(3x)$.

1. 1 pts

Montrer que, pour tout réel x, $\sin x + \sin(3x) = 2\sin(2x)\cos x$.

INDICE

Quelle formule transforme une somme de deux sinus en produit ?

CORRIGÉ

Soit x un réel. On applique la formule de la somme de deux sinus (F15), avec $p = 3x$ et $q = x$:

$$\frac{p+q}{2} = 2x, \qquad \frac{p-q}{2} = x.$$

Donc $\sin(3x) + \sin x = 2\sin(2x)\cos x$.

Conclusion. Pour tout réel x, $\sin x + \sin(3x) = 2\sin(2x)\cos x$.

2. 1 pts

En déduire que, pour tout réel x, $f(x) = \sin(2x)\,(2\cos x + 1)$.

CORRIGÉ

Soit x un réel. D'après la question 1, puis en mettant $\sin(2x)$ en facteur :

$$\begin{aligned} &f(x) \\ &= 2\sin(2x)\cos x + \sin(2x) \\ &= \sin(2x)\,(2\cos x + 1). \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $f(x) = \sin(2x)\,(2\cos x + 1)$.

3. 0,75 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin(2x) = 0$.

CORRIGÉ

D'après l'annulation du sinus (F17), $\sin(2x) = 0$ équivaut à $2x \equiv 0\ [\pi]$. En divisant par 2, le module aussi (W04) : $x \equiv 0\ \left[\frac{\pi}{2}\right]$.

Conclusion. Dans $\mathbb{R}$, $S = \left\{ \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

4. 0,75 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2\cos x + 1 = 0$.

CORRIGÉ

L'équation équivaut à $\cos x = -\dfrac{1}{2} = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

D'après le théorème des équations $\cos x = \cos\alpha$ (F18) :

$$x \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$$

ou

$$x \equiv -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi].$$

Conclusion. Dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} S &= \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \\ &\cup \left\{-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}. \end{aligned}$$

5. 1 pts

En déduire les solutions dans $]-\pi, \pi]$ de l'équation $f(x) = 0$.

CORRIGÉ

D'après la question 2, $f(x) = 0$ équivaut à $\sin(2x) = 0$ ou $2\cos x + 1 = 0$: un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

Première famille (question 3). Soit $k \in \mathbb{Z}$. On a $-\pi < \dfrac{k\pi}{2} \leq \pi$ si et seulement si $-2 < k \leq 2$. On obtient $-\dfrac{\pi}{2}$, 0, $\dfrac{\pi}{2}$ et π.

Autres familles (question 4). Chacune a un seul élément dans $]-\pi, \pi]$: $-\dfrac{2\pi}{3}$ et $\dfrac{2\pi}{3}$.

Conclusion. Dans $]-\pi, \pi]$:

$$\begin{aligned} S = \Big\{&-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, 0, \\ &\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi\Big\}. \end{aligned}$$

6. 1 pts

Étudier le signe de $\sin(2x)$, puis celui de $2\cos x + 1$, pour $x \in]-\pi, \pi]$.

INDICE

Quand x parcourt $]-\pi, \pi]$, quel intervalle parcourt $2x$?

CORRIGÉ

Signe de $\sin(2x)$. Pour $x \in]-\pi, \pi]$, on a $2x \in]-2\pi, 2\pi]$. Sur cet intervalle, le sinus est strictement positif sur $]-2\pi, -\pi[$ et sur $]0, \pi[$, strictement négatif sur $]-\pi, 0[$ et sur $]\pi, 2\pi[$. Donc :

- $\sin(2x) > 0$ pour $x \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$;
- $\sin(2x) < 0$ pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

Signe de $2\cos x + 1$. On a $2\cos x + 1 > 0$ si et seulement si $\cos x > -\frac{1}{2}$. Sur le cercle, c'est l'arc qui contient I, entre les points d'abscisses curvilignes $-\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$. Donc :

- $2\cos x + 1 > 0$ sur $\left]-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right[$;
- $2\cos x + 1 < 0$ sur $\left]-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$.

7. 1,5 pts

Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'inéquation $f(x) \geq 0$.

INDICE

Dresse un tableau de signes des deux facteurs. L'inégalité est large.

CORRIGÉ

On utilise la factorisation de la question 2, les signes de la question 6 et les zéros de la question 5 (méthode M08).

x	$-\pi$		$-\frac{2\pi}{3}$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$\sin(2x)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	0
$2\cos x + 1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0

L'inégalité est large : les zéros de f sont des solutions.

Conclusion. Dans $]-\pi, \pi]$:

$$S = \left[-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right].$$

8. 1 pts

Calculer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, puis celle de $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

INDICE

Écris $\frac{\pi}{12}$ comme différence de deux angles remarquables, puis réutilise la question 2.

CORRIGÉ

Valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$. On a $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$. D'après la formule du cosinus d'une différence (F09), avec $a = \frac{\pi}{3}$ et $b = \frac{\pi}{4}$:

$$\begin{aligned}&\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Valeur de $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$. D'après la question 2, avec $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}&f\left(\frac{\pi}{12}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + 1\right)\\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+2}{4}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+2}{4}$.

Exercice 2 8 pts

Problème : Le cosinus de π/5

Dans ce problème, on pose $a = \dfrac{\pi}{5}$. Aucune calculatrice n'est utilisée : tous les résultats sont des valeurs exactes.

1. 0,5 pts

Vérifier que $3a = \pi - 2a$, puis en déduire que $\sin(3a) = \sin(2a)$.

CORRIGÉ

Comme $5a = \pi$, on a $3a = \pi - 2a$. D'après les angles associés (F08) :

$$\begin{aligned}\sin(3a) &= \sin(\pi - 2a)\\ &= \sin(2a).\end{aligned}$$

Conclusion. $3a = \pi - 2a$ et $\sin(3a) = \sin(2a)$.

2. a) 1 pts

Montrer que, pour tout réel x, $\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

INDICE

Écris $3x = 2x + x$.

CORRIGÉ

Soit x un réel.

Sinus d'une somme. D'après les formules d'addition (F10), avec $3x = 2x + x$:

$$\begin{aligned}\sin(3x) &= \sin(2x)\cos x\\ &\quad + \cos(2x)\sin x.\end{aligned}$$

Duplication. D'après les formules de duplication (F12), $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$ et $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$. Puis, d'après la relation fondamentale (F07), $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$:

$$\begin{aligned}&\sin(3x)\\ &= 2\sin x\cos^2 x\\ &\quad + \left(1 - 2\sin^2 x\right)\sin x\\ &= 2\sin x\left(1 - \sin^2 x\right)\\ &\quad + \sin x - 2\sin^3 x\\ &= 3\sin x - 4\sin^3 x.\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

2. b) 1 pts

En déduire que $4\cos^2 a - 2\cos a - 1 = 0$.

INDICE

Combine la question 1, la question 2. a) et une formule de duplication. Justifie avant de diviser.

CORRIGÉ

Égalité de départ. D'après la question 1, $\sin(3a) = \sin(2a)$. D'après la question 2. a) et la formule de duplication (F12), on obtient :

$$\begin{aligned} &3\sin a - 4\sin^3 a \\ &= 2\sin a\cos a. \end{aligned}$$

Division par $\sin a$. Comme $a \in]0, \pi[$, on a $\sin a > 0$, donc $\sin a \neq 0$. En divisant par $\sin a$:

$$3 - 4\sin^2 a = 2\cos a.$$

Retour au cosinus. D'après la relation fondamentale (F07), $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$, donc $3 - 4 + 4\cos^2 a = 2\cos a$.

Conclusion. On obtient $4\cos^2 a - 2\cos a - 1 = 0$.

3. 1 pts

En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

INDICE

Quelle équation du second degré le réel $\cos a$ vérifie-t-il ? Choisis la racine par son signe.

CORRIGÉ

Équation du second degré. D'après la question 2. b), $\cos a$ est racine de $4X^2 - 2X - 1 = 0$. Le discriminant vaut $4 + 16 = 20$, et $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Les racines sont :

$$\begin{aligned} &\frac{2 - 2\sqrt{5}}{8} = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}, \\ &\frac{1 + \sqrt{5}}{4}. \end{aligned}$$

Choix de la racine. Comme $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\cos a > 0$. Or $\frac{1-\sqrt{5}}{4} < 0$, car $\sqrt{5} > 1$.

Conclusion. Donc $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

4. 1 pts

Calculer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

CORRIGÉ

D'après la formule de duplication $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$ (F12) et la question 3 :

$$\begin{aligned}&\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\\ &= 2\times\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}{16} - 1\\ &= \frac{6+2\sqrt{5}}{8} - 1\\ &= \frac{\sqrt{5}-1}{4}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

5. 0,5 pts

En déduire la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

CORRIGÉ

On a $\frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}$. D'après les angles associés (F08) et la question 4 :

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) &= \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\\ &= \frac{\sqrt{5}-1}{4}.\end{aligned}$$

Conclusion. On a donc $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

6. 1 pts

Résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'équation $\cos x = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

CORRIGÉ

D'après la question 4, l'équation s'écrit $\cos x = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. D'après le théorème des équations $\cos x = \cos\alpha$ (F18) :

$$x \equiv \frac{2\pi}{5}\ [2\pi]$$

ou

$$x \equiv -\frac{2\pi}{5}\ [2\pi].$$

Sélection. Dans $[0, 2\pi[$, on obtient $\frac{2\pi}{5}$ et $-\frac{2\pi}{5} + 2\pi = \frac{8\pi}{5}$.

Conclusion. Dans $[0, 2\pi[$, $S = \left\{\frac{2\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}\right\}$.

7. 1 pts

Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'équation $4\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0$.

INDICE

Les deux valeurs possibles de $\cos x$ sont connues. Pour la valeur négative, pense à un angle associé.

CORRIGÉ

D'après la question 3, avec $X = \cos x$, l'équation équivaut à $\cos x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ ou $\cos x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$.

Valeur positive. $\dfrac{1+\sqrt{5}}{4} = \cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$. Dans $]-\pi, \pi]$, le théorème des équations $\cos x = \cos\alpha$ (F18) donne $x = -\dfrac{\pi}{5}$ ou $x = \dfrac{\pi}{5}$.

Valeur négative. D'après la question 4 et les angles associés (F08) :

$$\begin{aligned}\frac{1-\sqrt{5}}{4} &= -\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\\ &= \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right).\end{aligned}$$

Dans $]-\pi, \pi]$, F18 donne $x = -\dfrac{3\pi}{5}$ ou $x = \dfrac{3\pi}{5}$.

Conclusion. Dans $]-\pi, \pi]$:

$$S = \left\{-\frac{3\pi}{5}, -\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}\right\}.$$

8. 1 pts

Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'équation $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$.

CORRIGÉ

Forme $r\cos(x-\varphi)$. Ici $a = \sqrt{3}$ et $b = 1$, donc $r = \sqrt{3+1} = 2$. Le réel $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$ vérifie $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\varphi = \dfrac{1}{2}$. D'après la transformation de $a\cos x + b\sin x$ (F16), l'équation équivaut à $2\cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = 1$, soit :

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Les deux familles. D'après F18 :

$$x - \frac{\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$$

ou

$$x - \frac{\pi}{6} \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi],$$

soit $x \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ ou $x \equiv -\dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

Conclusion. Chaque famille a un seul élément dans $]-\pi, \pi]$. Donc $S = \left\{-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}\right\}$.

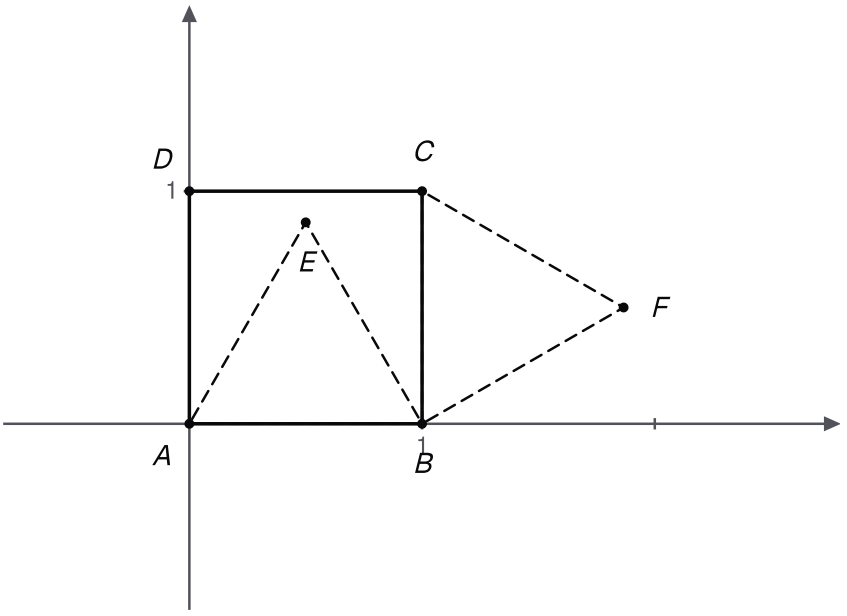
Exercice 3 8 pts

Problème : Un carré, deux triangles équilatéraux, un alignement

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points :

- $A(0,0), B(1,0), C(1,1), D(0,1)$;
- $E\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $F\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Le quadrilatère $ABCD$ est un carré. On veut montrer que D, E et F sont alignés.



Les données dans le repère : le carré ABCD de côté 1, et les points E et F, troisièmes sommets des triangles ABE et BCF.

1. 1 pts

Montrer que les triangles ABE et BCF sont équilatéraux.

CORRIGÉ

On calcule les longueurs dans le repère orthonormé.

Triangle ABE. $AB = 1$, et :

$$AE = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1,$$

$$BE = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = 1.$$

Triangle BCF. $BC = 1$, et :

$$BF = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1,$$

$$CF = \sqrt{\frac{3}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 1.$$

Conclusion. Les deux triangles ont leurs trois côtés de longueur 1 : les triangles ABE et BCF sont équilatéraux.

2. 1 pts

Montrer que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et que $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BF}) \equiv -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

INDICE

Lis chaque angle sur un vecteur unitaire, avec la définition du cosinus et du sinus.

CORRIGÉ

Angle en A. On a :

$$\overrightarrow{AE} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\vec{j},$$

de norme 1. D'après la définition du cosinus et du sinus (F06) et celle des mesures d'un angle orienté (F02), $(\vec{i}, \overrightarrow{AE}) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$. Comme $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$, on obtient $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Angle en B. De même :

$$\overrightarrow{BF} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\vec{j},$$

et $\overrightarrow{BC} = \vec{j}$. Donc $(\vec{i}, \overrightarrow{BF}) \equiv \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{BC}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$. D'après la relation de Chasles (F03) et ses conséquences (F04) :

$$\begin{aligned}
&(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BF}) \\
&\equiv (\overrightarrow{BC}, \vec{i}) + (\vec{i}, \overrightarrow{BF}) \\
&\equiv -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \\
&\equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi].
\end{aligned}$$

Conclusion. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BF}) \equiv -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

3. a) 1 pts

Calculer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

CORRIGÉ

On a $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.

Cosinus. D'après la formule du cosinus d'une différence (F09) :

$$\begin{aligned}&\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Sinus. D'après la formule du sinus d'une différence (F10) :

$$\begin{aligned}&\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

3. b) 1 pts

Vérifier que :

$$\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2-\sqrt{3},$$

$$\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2+\sqrt{3}.$$

CORRIGÉ

On développe chaque carré, avec $\sqrt{6}\times\sqrt{2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^2\\ &= \frac{6-4\sqrt{3}+2}{4}\\ &= 2-\sqrt{3},\\ &\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^2\\ &= \frac{6+4\sqrt{3}+2}{4}\\ &= 2+\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Conclusion. Les deux égalités sont vérifiées.

4. a) 1,25 pts

Montrer que :

$$\overrightarrow{DE} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \times \left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)\vec{i} + \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\vec{j}\right).$$

INDICE

Compare les coordonnées des deux membres, une à une.

CORRIGÉ

Coordonnées de $\overrightarrow{DE}$. On a $\overrightarrow{DE}\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)$.

Second membre. D'après les angles associés (F08), $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$. Avec les questions 3. a) et 3. b), l'abscisse vaut :

$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{6-2}{8} = \frac{1}{2},$$

et l'ordonnée vaut :

$$-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = -\frac{2-\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}-1.$$

Conclusion. Les coordonnées coïncident : l'égalité est démontrée.

4. b) 1,25 pts

Montrer de même que :

$$\overrightarrow{DF} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \times \left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)\vec{i} + \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\vec{j}\right).$$

CORRIGÉ

Coordonnées de $\overrightarrow{DF}$. On a $\overrightarrow{DF}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Second membre. Comme à la question 4. a), avec les questions 3. a) et 3. b), l'abscisse vaut :

$$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{2+\sqrt{3}}{2} = 1+\frac{\sqrt{3}}{2},$$

et l'ordonnée vaut :

$$-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = -\frac{6-2}{8} = -\frac{1}{2}.$$

Conclusion. Les coordonnées coïncident : l'égalité est démontrée.

5. 1 pts

En déduire une mesure de $(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF})$, puis que les points D, E et F sont alignés. Préciser la position de E.

CORRIGÉ

Angles avec $\vec{i}$. Les réels $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ sont strictement positifs, car $\sqrt{6} > \sqrt{2}$. D'après la question 4, la définition du cosinus et du sinus (F06), celle des mesures (F02) et les conséquences de la relation de Chasles (F04) :

$$(\vec{i}, \overrightarrow{DE}) \equiv -\frac{\pi}{12}\ [2\pi],$$
$$(\vec{i}, \overrightarrow{DF}) \equiv -\frac{\pi}{12}\ [2\pi].$$

Mesure de $(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF})$. D'après la relation de Chasles (F03) et F04 :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}) &\equiv \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{12} \\ &= 0\ [2\pi].\end{aligned}$$

Alignement. D'après la caractérisation de la colinéarité (F05), $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires de même sens : D, E et F sont alignés.

Position de E. Les vecteurs unitaires étant égaux, $DE = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ et $DF = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$, donc $DE < DF$.

Conclusion. Une mesure de $(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF})$ est 0 ; les points D, E et F sont alignés, et le point E appartient au segment $[DF]$.

6. 0,5 pts

Déterminer la mesure principale de $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DE})$.

CORRIGÉ

Angle $(\vec{i}, \overrightarrow{DA})$. On a $\overrightarrow{DA} = -\vec{j}$. D'après les conséquences de la relation de Chasles (F04) :

$$\begin{aligned}(\vec{i}, \overrightarrow{DA}) &\equiv \frac{\pi}{2} + \pi \\ &\equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Mesure cherchée. D'après la relation de Chasles (F03) et la question 5 :

$$\begin{aligned}&(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DE}) \\ &\equiv (\overrightarrow{DA}, \vec{i}) + (\vec{i}, \overrightarrow{DE}) \\ &\equiv \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \\ &= \frac{5\pi}{12}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Conclusion. Comme $\dfrac{5\pi}{12}$ appartient à $]-\pi, \pi]$, c'est la mesure principale de $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DE})$.

Exercice 4 — 8 pts

Problème : Une somme de puissances quatrièmes

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\sin(4x)$.

1. — 1 pts

Montrer que, pour tout réel x, $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2(2x)$.

INDICE

Développe le carré de $\cos^2 x + \sin^2 x$.

CORRIGÉ

Soit x un réel.

Carré de la relation fondamentale. D'après la relation fondamentale (F07), $\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)^2 = 1$. En développant ce carré :

$$\begin{aligned}&\cos^4 x + \sin^4 x\\ &= 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x\\ &= 1 - \frac{1}{2}\left(2\sin x \cos x\right)^2.\end{aligned}$$

Duplication. D'après la formule de duplication (F12), $2\sin x \cos x = \sin(2x)$.

Conclusion. Pour tout réel x, $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2(2x)$.

2. — 1 pts

En déduire que, pour tout réel x, $\cos^4 x + \sin^4 x = \dfrac{3 + \cos(4x)}{4}$.

CORRIGÉ

Soit x un réel. D'après la formule de linéarisation (F12) appliquée au réel $2x$:

$$\sin^2(2x) = \frac{1 - \cos(4x)}{2}.$$

Avec la question 1 :

$$\begin{aligned}&\cos^4 x + \sin^4 x\\ &= 1 - \frac{1 - \cos(4x)}{4}\\ &= \frac{3 + \cos(4x)}{4}.\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $\cos^4 x + \sin^4 x = \dfrac{3 + \cos(4x)}{4}$.

3. 1 pts

Montrer que, pour tout réel X, $\cos X - \sqrt{3}\sin X = 2\cos\left(X + \frac{\pi}{3}\right)$.

CORRIGÉ

Ici $a = 1$ et $b = -\sqrt{3}$, donc $r = \sqrt{1+3} = 2$. Le réel $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ vérifie $\cos\varphi = \frac{1}{2} = \frac{a}{r}$ et $\sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{b}{r}$.

D'après la transformation de $a\cos x + b\sin x$ (F16), pour tout réel X :

$$\begin{aligned}&\cos X - \sqrt{3}\sin X\\ &= 2\cos\left(X - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\\ &= 2\cos\left(X + \frac{\pi}{3}\right).\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel X, $\cos X - \sqrt{3}\sin X = 2\cos\left(X + \frac{\pi}{3}\right)$.

4. 0,75 pts

En déduire que, pour tout réel x :

$$f(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right).$$

CORRIGÉ

Soit x un réel. D'après la question 2 :

$$\begin{aligned}&f(x)\\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos(4x)\\ &\quad - \frac{\sqrt{3}}{4}\sin(4x)\\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\big(\cos(4x)\\ &\quad - \sqrt{3}\sin(4x)\big).\end{aligned}$$

D'après la question 3 avec $X = 4x$:

$$\begin{aligned}&f(x)\\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\times 2\cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)\\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right).\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $f(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)$.

5. 1 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 1$.

CORRIGÉ

Équation réduite. D'après la question 4, $f(x) = 1$ équivaut à :

$$\begin{aligned}\cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) &= \frac{1}{2} \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right).\end{aligned}$$

Les deux familles. D'après le théorème des équations $\cos x = \cos\alpha$ (F18) :

$$4x + \frac{\pi}{3} \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$$

ou

$$4x + \frac{\pi}{3} \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi],$$

soit $4x \equiv 0\ [2\pi]$ ou $4x \equiv -\dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

Division par 4. On divise aussi le module (W04) : $x \equiv 0\ \left[\dfrac{\pi}{2}\right]$ ou $x \equiv -\dfrac{\pi}{6}\ \left[\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Conclusion. Dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}S &= \left\{\frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \\ &\cup \left\{-\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.\end{aligned}$$

6. 0,75 pts

En déduire les solutions dans $[0, \pi]$ de l'équation $f(x) = 1$.

CORRIGÉ

On sélectionne dans chaque famille de la question 5. Soit $k \in \mathbb{Z}$.

- $0 \leq \dfrac{k\pi}{2} \leq \pi$ équivaut à $0 \leq k \leq 2$: on obtient 0, $\dfrac{\pi}{2}$ et π.
- $0 \leq -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{2} \leq \pi$ équivaut à $\dfrac{1}{3} \leq k \leq \dfrac{7}{3}$, soit $k = 1$ ou $k = 2$: on obtient $\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{5\pi}{6}$.

Conclusion. Dans $[0, \pi]$:

$$S = \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \pi\right\}.$$

7. 1,5 pts

Résoudre dans $[0, \pi]$ l'inéquation $f(x) \leq \dfrac{1}{2}$.

INDICE

Pose $X = 4x + \dfrac{\pi}{3}$: détermine l'intervalle que parcourt X, puis les valeurs de X qui conviennent.

CORRIGÉ

Inéquation réduite. D'après la question 4, $f(x) \leq \dfrac{1}{2}$ équivaut à $\dfrac{1}{2}\cos\left(4x + \dfrac{\pi}{3}\right) \leq -\dfrac{1}{4}$, soit $\cos\left(4x + \dfrac{\pi}{3}\right) \leq -\dfrac{1}{2}$.

Intervalle parcouru. On pose $X = 4x + \dfrac{\pi}{3}$. Quand x parcourt $[0, \pi]$, X parcourt $\left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{13\pi}{3}\right]$.

Lecture sur le cercle. On a $\cos X \leq -\dfrac{1}{2}$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq X \leq \frac{4\pi}{3} + 2k\pi.$$

Pour $k \leq -1$, ces intervalles ne contiennent que des réels négatifs. Pour $k \geq 2$, ils commencent à $\dfrac{14\pi}{3}$ ou au-delà, et $\dfrac{14\pi}{3} > \dfrac{13\pi}{3}$. Seuls $k = 0$ et $k = 1$ conviennent :

$$X \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{8\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}\right].$$

Retour à x. On retranche $\dfrac{\pi}{3}$:

$$4x \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right] \cup \left[\frac{7\pi}{3}, 3\pi\right],$$

puis on divise par 4.

Conclusion. Dans $[0, \pi]$:

$$S = \left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{12}, \frac{3\pi}{4}\right].$$

8. 1 pts

Calculer $f\left(\frac{\pi}{24}\right)$ à l'aide de la question 4, puis en déduire, à l'aide de la définition de f, la valeur exacte de $\cos^4\left(\frac{\pi}{24}\right)+\sin^4\left(\frac{\pi}{24}\right)$. Contrôler le résultat avec la question 2.

INDICE

Utilise d'une part la question 4, d'autre part la définition de f.

CORRIGÉ

Par la question 4. On a $4\times\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$, donc :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{24}\right) &= \frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Par la définition de f. Avec $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} &f\left(\frac{\pi}{24}\right)\\ &=\cos^4\left(\frac{\pi}{24}\right)+\sin^4\left(\frac{\pi}{24}\right)\\ &\quad-\frac{\sqrt{3}}{8}. \end{aligned}$$

Valeur cherchée. En égalant les deux expressions :

$$\begin{aligned} &\cos^4\left(\frac{\pi}{24}\right)+\sin^4\left(\frac{\pi}{24}\right)\\ &=\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{8}=\frac{6+\sqrt{3}}{8}. \end{aligned}$$

Contrôle. La question 2 donne le même résultat : $\frac{1}{4}\left(3+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=\frac{6+\sqrt{3}}{8}$.

Conclusion. $f\left(\frac{\pi}{24}\right)=\frac{3}{4}$ et $\cos^4\left(\frac{\pi}{24}\right)+\sin^4\left(\frac{\pi}{24}\right)=\frac{6+\sqrt{3}}{8}$.

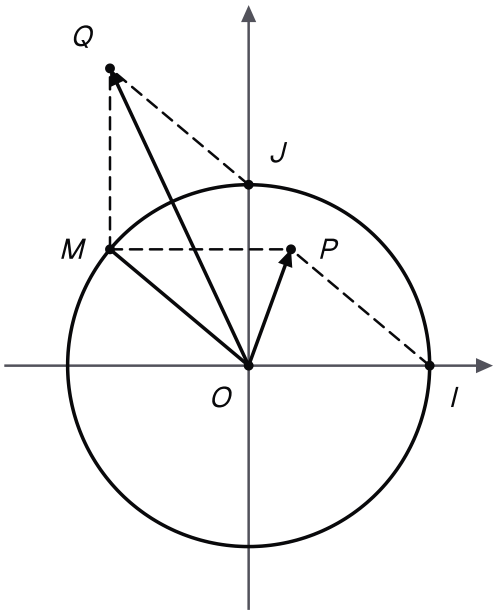
Exercice 5 8 pts

Problème : Deux sommes de vecteurs et un angle constant

Dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on note $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique, et I, J les points tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$.

Soit x un réel de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$ et M le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse curviligne x. On définit les points P et Q par :

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OM},$$
$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{OM}.$$



La construction de l'énoncé pour une valeur de x : P complète le parallélogramme OIPM, et Q complète le parallélogramme OJQM.

1. 1 pts

Montrer que :

$$\overrightarrow{OP} = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\vec{i} + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\vec{j}\right).$$

CORRIGÉ

Coordonnées de $\overrightarrow{OP}$. D'après la définition du cosinus et du sinus (F06), $\overrightarrow{OM} = \cos x\,\vec{i} + \sin x\,\vec{j}$.

Donc :

$$\overrightarrow{OP} = (1+\cos x)\,\vec{i} + \sin x\,\vec{j}.$$

Duplication. D'après les formules de duplication (F12) appliquées au réel $\dfrac{x}{2}$:

$$1+\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right),$$

$$\sin x = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

Conclusion. En mettant $2\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$ en facteur, on obtient l'égalité demandée.

2. 1 pts

Montrer que :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} = 2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \\ \times\left(\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\vec{i}\right. \\ \left.+\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\vec{j}\right).\end{aligned}$$

INDICE

Écris $0=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $1=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$, puis transforme chaque somme en produit.

CORRIGÉ

Coordonnées de $\overrightarrow{OQ}$. Avec $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$:

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{OQ} \\ &=\left(\cos x+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\vec{i} \\ &\quad+\left(\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\vec{j}.\end{aligned}$$

Somme en produit. D'après la transformation d'une somme en produit (F15), avec $p=x$ et $q=\frac{\pi}{2}$: $\frac{p+q}{2}=\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}$ et $\frac{p-q}{2}=\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}$. Donc :

$$\begin{aligned}&\cos x+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &=2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \\ &\quad\times\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right), \\ &\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &=2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \\ &\quad\times\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

Conclusion. En mettant $2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$ en facteur, on obtient l'égalité demandée.

3. 1 pts

Justifier que $\cos\left(\frac{x}{2}\right) > 0$ et que $\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) > 0$. En déduire que $(\vec{i}, \overrightarrow{OP}) \equiv \frac{x}{2}\ [2\pi]$ et que $(\vec{i}, \overrightarrow{OQ}) \equiv \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

CORRIGÉ

Signes. Comme $-\frac{\pi}{2} < x < \pi$, on a :

$$-\frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2},$$
$$-\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4}.$$

Ces deux réels appartiennent à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, où le cosinus est strictement positif. En particulier $P \neq O$ et $Q \neq O$.

Angle de $\overrightarrow{OP}$. Le vecteur $\vec{u} = \cos\left(\frac{x}{2}\right)\vec{i} + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\vec{j}$ est unitaire et, d'après F06 et F02, $(\vec{i}, \vec{u}) \equiv \frac{x}{2}\ [2\pi]$. D'après la question 1, $\overrightarrow{OP}$ est un multiple strictement positif de $\vec{u}$. D'après les conséquences de la relation de Chasles (F04), $(\vec{i}, \overrightarrow{OP}) \equiv \frac{x}{2}\ [2\pi]$.

Angle de $\overrightarrow{OQ}$. De même, avec la question 2, $(\vec{i}, \overrightarrow{OQ}) \equiv \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

Conclusion. Les deux cosinus sont strictement positifs, $(\vec{i}, \overrightarrow{OP}) \equiv \frac{x}{2}\ [2\pi]$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OQ}) \equiv \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

4. 0,75 pts

En déduire que $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$, quel que soit le réel x de $\left]-\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

CORRIGÉ

D'après la relation de Chasles (F03), ses conséquences (F04) et la question 3 :

$$\begin{aligned}
&(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}) \\
&\equiv (\overrightarrow{OP}, \vec{i}) + (\vec{i}, \overrightarrow{OQ}) \\
&\equiv -\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{\pi}{4}\ [2\pi].
\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x de $\left]-\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$: cette mesure ne dépend pas de x.

5. 0,75 pts

Montrer que $OP^2 = 2 + 2\cos x$ et que $OQ^2 = 2 + 2\sin x$.

CORRIGÉ

Longueur OP. Dans le repère orthonormé, $\overrightarrow{OP}(1 + \cos x, \sin x)$. D'après la relation fondamentale (F07) :

$$\begin{aligned} OP^2 &= 1 + 2\cos x \\ &\quad + \cos^2 x + \sin^2 x \\ &= 2 + 2\cos x. \end{aligned}$$

Longueur OQ. De même, $\overrightarrow{OQ}(\cos x, 1 + \sin x)$, donc :

$$\begin{aligned} OQ^2 &= \cos^2 x + \sin^2 x \\ &\quad + 1 + 2\sin x \\ &= 2 + 2\sin x. \end{aligned}$$

Conclusion. $OP^2 = 2 + 2\cos x$ et $OQ^2 = 2 + 2\sin x$.

6. 0,75 pts

Montrer que $OP^2 - OQ^2 = -2\sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

INDICE

Écris $\sin x$ comme le cosinus d'un angle associé, puis transforme une différence de deux cosinus.

CORRIGÉ

Différence de deux cosinus. D'après la question 5 et les angles associés (F08) :

$$\begin{aligned} &OP^2 - OQ^2 \\ &= 2\left(\cos x - \sin x\right) \\ &= 2\left(\cos x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right). \end{aligned}$$

Transformation. D'après la transformation d'une somme en produit (F15), avec $p = x$ et $q = \dfrac{\pi}{2} - x$: $\dfrac{p+q}{2} = \dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{p-q}{2} = x - \dfrac{\pi}{4}$. Donc :

$$\begin{aligned} &OP^2 - OQ^2 \\ &= -4\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= -2\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Conclusion. $OP^2 - OQ^2 = -2\sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

7. 1 pts

Déterminer les réels x de $\left]-\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ tels que $OP = OQ$.

CORRIGÉ

Équation. Les longueurs OP et OQ sont positives, donc $OP = OQ$ équivaut à $OP^2 = OQ^2$, c'est-à-dire, d'après la question 6, à $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

Résolution. D'après l'annulation du sinus (F17), $x - \frac{\pi}{4} \equiv 0\ [\pi]$, soit $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Sélection. Dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, seul $k = 0$ convient, car $-\frac{3\pi}{4} < -\frac{\pi}{2}$ et $\frac{5\pi}{4} > \pi$.

Conclusion. Donc $S = \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$.

8. 1 pts

Résoudre dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ l'inéquation $OP \geq OQ$.

CORRIGÉ

Inéquation réduite. Comme à la question 7, $OP \geq OQ$ équivaut à $OP^2 - OQ^2 \geq 0$, soit, d'après la question 6, à $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 0$.

Changement d'inconnue. Quand x parcourt $\left]-\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, le réel $y = x - \frac{\pi}{4}$ parcourt $\left]-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$.

Lecture sur le cercle. Sur cet intervalle, $\sin y \leq 0$ équivaut à $y \in \left]-\frac{3\pi}{4}, 0\right]$: le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse curviligne y a alors une ordonnée négative ou nulle. On ajoute $\frac{\pi}{4}$ pour revenir à x.

Conclusion. Dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \pi\right[$:

$$S = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right].$$

9. 0,75 pts

Montrer que la mesure principale de $(\overrightarrow{PO}, \overrightarrow{PQ})$ est $-\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$. Donner sa valeur lorsque le triangle OPQ est isocèle en O.

INDICE

Exprime $\overrightarrow{PQ}$ à l'aide de $\vec{i}$ et de $\vec{j}$: ce vecteur ne dépend pas de x.

CORRIGÉ

Angle de $\overrightarrow{PQ}$. On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\ &= \overrightarrow{OJ} - \overrightarrow{OI} = -\vec{i} + \vec{j} \\ &= \sqrt{2}\Big(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\vec{i} \\ &\quad + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\vec{j}\Big).\end{aligned}$$

D'après F06, F02 et F04, $(\vec{i}, \overrightarrow{PQ}) \equiv \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.

Angle de $\overrightarrow{PO}$. Comme $\overrightarrow{PO} = -\overrightarrow{OP}$, les conséquences de la relation de Chasles (F04) et la question 3 donnent $(\vec{i}, \overrightarrow{PO}) \equiv \frac{x}{2} + \pi\ [2\pi]$.

Mesure cherchée. D'après la relation de Chasles (F03) et F04 :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{PO}, \overrightarrow{PQ}) &\equiv \frac{3\pi}{4} - \frac{x}{2} - \pi \\ &= -\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Comme $-\frac{\pi}{2} < x < \pi$, on a $-\frac{3\pi}{4} < -\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} < 0$: ce réel appartient à $]-\pi, \pi]$, c'est la mesure principale.

Triangle isocèle. D'après la question 4, $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$: les points O, P et Q ne sont pas alignés, et OPQ est un vrai triangle. Il est isocèle en O si et seulement si $OP = OQ$, soit $x = \frac{\pi}{4}$ d'après la question 7.

Conclusion. La mesure principale de $(\overrightarrow{PO}, \overrightarrow{PQ})$ est $-\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$; lorsque OPQ est isocèle en O, elle vaut $-\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{8}$.