BURHAN

Calcul trigonométrique : exercices, entraînement

1ère Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/1bac/sciences-mathematiques/mathematiques/calcul-trigonometrique/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul trigonométrique	Entraînement	8

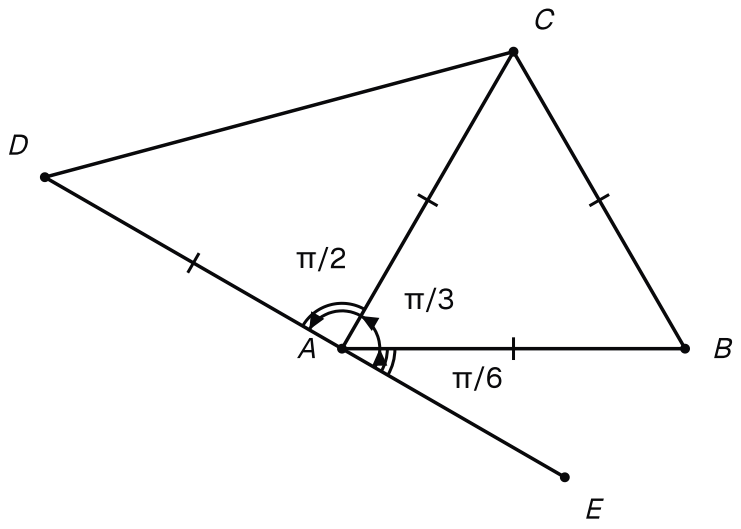
Exercice 1

Un triangle équilatéral et un angle droit

Le triangle ABC est équilatéral et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Le point D est tel que le triangle ACD est rectangle isocèle en A, avec $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Enfin, E est un point distinct de A tel que $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.



Les données : le triangle équilatéral direct ABC, le triangle ACD rectangle isocèle en A, et le point E, avec les trois angles orientés de l'énoncé.

1.

Déterminer la mesure principale de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

INDICE

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ fait le lien entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

2.

Déterminer la mesure principale de $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AD})$.

INDICE

$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$: un vecteur opposé ajoute π.

3.

Montrer que les points A, D et E sont alignés, et que A est situé entre D et E.

INDICE

Calcule une mesure de $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})$ en passant par $\overrightarrow{AB}$, puis utilise F05 avec ses deux cas.

4.

Soit F le point tel que $\overrightarrow{AF} = -2\overrightarrow{AC}$. Déterminer la mesure principale de $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD})$.

INDICE

Écris $\overrightarrow{AF} = 2\left(-\overrightarrow{AC}\right)$ et applique F04 deux fois.

Exercice 2

Quatre identités à démontrer

1.

Montrer que, pour tout réel x, $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos(2x)$.

INDICE

Une différence de deux carrés se factorise : $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$, avec $A = \cos^2 x$ et $B = \sin^2 x$.

2.

Soit x un réel tel que $\cos x \neq 0$. Montrer que $1 + \cos(2x) \neq 0$, puis que :

$$\frac{\sin(2x)}{1+\cos(2x)} = \tan x.$$

INDICE

Avec F12, écris $1 + \cos(2x) = 2\cos^2 x$ et $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

3.

Montrer que, pour tout réel x, $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

INDICE

Écris $3x = 2x + x$, applique F10, puis remplace $\cos(2x)$, $\sin(2x)$ et $\sin^2 x$ à l'aide de F12 et F07.

4.

En déduire que, pour tout réel x, $\cos(3x) = \cos x\left(2\cos(2x) - 1\right)$.

INDICE

Mets $\cos x$ en facteur dans le résultat de la question 3, puis remplace $\cos^2 x$ par une linéarisation.

Exercice 3

Les lignes trigonométriques de π/8

1.

À l'aide d'une formule de duplication, calculer $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$, puis la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

INDICE

Avec $a = \frac{\pi}{8}$, la formule $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$ fait intervenir $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

2.

Calculer de même la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

INDICE

Utilise $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a$, puis le signe du sinus sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

3.

On pose $t = \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$. Montrer que $t^2 + 2t - 1 = 0$, puis en déduire que $t = \sqrt{2} - 1$.

INDICE

Applique la formule de $\tan(2a)$ de F12 avec $a = \frac{\pi}{8}$, après avoir vérifié ses deux conditions. Choisis ensuite la racine du bon signe.

4.

En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)$.

INDICE

$\frac{5\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$: cherche la formule d'angle associé correspondante.

Exercice 4

Une équation du second degré en sin x

On considère l'équation (E), d'inconnue réelle x :

$$2\cos^2 x + 3\sin x - 3 = 0.$$

1.

Montrer que (E) équivaut à $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$.

INDICE

Remplace $\cos^2 x$ par $1 - \sin^2 x$.

2.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2X^2 - 3X + 1 = 0$.

INDICE

Calcule le discriminant.

3.

En déduire les solutions de (E) dans $\mathbb{R}$.

INDICE

Avec $X = \sin x$: résous $\sin x = 1$ et $\sin x = \dfrac{1}{2}$, en écrivant toutes les familles.

4.

Donner les solutions de (E) dans $[0, 4\pi[$.

INDICE

Chaque famille de période 2π donne deux valeurs dans un intervalle de longueur 4π.

Exercice 5

√6 cos x − √2 sin x : une équation, une inéquation

1.

Montrer que, pour tout réel x :

$$\sqrt{6}\cos x - \sqrt{2}\sin x = 2\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

INDICE

Calcule $r = \sqrt{6+2}$, puis $\frac{a}{r}$ et $\frac{b}{r}$: ce sont le cosinus et le sinus d'un angle remarquable.

2.

Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'équation $\sqrt{6}\cos x - \sqrt{2}\sin x = 2$.

INDICE

Ramène-toi à $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3.

Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'inéquation $\sqrt{6}\cos x - \sqrt{2}\sin x \geq 2$.

INDICE

Pose $X = x + \frac{\pi}{6}$ et écris l'intervalle parcouru par X quand x parcourt $]-\pi, \pi]$.

Exercice 6

Factoriser pour résoudre

1.

Montrer que, pour tout réel x, $\cos(5x) + \cos(3x) = 2\cos(4x)\cos x$.

INDICE

Applique F15 avec $p = 5x$ et $q = 3x$.

2.

Résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation $\cos(5x) + \cos(3x) = 0$.

INDICE

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul. Utilise F17 pour chaque facteur.

3.

Résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation $\cos(5x) + \cos(3x) = \cos x$.

INDICE

Avec la question 1, tout passe à gauche : $\cos x$ se met en facteur. Ne divise pas par $\cos x$.

Exercice 7

Signe d'un produit de deux facteurs trigonométriques

On veut résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'inéquation :

$$(2\cos x + 1)(2\sin x - 1) < 0.$$

1.

Étudier le signe de $2\cos x + 1$ sur $]-\pi, \pi]$.

INDICE

Résous d'abord $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ dans $]-\pi, \pi]$. Les points de $\mathcal{C}$ d'abscisse supérieure à $-\dfrac{1}{2}$ forment l'arc qui contient I.

2.

Étudier le signe de $2\sin x - 1$ sur $]-\pi, \pi]$.

INDICE

Résous $\sin x = \dfrac{1}{2}$ dans $]-\pi, \pi]$; l'ordonnée dépasse $\dfrac{1}{2}$ sur un arc du haut du cercle.

3.

Dresser le tableau de signes du produit sur $]-\pi, \pi]$, puis résoudre l'inéquation.

INDICE

Range les quatre réels $-\dfrac{2\pi}{3}$, $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{2\pi}{3}$, $\dfrac{5\pi}{6}$ dans l'ordre croissant. L'inégalité est stricte : les zéros sont exclus.

Exercice 8

La variable t = tan(x/2) et une solution perdue

Pour tout réel x tel que $\cos\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0$, on note $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

1.

Soit x un réel tel que $\cos\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0$. Montrer que $1 + \cos x \neq 0$ et que :

$$\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} = \frac{(1+t)^2}{2}.$$

INDICE

Remplace $\cos x$ et $\sin x$ par leurs expressions en t (F13), puis réduis au même dénominateur $1 + t^2$.

2.

Résoudre dans $]-\pi, \pi[$ l'équation $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1$, en l'écrivant à l'aide de t.

INDICE

Pour $x \in]-\pi, \pi[$, on a $\frac{x}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc $\cos\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0$. Multiplie ensuite par $1 + t^2$.

3.

Vérifier que π est solution de l'équation $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1$. En déduire ses solutions dans $]-\pi, \pi]$, et expliquer pourquoi la question 2 ne donnait pas π.

INDICE

Calcule $\sin \pi$ et $\cos \pi$. Que vaut $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$?

4.

Contrôler le résultat de la question 3 à l'aide de la forme $r\cos(x - \varphi)$.

INDICE

Ici $a = -1$ et $b = \sqrt{3}$: calcule r, puis cherche φ par son cosinus et son sinus.